Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Погоруй Анатолій Олександрович
Фонарюк Олена Василівна

ВСТУП ДО ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Навчально-методичний посібник

Житомир
2026

УДК 512.64(075.8)
В 85

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 11 від 29 травня 2026 року)

Рецензенти:

Валерій ЖУРАВЛЬОВ – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної математики Поліського національного університету.

Олександр ПРИЛИПКО – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Василь МИХАЙЛЕНКО – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Погоруй А. О. Фонарюк О. В. Вступ до лінійної алгебри. Навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2026. 77 с.

У посібнику подано курс лекцій з лінійної алгебри. Розглянуто основні поняття та методи лінійної алгебри: матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, векторні простори та підпростори, лінійні відображення, власні значення та власні вектори, жорданову нормальну форму матриці, квадратичні та білінійні форми. Теоретичний матеріал доповнено прикладами та задачами.

Посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня фізико-математичних факультетів закладів вищої освіти. Матеріали посібника можуть бути використані для вивчення курсу лінійної алгебри, а також викладачами під час підготовки та проведення навчальних занять.

УДК 512.64(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Лінійна алгебра – одна з фундаментальних дисциплін сучасної математики та її застосувань. Вона є базою для багатьох розділів математики, фізики, теорії прийняття рішень, статистики та машинного навчання, інформатики, економіки тощо.

Цей навчальний посібник написано на основі лекцій з курсу лінійної алгебри, які автор читає для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка. У ньому розглянуто основні поняття лінійної алгебри: матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, векторні простори та підпростори, лінійні залежності і базиси, лінійні відображення, власні значення та власні вектори, діагоналізацію матриць операторів або зведення їх до жорданової нормальної форми, квадратичні та білінійні форми. Виклад базових теоретичних результатів лінійної алгебри поєднується з прикладами та задачами.

Посібник призначений для здобувачів вищої освіти, які вивчають курс лінійної алгебри, та може бути використаний викладачами під час підготовки й проведення навчальних занять.

Лекція 1. Матриці

Означення 1.1. *Матрицею A розміром* $m \times n$ *називається прямокутна таблиця чисел* a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ *(елементів матриці), розташованих у* m *рядках та* n *стовпцях*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для стислості запису матриці A використовують позначення $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ або $A_{m\times n}$.

Спеціальні матриці:

1. Якщо $a_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ матрицю називають *нульовою* і позначають $0_{m\times n}$.
2. Якщо $m = n$ матрицю називають квадратною порядку n. Елементи a_{ii}, $i = 1, \dots, n$ квадратної матриці порядку n утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{i(n-i+1)}$, $i = 1, \dots, n$ – *побічну діагональ.*
3. Якщо у квадратній матриці усі елементи, крім можливо, елементів a_{ii}, $i = 1, \dots, n$, дорівнюють нулеві, то її називають *діагональною*.
4. Якщо у діагональній матриці $a_{ii} = \lambda$, $i = 1, \dots, n$, то її називають скалярною матрицею.
5. Якщо у квадратній матриці всі елементи нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулеві, то її називають *верхньою (нижньою) трикутною*.
6. Якщо у квадратній матриці $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$ і $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, то її називають *одиничною* і позначають I_n *або* E_n.
7. Матриця розміром $1 \times n$ називається *матрицею рядком*.
8. Матриця розміром $m \times 1$ називається *матрицею стовпцем*.

Лінійні операції над матрицями

Означення 1.2. *Матриці* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *і* $B = \left(b_{ij}\right)_{l\times k}$ *називаються рівними, якщо* $m = l$ *та* $n = k$, *тобто* A *та* B *мають однакові розміри і*

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Означення 1.3. *Сумою матриць* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *та* $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ *називається матриця* $C = A + B = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ *така, що*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Означення 1.4. *Добутком матриці* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *на дійсне число* λ *називається матриця*

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Теорема 1.1. *Операції додавання та множення матриць розміру* $m \times n$ *на число задовольняють властивості*

1. $A + B = B + A$ *(комутативність додавання);*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(асоціативність додавання);*
3. $A + 0_{m\times n} = A$*;*
4. $A + (-A) = 0_{m\times n}$, *де* $-A = (-1)A$*;*
5. $1A = A$*;*
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$*;*
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*;*
8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*;*

Означення 1.5. *Транспонованою матрицею до матриці* A *називається матриця* A^T, *що виникає з матриці в результаті операції заміни її рядків на стовпчики.*

Неважко переконатись, що для $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ транспонована матриця така

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}.$$

Твердження 1.1. *Мають місце очевидні властивості:*

1. $(\lambda A)^T = \lambda (A)^T$, $\forall A_{m\times n}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\forall A_{m\times n}, B_{m\times n}$.

Матриця A називається *симетричною*, якщо $A^T = A$.

Нелінійні операції над матрицями

Множення матриць

Спочатку означимо добуток матриці-рядка $\boldsymbol{a}' = (a_1 a_2 \dots a_n)$ розміру $1\times n$ на матрицю-стовпець

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ розміру $n \times 1$, а саме

$$\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Означення 1.6. *Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times l}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{l\times n}$ називається матриця $C = AB$ розміром $m \times n$, елемент c_{ij} якої дорівнює добутку i-го рядка матриці A на j-ий стовпець матриці B, тобто*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}.$$

Теорема 1.2. *Добуток матриць задовольняє властивості:*

1. $(AB)C = A(BC)$ *для довільних* $A_{m\times l}$, $B_{l\times k}$, $C_{k\times n}$ *(асоціативність множення);*
2. $(A+B)C = AC + BC$ *для довільних матриць* $A_{m\times l}$, $B_{m\times l}$, $C_{l\times n}$;
3. $C(A+B) = CA + CB$ *для довільних матриць* $A_{l\times n}$, $B_{l\times n}$, $C_{m\times l}$;

4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *для довільних матриць* $A_{m\times l}$, $B_{l\times n}$ *та* $\lambda \in \mathbb{R}$.*;*
5. $AI_n = A$, $I_m A = A$ *для довільної матриці* $A_{m\times n}$*;*
6. $AO_{n\times l} = O_{m\times l}, O_{k\times m}A = O_{k\times n}$ *для довільної матриці* $A_{m\times n}$.

Доведення. 1. За означенням добутку елементи матриці $(AB)C$ обчислюються так

$$\left((AB)C\right)_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_k \left(\sum_l a_{il} b_{lk}\right) c_{kj} = \sum_k \sum_l a_{il} b_{lk}\, c_{kj}$$
$$= \sum_k a_{il} \left(\sum_l b_{lk}\, c_{kj}\right).$$

Отже,

$$\left((AB)C\right)_{ij} = \left(A(BC)\right)_{ij},$$

тобто $(AB)C = A(BC)$.

2. За означенням добутку маємо

$$\left((A+B)C\right)_{ij} = \sum_k (A+B)_{ik} c_{kj} = \sum_k (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_k \left(a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}\right)$$
$$= \sum_k a_{ik} c_{kj} + \sum_k b_{ik} c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}.$$

Отже,

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Аналогічно доводиться 3. Властивості 4-6 очевидні.

Слід відзначити, що множення матриць, взагалі кажучи, не комутативне. Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Твердження 1.1. *Нехай* $A = (a_{ij})_{m\times l}$, $B = (b_{ij})_{l\times n}$. *Тоді* $(AB)^T = B^T A^T$.

Доведення. Оскільки матриця AB має розмір $m \times n$, то $(AB)^T$ має розмір $n \times m$. Матриця B^T має розмір $n \times l$, а матриця A^T має розмір $l \times m$, отже, $B^T A^T$ має розмір $n \times m$. Отже, $(AB)^T$ та $B^T A^T$ мають один і той же розмір. Залишилось перевірити рівність відповідних елементів цих матриць. Дійсно, нехай $A^T = \|\tilde{a}_{ij}\|$, $B^T = \|\tilde{b}_{ij}\|$. Тоді

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k \tilde{a}_{kj} \tilde{b}_{ik} = \sum_k \tilde{b}_{ik} \tilde{a}_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

Обернення матриць

Означення 1.7. *Оберненою матрицею до квадратної матриці* A *розміру* n *називається матриця* A^{-1} *така, що*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

При цьому матриця A називається *оборотною*.

Теорема 1.3. (Властивості обернення матриць).

1. *Для кожної квадратної матриці існує не більш ніж одна обернена*;
2. Якщо A – оборотна, то $(A^{-1})^{-1} = A$;
3. Якщо A – оборотна, то $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
4. Якщо A і B – оборотні, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
5. Якщо A – оборотна, то $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Доведення. 1. Припустимо, що існує дві обернені матриці A_1^{-1} та A_2^{-1} до матриці A. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}I = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (AA_1^{-1})A_2^{-1} = IA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

2. $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$ та $AA^{-1} = I$. З урахуванням 1 $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. $(A^{-1})^k A^k = (A^{-1})^{k-1}(A^{-1}A)A^{k-1} = (A^{-1})^{k-1}IA^{k-1} = (A^{-1})^{k-1}A^{k-1} = \cdots = A^{-1}A = I$.

4. $I = AA^{-1} = AIA^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1})$.

5, $AA^{-1} = I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$. Звідки $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Індуктивне означення визначника матриці (детермінанта) матриці

Означення 1.8. *Визначником квадратної матриці A розміру n називається число $|A| = \det A$, яке можна обчислити індуктивно так:*

1) *якщо $n = 1$, то $\det a_{11} = a_{11}$;*
2) *якщо $n > 1$, то $\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}$, де M_{1k} визначник матриці $(n-1)$-го порядку, яка одержується із A, якщо викреслити перший рядок і k-ий стовпець.*

Приклади

При $n = 2$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При $n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \tag{1.1}$$

Вправи

1. Обчислити $AB + BA$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити

$$\det\begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Переконатись, що

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

   де A, B – матриці із вправи 1.

Лекція 2. Визначник (детермінант) матриці за Лейбніцем. Базові властивості

Перестановки

Нехай M – скінченна множина, що містить n елементів. Для спрощення викладок припустимо, що $M = \{1,2, \dots, n\}$.

Означення 2.1. *Перестановкою (або підстановкою) множини M називається довільне взаємно однозначне відображення* $\sigma: M \to M$. *Тобто* $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ *– це набір* $1,2, \dots, n$ *записаний в іншому порядку.*

Наприклад, нехай $M = \{1,2,3\}$, а $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$. Підстановка $\sigma(k) = i_k$, $k = 1, \dots, n$ також записується у вигляді таблиці

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Якщо $\sigma(k) = k$, $k = 1, \dots, n$, то перестановка називається тотожною. Всього існує $n!$ перестановок множини $M = \{1,2, \dots, n\}$. Множина всіх таких перестановок позначається S_n.

Парні/непарні перестановки

Означення 2.1. а) *Тотожна перестановка вважається парною.*

б) *Перехід від* $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \underline{\sigma(i)}, \dots, \underline{\underline{\sigma(j)}}, \dots, \sigma(n)$ *до*

$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \underline{\underline{\sigma(j)}}, \dots, \underline{\sigma(i)}, \dots, \sigma(n)$, *(тобто перехід, коли міняються місцями тільки два значення перестановки) називається* ***транспозицією*** *і вона міняє парність перестановки.*

в) *Парність перестановки – це парність числа транспозицій при переході від цієї перестановки до тотожної.*

Означення 2.2. *Інверсія – це пара чисел, які стоять у неправильному порядку,*

Наприклад, у послідовності $(1,3,2)$ пара $(3,2)$ – інверсія.

Означення 2.3. *Парність перестановки визначається числом інверсій.*

Наприклад, послідовність $(3,2,1)$ має три інверсії $(3,2)$, $(3,1)$ та $(2,1)$, отже, вона непарна.

Будемо вважати, $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, якщо σ парна і $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$, якщо σ непарна перестановка.

Оберненою до $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ називається така перестановка σ^{-1}, що $\sigma^{-1}\big(\sigma(k)\big) = \sigma\big(\sigma^{-1}(k)\big) = k, \forall k = 1,2, \dots, n$. Для запису оберненої до σ підстановки σ^{-1} у вигляді таблиці спочатку записуємо

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

а далі впорядковуємо верхній рядок у порядку зростання і переписуємо відповідно елементи нижнього рядка.

Парність оберненої до σ підстановки σ^{-1} така ж як і σ. Дійсно, якщо σ парна (непарна), то потрібно здійснити парне (непарне) число транспозицій при переході від $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ до тотожної. Із (2.1) випливає, що таку ж кількість транспозицій потрібно здійснити, щоб від $\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(n)$ перейти до тотожної перестановки.

Означення Лейбніца для визначника

Означення 2.3. *Визначником квадратної матриці A розміру n називається число*

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \qquad (2.2)$$

Приклад При $n = 2$ маємо перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – парна, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – непарна.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Використовуючи формулу (2.2), довести формулу (1.1).

Лема 2.1. *Нехай A – верхня (нижня) трикутна матриця розміру n. Тоді*

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Доведення. Нехай A – верхня трикутна, тоді $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Розглянемо $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Можливі випадки:

1. $1 \le \sigma(1), 2 \le \sigma(2), \dots, n \le \sigma(n)$. Додаємо ці нерівності і маємо $1 + \dots + n \le \sigma(1) + \dots + \sigma(n) = 1 + \dots + n$. Звідки $1 = \sigma(1), 2 = \sigma(2), \dots, n = \sigma(n)$, тобто σ – тотожна перестановка і доданок в формулі (2.2) $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.
2. Нехай існує i таке, що $i > \sigma(i)$, тоді $a_{i\sigma(i)} = 0$, звідки $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$.

Отже, $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Властивості визначника

Розглянемо зображення матриці у вигляді рядків: $A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, де A_i – i-тий рядок матриці A.

1. Якщо для деякого i рядок $A_i = \mathbf{0}$ (нульовий), то $\det A = 0$. Це очевидно, оскільки $a_{i\sigma(i)} = 0$ для всіх $\sigma \in S_n$.
2. <u>*Полілінійність*</u> *за рядками*: якщо $A_i = \lambda A_i' + \mu A_i''$, то

$$\det A = \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Доведення.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots \left(\lambda a'_{i\sigma(i)} + \mu a''_{i\sigma(i)}\right) \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$+ \mu \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

3. <u>*Кососиметричність*</u> *за рядками:* $\forall i < j$

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Доведення. $\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

Тобто від перестановеи $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \underline{\sigma(i)}, \dots, \underline{\underline{\sigma(j)}}, \dots, \sigma(n)$ ми перейшли до перестановки $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \underline{\underline{\sigma(j)}}, \dots, \underline{\sigma(i)}, \dots, \sigma(n)$, яка має протилежну парність. Звідки

$$\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$
$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} = -\det A.$$

Наслідок 2.1. Якщо два рядки матриці A рівні, то $\det A = 0$.

Доведення. Дійсно, якщо поміняти місцями між собою ці два однакові рядки матриці, то знак визначника матриці зміниться на протилежний, а з іншого боку матриця не зміниться, що можливо тільки тоді, коли $\det A = 0$.

Наслідок 2.2. Якщо два рядки матриці A пропорційні, то $\det A = 0$.

Вправа Довести наслідок 2.2.

4. Для квадратної матриці A маємо $\det A = \det A^T$.

Доведення.

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$
$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A.$$

Наслідок 2.3. Полілінійність і кососиметричність справедливі й за стовпцями.

5. Для квадратних матриць A та B одного розміру має місце $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   Доведення цієї властивості буде наведено нижче.

Означення 2.4. *Три типи елементарних перетворень над рядками:*

Тип 1. *Додавання до одного рядка іншого, помноженого на число;*

Тип 2. *Перестановка двох рядків;*

Тип 3. *Множення якогось рядка на ненульове число.*

Перетворення визначника при елементарних перетвореннях

Тип 1. $A_i' = A_i + \lambda A_j$, $i \neq j$. Тоді в наслідок полілінійності, маємо

$$\mathrm{det}A' = \mathrm{det}A + \lambda \mathrm{det}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

але в наслідок кососиметричності $\mathrm{det}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0$. Отже,

$$\mathrm{det}A' = \mathrm{det}A.$$

Тип 2. $A_i \leftrightarrow A_j$. Тоді в наслідок кососиметричності

$$\mathrm{det}A' = -\mathrm{det}A.$$

Тип 3. $A_i' = \lambda A_i$, $\lambda \neq 0$. Тоді в наслідок полілінійності, маємо

$$\mathrm{det}A' = \lambda \mathrm{det}A.$$

Наслідок 2.3. Властивості $\mathrm{det}A = 0$ чи $\mathrm{det}A \neq 0$ не змінюються при елементарних перетвореннях.

Вправа Знайти визначник матриці A, де

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Лекція 3. Обчислення визначника за розкладом по рядку чи стовпцю. Формули Крамера

Означення 3.1. *Нехай A квадратна матриця розміру n. Визначник матриці, одержаної видаленням із матриці A i-го рядка та j-го стовпця, називається доповняльним мінором M_{ij} елемента a_{ij}.*

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ називають алгебраїчним доповненням елемента a_{ij}.

Лема 3.1. *Для квадратної матриці A розміру n, у якої i-й рядок має вигляд $A_i = (0 \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad 0)$. Має місце*

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

Доведення. Розглянемо квадратну матрицю A розміру n, у якої перший рядок має вигляд $A_1 = (a_{11} \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$. Покажемо, що тоді $\det A = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$.

Дійсно, в кожен доданок визначника $\det A$ у формулі Лейбніца входить рівно по одному елементу рядка A_1, але оскільки всі ці елементи, відмінні від a_{11}, дорівнюють нулеві, то

$$\det A = \sum_{\sigma_1 \in S_n^1} \operatorname{sign}(\sigma_1) a_{11} a_{2\sigma_1(2)} \dots a_{n\sigma_1(n)} = a_{11} \sum_{\sigma_1 \in S_n^1} \operatorname{sign}(\sigma_1) a_{2\sigma_1(2)} \dots a_{n\sigma_1(n)},$$

де S_n^1 – це такі перестановки із S_n, які зберігають 1 на місці, тобто $\sigma_1(1) = 1$. Легко бачити, що

$$\sum_{\sigma_1 \in S_n^1} \operatorname{sign}(\sigma_1) a_{2\sigma_1(2)} \dots a_{n\sigma_1(n)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_{11} = A_{11}.$$

Розглянемо квадратну матрицю A розміру $n,$ у якої i -тий рядок має вигляд

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Перенесемо i-тий рядок на перше місце, послідовно міняючи його місцями з $(i-1)$-м, $(i-2)$-м і т. д., нарешті, з першим. На це знадобиться $i-1$ транспозиція рядків, при кожній із яких визначник множиться на -1. Потім перенесемо j-тий стовпець на перше місце, послідовно міняючи його місцями з $(j-1)$-м, $(j-2)$-м і т. д., нарешті, з першим. На це знадобиться $j-1$ транспозиція стовпців, при кожній із яких визначник множиться на -1. Нарешті одержимо матрицю, у якої перший рядок буде мати вигляд $A_1 = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, визначник якої буде відрізнятись від матриці A знаком $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$.

Отже,

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} M'_{11},$$

де $M'_{11} = M_{ij}$.

З урахуванням властивості 4 визначника транспонованої матриці для квадратної матриці A розміру $n,$ у якої j *-й* стовпець має вигляд $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Має місце

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

Теорема 3.1. *Для довільної квадратної матриці* A *розміру* n *та довільного* i $(1 \le i \le n)$ *має місце розклад визначника за* i*-тим рядком:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

та довільного j $(1 \le j \le n)$ *розклад визначника за* j*-тим стовпцем:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

Доведення. Доведемо для розкладу за стовпцем. Очевидно, що j-ий стовпець матриці A розкладається в суму

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Із властивості полілінійності визначника випливає

$$\det A = \det A_1 + \det A_2 + \cdots + \det A_n,$$

де A_k, матриця, у якої j *-й* рядок має вигляд $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{kj} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\det A_k = (-1)^{j+k} a_{kj} M_{kj} = a_{kj} A_{kj}$, теорему доведено.

Теорема 3.2. *Якщо $k \neq i$, то сума добутків елементів i-го рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення k-го рядка (стовпця) дорівнює нулеві, тобто*

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = 0$$

та

$$a_{1i} A_{1k} + a_{2i} A_{2k} + \cdots + a_{ni} A_{nk} = 0.$$

Доведення. Доведемо для рядків (доведення для стовпців аналогічне). Нехай у матриці A' розміру n i-тий та k-тий рядки однакові. Ми знаємо, що тоді $\det A' = 0$. Але розклад визначника за k-тим рядком цієї матриці саме і буде сума $a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn}$ оскільки в k-му рядку елементи такі ж як й в i-му рядку. Оскільки

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \det A' = 0$$

доведення завершено.

Система n лінійних рівнянь з n невідомими

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Тут $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ – матриця коефіцієнтів системи, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – невідомі, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ – вільні члени.

Розв'язком системи (3.1) називається будь-яка сукупність значень невідомих $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$,…, $x_n = \alpha_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Нехай $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ і $\det A \neq 0$.

Помножимо перше рівняння на A_{11}, друге – на A_{21}, і т. д., останнє на A_{n1} і додамо всі ці рівняння. Ми одержимо рівняння

$$\begin{aligned}(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \cdots \\ + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.\end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням теорем 3.1, 3.2, маємо

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \tag{3.2}$$

де $\det A_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$, де A_1 – матриця, яка одержується із A заміною першого стовпця стовпцем вільних членів.

Аналогічно (3.2), одержуємо

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \qquad k = 1,2,\dots,n, \tag{3.3}$$

де $\det A_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}$, де A_k – матриця, яка одержується із A заміною k-го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули (3.3) називаються *формулами Крамера*.

Зауваження 3.1. Із того, що $\det A = 0$, взагалі кажучи, не випливає, що система (3.1) не має розв'язків. Докладніше це буде досліджено пізніше.

Вправи

1. Знайти визначник матриці A, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Лекція 4. Загальна система лінійних рівнянь (СЛР). Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – матриця коефіцієнтів системи, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – невідомі, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ – вільні члени. Матриця $(A|\boldsymbol{b})$, де $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ називається розширеною матрицею.

Розв'язком системи (3.1) називається будь-яка сукупність значень невідомих $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв'язати СЛР – це знайти всі розв'язки або довести, що їх немає.

Означення 4.1. *СЛР сумісна, якщо вона має хоча б один розв'язок, у противному випадку вона несумісна.*

Означення 4.2. *СЛР визначена, якщо вона має єдиний розв'язок, якщо більше одного розв'язку, то вона невизначена.*

Означення 4.3. *СЛР однорідна, якщо* $b_k = 0$*,* $k = 1, \dots, m$.

Зауважимо, що однорідна СЛР завжди має розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,…, $x_n = 0$.

Означення 4.4. *Дві СЛР еквівалентні, якщо множини їх розв'язків однакові.*

Означення 4.5. *Провідним елементом (ПЕ) ненульового рядка називається його перший ненульовий елемент.*

Наприклад, у рядку $(0 \quad \dots \quad 0 \quad a_j \neq 0 \quad \dots)$ провідний елемент a_j.

Означення 4.6. *Матриця називається східчастою, якщо*

a) *номери ПЕ-тів її ненульових рядків утворюють зростаючу послідовність;*
b) *всі нульові рядки стоять після ненульових.*

Теорема 4.1. *Використовуючи елементарні перетворення рядків, будь-яку матрицю* $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ *можна звести до східчастого виду.*

Доведення. Якщо матриця нульова, то вона східчаста. Інакше, нехай j номер першого ненульового стовпця. Переставляючи, якщо потрібно, рядки можна досягти, щоб $a_{1j} \neq 0$. Віднімаючи перший рядок із наступних з відповідними коефіцієнтами доб'ємось рівності нулю всіх інших коефіцієнтів у j-му стовпці. Далі здійснюємо такі ж дії над матрицею

$A_1 = \begin{pmatrix} a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ і т. д. Продовжуючи цю процедуру, зрештою, зведемо матрицю A до східчастого виду.

Означення 4.7. *Покращений східчастий вид матриці має така східчаста матриця, у якої*

a) *всі ПЕ-ти дорівнюють одиниці;*
b) *кожен ПЕ єдиний ненульовий елемент свого стовпця.*

Очевидно, що використовуючи елементарні перетворення рядків, будь-яку східчасту матрицю можна звести до покращеного східчастого виду (переконайтесь!)

Означення 4.8. *Через* r_k *позначимо* k*-тий рядок СЛР,* $k = 1,2,\dots,m$. *Елементарні перетворення над СЛР:*

Тип 1. $r_j' = r_j + \lambda r_i,\ i \neq j$.

Тип 2. $r_i \leftrightarrow r_j$.

Тип 3. $r_i' = \lambda r_i,\ \lambda \neq 0$.

Теорема 4.2. *Якщо СЛР одержана із іншої СЛР елементарними перетвореннями, то ці системи еквівалентні.*

Доведення. Покажемо, що якщо $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ – розв'язок СЛР, то він залишиться розв'язком і після застосування елементарних перетворень.

Дійсно, для типу 1, якщо $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n \equiv b_i$ та $a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n \equiv b_j$, то й $(a_{j1} + \lambda a_{i1})\alpha_1 + (a_{j2} + \lambda a_{i2})\alpha_2 + \cdots + (a_{jn} + \lambda a_{in})\alpha_n \equiv b_j + \lambda b_i$.

Для типів 2 та 3 еквівалентність систем очевидна.

Навпаки, покажемо, що будь-який розв'язок нової СЛР, одержаної після застосування елементарних перетворень до вихідної СЛР, є розв'язком цієї вихідної СЛР. Для цього розглянемо обернені до елементарних перетворень.

Тип 1. $r_j' = r_j + \lambda r_i$, $i \neq j$, обернене $r_j' = r_j - \lambda r_i$.

Тип 2. $r_i \leftrightarrow r_j$, обернене таке ж $r_i \leftrightarrow r_j$ (інволюція)

Тип 3. $r_i' = \lambda r_i$, $\lambda \neq 0$, обернене $r_i' = r_i/\lambda$.

Отже, обернене перетворення типу k є знов перетворення типу k, тобто будь-який розв'язок нової СЛР є розв'язком вихідної СЛР.

Розв'язування СЛР методом Гауса

Метод Гаусса – це така послідовність дій:

Дія 1. Використовуючи елементарні перетворення рядків звести розширену матрицю до покращеного східчастого вигляду.

Дія 2. Якщо один із ПЕ знаходиться у стовпці із вільних членів, то СЛР несумісна. Дійсно, така СЛР для деякого k $(1 \leq k \leq m)$ містить рівняння

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_k \neq 0.$$

Таке рівняння не має розв'язків, а, отже, вся СЛР не має розв'язків.

Дія 3. Інакше, змінні, що знаходяться при ПЕ називаємо головними, а всі інші – вільними. І виражаємо головні змінні через вільні знизу вгору.

Приклад Розв'язати СЛР з розширеною матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

Дія 1. Матриця зводиться до покращеного східчастого вигляду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -20 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Дія 3. Змінні x_1, x_2 – головні, а x_3 – вільна.

Відповідь: $x_2 = 7x_3, x_1 = 10x_3 + 1, x_3 \in \mathbb{R}$.

Східчасту матрицю будемо називати *строго східчастою*, якщо всі її східці мають довжину одиниця.

Наслідки із метода Гауса

1. СЛР сумісна тоді і тільки тоді, коли при зведенні розширеної матриці до східчастого виду в останньому стовпці немає ПЕ.
2. СЛР визначена тоді і тільки тоді, коли вона сумісна і після зведення до східчастого виду матриця коефіцієнтів строго східчаста. У цьому випадку немає вільних змінних.
3. Будь-яка СЛР або несумісна, або визначена, або має нескінченно багато розв'язків.
4. Якщо число рівнянь менше ніж числа рівнянь, то СЛР або несумісна, або має нескінченно багато розв'язків. Зокрема, якщо в однорідній СЛР число рівнянь менше числа невідомих, то вона має нескінченно багато розв'язків.

Вправа

Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Лекція 5. Лінійні простори. Арифметичний простір

Означення 5.1. *Лінійний (векторний) простір над полем $\mathbb{R}$ називається множина $\mathbb{L}$ елементів (їх будемо називати векторами), на якій задано дві операції:*

a) додавання $\forall a, b \in \mathbb{L}$: $(a, b) \to a + b \in \mathbb{L}$;

b) множення на число $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall a \in \mathbb{L} : (\lambda, a) \to \lambda a \in \mathbb{L}$, *причому ці операції задовольняють умови*

1. $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{L}$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{L}$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{L}: \forall a \in \mathbb{L}, a + 0 = a$;
4. $\forall a \in \mathbb{L}\ \exists a' \in \mathbb{L}: a + a' = 0$;
5. $\forall a \in \mathbb{L}\ 1a = a$;
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{L}\ \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{L}\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall a, b \in \mathbb{L}\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

Означення 5.2. *Підпростором лінійного простору $\mathbb{L}$ називається множина його елементів $S \subset \mathbb{L}$, яка сама є лінійним простором відносно тих же операцій додавання і множення на число*.

Лема 5.1. *Підмножина $S \subset \mathbb{L}$ є підпростором лінійного простору $\mathbb{L}$, якщо виконуються умови:*

1. $\mathbf{0} \in S$;
2. $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 \in S, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in S$.

Доведення. Із умови 1 випливає, що $S \neq \emptyset$. А оскільки $S \subset \mathbb{L}$, то із умови 2 випливає виконання аксіом 1–8 лінійного простору.

Означення 5.3. *Арифметичним простором над дійсними числами називається множина* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}, n \in \mathbb{N}$ з операціями:

1) $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$,
2) $\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$.

Вправа 5.1. Довести, що арифметичний простір є лінійним простором над $\mathbb{R}$.

Елементи арифметичного (як лінійного) простору $\mathbb{R}^n$ також будемо називати векторами і позначати малими латинськими літерами, наприклад, $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Вектор $(0,0, \cdots, 0)$ називається нульовим і позначається $\mathbf{0} = (0,0, \cdots, 0)$.

Означення 5.4. *Лінійною комбінацією векторів* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{L}$ *з коефіцієнтами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$*, де* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *– дійсні числа, називається вектор*

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n.$$

Означення 5.5. *Систему векторів* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{L}$ *називають лінійно незалежною (ЛНЗ), якщо з рівності*

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$

Якщо ж існує набір $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$*, не всі з яких дорівнюють нулю і*

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

то систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ *називають лінійно залежною (ЛЗ).*

Приклади Для $\mathbb{R}^1$ вектор $\boldsymbol{a} = (x_1)$ лінійно залежний, якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Для $\mathbb{R}^2$ вектори $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ ЛЗ, тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти пропорційні.

Легко бачити, що якщо система векторів містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна (переконатись!)

Лема 5.2. *Вектори* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ *при* $n \geq 2$ *лінійні залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один вектор із них є лінійною комбінацією решти векторів.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ при $n \geq 2$ лінійні залежні. Тоді існує k $(1 \leq k \leq n)$ таке, що $\lambda_k \neq 0$, причому $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, звідки $-\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_k.$

Навпаки, якщо для якогось k $\boldsymbol{a}_k = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + \lambda_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n.$ то

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + (-1) \boldsymbol{a}_k + \lambda_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

тобто $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ – лінійні залежні.

Лема 5.3. *Нехай вектор* $\boldsymbol{a}$ *є лінійною комбінацією векторів* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$*. Така лінійна комбінація єдина тоді і тільки тоді, коли вектори* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ *лінійно незалежні.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$. Якщо вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ лінійно залежні, то існують не всі нульові числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ такі, що $\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$. Тоді $\boldsymbol{a} = (\lambda_1 + \mu_1)\boldsymbol{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)\boldsymbol{a}_n \neq \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$. Навпаки, якщо існують два різні розклади $\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ та $\boldsymbol{a} = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$. Розглянемо їх різницю, маємо $\boldsymbol{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{a}_n$, причому за припущенням не всі $\lambda_i - \mu_i$ дорівнюють нулеві, тобто вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ лінійно залежні.

Означення 5.6. *Нехай $N = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ деякий непорожній набір векторів із лінійного простору $\mathbb{L}$. Лінійною оболонкою множини N називають такі лінійні комбінації*

$$\langle N \rangle = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n | \boldsymbol{a}_i \in N, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Лема 5.4. *Нехай N деякий непорожній набір векторів із лінійного простору $\mathbb{L}$. Тоді лінійна оболонка $\langle N \rangle$ є підпростором $\mathbb{L}$.*

Доведення. $\forall \boldsymbol{a} \in \langle N \rangle$, $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in \langle N \rangle$, то умова 1 леми 5.1 виконується. Далі, $\forall \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \langle N \rangle$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ покажемо, що $\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 \in \langle N \rangle$. Із того, що $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \langle N \rangle$ випливає, що існують числа $\mu_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ такі, що $\boldsymbol{b}_1 = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$ та $\boldsymbol{b}_2 = \gamma_1 \boldsymbol{a}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \gamma_n \boldsymbol{a}_n$. Звідки

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 = (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \gamma_1)\boldsymbol{a}_1 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \gamma_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\lambda_1 \mu_n + \lambda_2 \gamma_n)\boldsymbol{a}_n \in \langle N \rangle.$$

Означення 5.7. *Кажуть, що лінійний підпростір $\mathbb{V}$ лінійного простору $\mathbb{L}$ породжується набором векторів $N \subset \mathbb{L}$, якщо $\mathbb{V} = \langle N \rangle$.*

Лема 5.5. *Нехай лінійний підпростір $\mathbb{V}$ породжується m векторами із лінійного простору $\mathbb{L}$. Тоді будь-який набір із l ($l > m$) векторів у $\mathbb{V}$ лінійно залежні.*

Доведення. Нехай $\mathbb{V} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ і $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_l \in \mathbb{V}$. Тоді

$$\boldsymbol{b}_1 = \mu_1^1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2^1 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_m^1 \boldsymbol{a}_m,$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \mu_1^2 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2^2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_m^2 \boldsymbol{a}_m,$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{b}_l = \mu_1^l \boldsymbol{a}_1 + \mu_2^l \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_m^l \boldsymbol{a}_m.$$

Розглянемо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{b}_l = \left(\lambda_1 \mu_1^1 + \cdots + \lambda_l \mu_1^l\right)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (\lambda_1 \mu_m^1 + \cdots + \lambda_l \mu_m^l)\boldsymbol{a}_m.$$

Покажемо, що знайдуться такі $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, не всі з яких нульові і при цьому $\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{b}_l = 0$. Прирівняємо до нуля всі коефіцієнти при $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1,2, \dots, m$. Маємо

$$\begin{cases} \lambda_1 \mu_1^1 + \cdots + \lambda_l \mu_1^l = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1 \mu_m^1 + \cdots + \lambda_l \mu_m^l = 0. \end{cases}$$

Це однорідна СЛР, у якій невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ більше ніж рівнянь. Тому за наслідком 4 із методу Гаусса вона має нескінченно багато розв'язків, зокрема якийсь ненульовий розв'язок, тобто система $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_l$ ЛЗ.

Означення 5.5. *Базисом лінійного простору* $\mathbb{L}$ *називають лінійно незалежну систему з найбільш можливою кількістю векторів. Вектори, що утворюють базис лінійного простору, називаються базисними, а кількість векторів базису називають вимірністю* $\mathbb{L}$.

Очевидно, що якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – базис $\mathbb{L}$, то будь-який вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ є лінійною комбінацією базисних векторів. Дійсно, система векторів $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – ЛЗ, інакше $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ не буде незалежною системою з найбільш можливою кількістю векторів. Тобто знайдуться числа $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, не всі з яких нульові і

$$\lambda\, \boldsymbol{a} + \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

При цьому $\lambda \neq 0$, інакше $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – ЛЗ. Звідки $\boldsymbol{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\boldsymbol{e}_n$.

Приклад Базис арифметичного простору $\mathbb{R}^n$ утворюють вектори $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,\cdots,0)$,…, $\boldsymbol{e}_n = (0,0,\cdots,1)$ (такий базис називають стандартним). Дійсно, ці вектори лінійно незалежні, оскільки із того, що

$$\lambda_1(1,0,\cdots,0) + \lambda_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + \lambda_n(0,0,\cdots,1) = (0,0,\cdots,0)$$

випливає, що $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ і будь-який вектор $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а саме

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1(1,0, \cdots, 0) + x_2(0,1, \cdots, 0) + \cdots + x_n(0,0, \cdots, 1).$$

Вправи

1. Чи є множина векторів із $\mathbb{R}^n$ лінійним простором, якщо операція суми звичайна, а множення вектора $\vec{x}$ на число α визначається так
$$\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} e^{\alpha-1}x_1 \\ \ldots \\ e^{\alpha-1}x_n \end{pmatrix}?$$
2. Довести, що система $1, x^2, \ldots, x^{2n}$ ($x \in \mathbb{R}, n \geq 1$) лінійно незалежна.
3. Нехай множина елементів $\mathbb{L} = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, на якій задані операції –
   a) додавання $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$: $a \oplus b = ab$

   b) множення на число $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \odot a = a^\lambda$.

Довести, що $(\mathbb{L}, \oplus, \odot)$ лінійний простір.

Лекція 6. Однорідні СЛР. Фундаментальна система розв’язків

Розглянемо СЛР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Лема 6.1. *Якщо СЛР* (6.1) *однорідна, то множина її розв’язків є підпростором* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай СЛР (6.1) однорідна, тобто $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Тоді $(0,0, \cdots, 0)$ є розв’язком, а, значить, умова 1 леми 5.1 виконана. Нехай $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ та $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ – розв’язки однорідної СЛР (5.1). Тоді $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ також розв’язок (5.1). Дійсно, для довільного k $(1 \leq k \leq m)$ підставимо ці значення у k-тий рядок, маємо:

$$a_{k1}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1) + \cdots + a_{kn}(\lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n)$$
$$= \lambda_1(a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n) + \lambda_2(a_{k1}y_1 + \cdots + a_{kn}y_n) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0$$
$$= 0.$$

З урахуванням, що k довільне, $\lambda_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ – розв'язок однорідної СЛР (5.1), тобто умова 2 леми 5.1 виконана.

Означення 6.1. *Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) однорідної СЛР називається довільний базис у просторі розв'язків.*

Лема 6.2. *Розмірність розв'язків однорідної СЛР дорівнює числу вільних невідомих.*

Доведення. Нехай $x_{i_1},\ldots, x_{i_k}$ – вільні невідомі. Надаючи вільним змінним значення $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 0,\ldots, x_{i_k} = 0$, тобто прирівнюючи $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right) = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^k$, одержимо розв'язок $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ СЛР. Аналогічно прирівнюючи $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right) = (0,1,\ldots,0)$, одержимо розв'язок $(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ СЛР і т. д., нарешті при $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right) = (0,0,\ldots,1)$ одержимо $\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$. Покажемо, що розв'язки $\left(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right)$, $i = 1, \ldots, k$ є ФСР. Розглянемо рівність $\lambda_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) + \cdots + \lambda_k\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) = \mathbf{0}$. Для i_1 координати маємо

$$1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_1 + \cdots + 0 \cdot \lambda_k = 0,$$

тобто $\lambda_1 = 0$. Аналогічно для $i_2,\ldots, i_k$ координат, тобто $\left(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right)$, $i = 1, \ldots, k$, ЛНЗ. Покажемо, що будь-який розв'язок нашої СЛР є лінійною комбінацією цих k розв'язків.

Дійсно, нехай $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ довільний розв'язок СЛР (5.1). Тоді

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = x_{i_1}^0(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) + x_{i_2}^0(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) + \cdots + x_{i_k}^0\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right).$$

Дійсно, у лівій і правій частинах значення координат $i_2,\ldots, i_k$ однакові. Але $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ розв'язок нашої СЛР та $x_{i_1}^0(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) + x_{i_2}^0(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) + \cdots + x_{i_k}^0\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$ також розв'язок нашої СЛР (як лінійна комбінація розв'язків) і у цих розв'язків значення вільних змінних однакові, звідки випливає, що і значення головних змінних однакові, тому що головні змінні однозначно визначаються вільними. Отже, $\left(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i\right)$, $i = 1, \dots, k$, утворюють базис.

Розв'язки СЛР як лінійні многовиди арифметичного простору

Нехай $\mathbb{V}$ підпростір лінійного простору $\mathbb{L}$.

Означення 6.2. *Лінійним многовидом в* $\mathbb{L}$ *називається підмножина* $M \subset \mathbb{L}$, *для якої знайдеться вектор* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ *такий, що* $M = \boldsymbol{a} + \mathbb{V} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}\}$.

Припускається, що $\emptyset$ *є лінійним многовидом в* $\mathbb{L}$

Твердження 6.1. *Для довільної СЛР з* n *невідомими множина її розв'язків* $\mathbb{U}$ *є лінійним многовидом арифметичного простору* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Розглянемо СЛР (6.1) і асоційованою з нею однорідну СЛР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Якщо СЛР (6.1) несумісна, то $\mathbb{U} = \emptyset$ і є многовидом. Якщо СЛР (6.1) сумісна, то зафіксуємо якийсь її розв'язок $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Покажемо, що розв'язки (6.1) $\mathbb{U} = \boldsymbol{a} + \mathbb{V}$, де $\mathbb{V}$ – множина розв'язків (6.2). Для цього потрібно показати, що:

a) якщо $\boldsymbol{v}$ – розв'язок (6.2), то $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}$ – розв'язок (6.1);
b) якщо $\boldsymbol{u}$ – розв'язок (6.1), то $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}$ – розв'язок (6.2).

Перевірка цих тверджень очевидна і залишається для читача.

Ранг матриці

Означення 6.3. *Рангом системи векторів* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ *лінійного простору* $\mathbb{L}$ *називається розмірність їх лінійної оболонки* $dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

Позначається $rank\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$. Легко бачити, що $rank\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ – це найбільш можливе число лінійно незалежних векторів системи $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$.

Вправи Який ранг системи векторів:

a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,0), \boldsymbol{a}_2 = (0,1)$?

b) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{a}_2 = (0,2,2), \boldsymbol{a}_2 = (3,0,0)$?

Означення 6.4. *Набори векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ та $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$ у лінійному просторі $\mathbb{L}$ називаються еквівалентними, якщо будь-який вектор першого набору є лінійною комбінацією векторів другого набору і навпаки, тобто $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m \rangle$.*

Твердження 6.2. *Елементарні перетворення рядків із $\mathbb{R}^n$ не змінюють ранг системи векторів.*

Доведення. Якщо рядки $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ одержані із $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ елементарними перетвореннями рядків, то вектори $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ є лінійними комбінаціями векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$, тобто $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k \rangle$ і за означенням їх ранги рівні. Застосовуючи обернені перетворення, виразимо вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ через вектори $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k$. А, отже, системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ та $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ еквівалентні, тобто їх ранги рівні.

Застосовуючи ці міркування до транспонованої матриці маємо твердження : *елементарні перетворення стовпців не змінюють ранг системи стовпців.*

Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. У неї є m рядків.

Означення 6.5. *Рангом матриці А за рядками (рядковий ранг) називається ранг системи її рядків як векторів у $\mathbb{R}^n$.*

Теорема 6.1. *Ранг матриці А за рядками дорівнює числу ненульових рядків у її східчастому вигляді.*

Доведення. За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю до східчастого вигляду. Легко бачити, що рядкрвий ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків. Позначимо через $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_k'$ ненульові рядки цієї матриці. Нехай $i_1, \ldots, i_k$ номери стовпців, у яких знаходяться відповідні провідні елементи. Розглянемо i_1-шу координату рядка у якому міститься перший провідний елемент в рівності $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1' + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2' + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k' = \mathbf{0}$. Маємо $\lambda_1 c + \lambda_2 0 + \cdots + \lambda_k 0 = 0$, де $c \neq 0$ значення провідного елемента у першому рядку. Звідки $\lambda_1 = 0$. Аналогічно показується, що $\lambda_i = 0$, для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$. Тобто система векторів $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_k'$ лінійно незалежна. Оскільки або більше векторів немає або всі інші вектори нульові, то k дорівнює рангу матриці A за рядками.

Означення 6.6. *Рангом матриці A за стовпцями (стовпцевий ранг) називається ранг системи її стовпців у* $\mathbb{R}^m$.

Теорема 6.2. *Ранг матриці A за рядками дорівнює рангу матриці A за стовпцями і це число називається рангом матриці і позначається* $rankA$.

Доведення. Покажемо, що елементарні перетворення рядків на змінює лінійних співвідношень між стовпцями.

Пояснення. Розглянемо приклад

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Між стовпцями $\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ та $\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$ як було співвідношення $5\boldsymbol{c}_1 - 2\boldsymbol{c}_2 = \mathbf{0}$, так і лишилось після елементарного перетворення рядків $5\boldsymbol{c}_1' - 2\boldsymbol{c}_2' = \mathbf{0}$, де $\boldsymbol{c}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2' = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Нехай $\boldsymbol{c}_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n$ – стовпці матриці A. Тоді $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{c}_i = 0$ означає, що λ_i, $i = 1, \ldots, n$ є розв'язком СЛР з матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, тобто

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

Але елементарні перетворення рядків СЛР не змінюють її розв’язків, тому лінійні співвідношення стовпців не зміняться. Отже, властивість системи векторів $\boldsymbol{c}_{i_m}, m = 1, \dots, k$ бути залежними чи незалежними не змінюється при елементарних перетворення рядків.

Нехай A' покращений східчастий вид матриці A і i_l, $l = 1, \dots, k$ – номери стовпців, де стоять провідні елементи. Тоді стовпці мають вигляд

$$\boldsymbol{c}_{i_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_{i_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{c}_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$l = 1, \dots, k$ матриці A' є лінійно незалежні і через них лінійно виражаються інші стовпці, оскільки, якщо у цих стовпцях видалити нулі, що стоять на місцях $i = k + 1, \dots, m$, тобто розглянути стовпці $\boldsymbol{c}'_{i_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}'_{i_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,…, $\boldsymbol{c}'_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, то ці стовпці утворюють стандартний базис простору $\mathbb{R}^k$. Тобто система $\boldsymbol{c}_{i_1}$, $\boldsymbol{c}_{i_2}$,…, $\boldsymbol{c}_{i_k}$ містить максимальну кількість лінійно незалежних векторів.

Отже, зведемо елементарними перетвореннями матрицю A до східчастого виду A'. У результаті цього маємо – ранг матриці A' за рядками дорівнює кількості ненульових рядків, а ранг матриці A за стовпцями дорівнює кількості стовпців, де стоять провідні елементи, але число ненульових рядків дорівнює числу провідних елементів рядків. Отже, ранг матриці A' за рядками дорівнює рангу матриці A' за стовпцями.

Рівність $rankA = rankA'$ завершує доведення теореми.

Вправи

1. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти загальний розв'язок та ФСР для однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + \ \ 4x_3 + \ \ 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + \ \ 5x_3 + \ \ 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Лекція 7. Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій визначеності СЛР

Теорема 7.1. *Розмірність простору розв'язків однорідної СЛР з матрицею коефіцієнтів A дорівнює* $n - rankA$, *де* n *– число невідомих.*

Доведення. Нехай $\mathbb{V}$ – множина розв'язків однорідної СЛР. Тоді за лемою 6.2 розмірність розв'язків цієї СЛР дорівнює числу вільних невідомих. Але число вільних невідомих дорівнює числу всіх невідомих мінус число головних невідомих, а число головних невідомих дорівнює числу провідних елементів, яке у свою чергу за теоремою 6.1 дорівнює рангу матриці.

Розглянемо СЛР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7.1}$$

Позначимо через $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ матрицю коефіцієнтів, а через $(A|\boldsymbol{b})$ – розширену матрицю СЛР (7.1), тобто

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Критерій сумісності СЛР Кронекера-Капеллі

Теорема 7.2. (Кронекера-Капеллі) *Для того щоб СЛР була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці* $(A|\boldsymbol{b})$ *дорівнював рангу матриці коефіцієнтів А.*

Доведення. Необхідність. Нехай СЛР (7.1) сумісна, тобто існують числа $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ такі, що

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases}$$

Віднімемо від останнього стовпця матриці $(A|\boldsymbol{b})$ перший її стовпець, помножений на α_1, другий, помножений на α_2, і т. д., нарешті n-й, помножений на α_n, одержимо матрицю

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $rankA = rankC = rank(A|\boldsymbol{b})$, то необхідність доведена.

Достатність. Нехай $rankA = rank(A|\boldsymbol{b}) = r$.

Це означає найбільш можливе число лінійно незалежних стовпців системи $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1,2, \ldots, n$ дорівнює найбільш можливому числу лінійно незалежних стовпців цієї ж системи з приєднаним до неї вектором $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. А це означає, що вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через вектори $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1,2, \ldots, n$. Дійсно, якщо для якихось чисел $\lambda, \lambda_i, i = 1, \ldots, r$, не всі з яких дорівнюють нулеві, та r лінійно незалежних стовпців $\boldsymbol{c}_i, i = 1, \ldots, r$ (які ми можемо обрати за припущенням), маємо

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{c}_i + \lambda \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

і при цьому $\lambda = 0$, то одержуємо, що вектори $\boldsymbol{c}_i$, $i = 1, \dots, r$ лінійно залежні. Ця суперечність завершає доведення теореми.

Критерій визначеності СЛР

Теорема 7.3. *СЛР (7.1) визначена тоді і тільки тоді, коли виконана умова:*

$$rankA = rank(A|\boldsymbol{b}) = n.$$

Доведення. Нехай СЛР (7.1) визначена, це еквівалентно тому, вона має розв'язок і він єдиний, тобто немає вільних невідомих, а це еквівалентно виконанню умов: $rankA = rank(A|\boldsymbol{b})$ та число східців у східчастому вигляді A' матриці A дорівнює n, а значить n – це число ненульових рядків A', звідки за теоремою 6.1 $rankA = n$.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

Цю СЛР можна записати у матричному вигляді

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{7.3}$$

де $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Якщо існує A^{-1}, то помноживши обидві частини (7.3) зліва на A^{-1}, одержимо

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Розглянемо способи обчислення оберненої матриці. Позначимо через A_{ij} алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, $1 \le i, j \le n$.

Розглянемо матрицю, яка складається із алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці де $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

При транспортуванні цієї матриці одержимо матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо $detA \neq 0$, то існує і $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Означення 7.1. *Матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ називається невиродженою, якщо $rankA = n$.*

Елементарні матриці

Кожен тип елементарних перетворень матриці можна здійснити за допомогою множення на відповідні елементарні матриці:

Тип 1 $U_{ij}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ldots\lambda & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, де λ заходиться в i-му рядку та j-му стовпцю.

Тоді для матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$, маємо

$U_{ij}^{\lambda}A$: $r_i' = r_i + \lambda r_j$, тобто до i-го рядка додається j-тий, помножений на λ;

AU_{ij}^{λ}: $c_j' = c_j + \lambda c_i$, тобто до j-го стовпця додається i-тий, помножений на λ.

Тип 2. $U_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, де одиниці з i-го та j-го рядків переносяться на допоміжну діагональ i-го та j-го стовпців, а на їх місці ставляться нулі.

$U_{ij}A$: $r_i \leftrightarrow r_j$, міняються місцями рядки;

AU_{ij}: $c_i \leftrightarrow c_j$, міняються місцями стовпці.

Тип 3. $U_i^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \dots & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, де $\lambda \neq 0$ стоїть в i-му рядку діагональної матриці, а всі інші діагональні елементи одиниці.

$U_i^\lambda A$: $r_i' = \lambda r_i$, тобто i-тий рядок множиться на λ;

AU_i^λ: $r_i' = \lambda r_i$, тобто i-тий стовпець множиться на λ.

Оскільки кожне елементарне перетворення має обернене, яке у свою чергу є елементарним перетворенням, то для оберненого перетворення існує матриця обернена до прямого елементарного перетворення.

Вправа Довести, що $\left(U_{ij}^\lambda\right)^{-1} = U_{ij}^{-\lambda}$; $\left(U_{ij}\right)^{-1} = U_{ij}$; $\left(U_i^\lambda\right)^{-1} = U_i^{1/\lambda}$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень

Нехай потрібно знайти обернену до $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ матрицю A^{-1}.

Виписуємо матрицю $(A|I)$ розміру $n \times 2n$. За допомогою елементарних перетворень стараємось на місці матриці A одержати одиничну матрицю. Якщо це вдалось, то на місці матриці I одержимо A^{-1}, тобто

$$(A|I) \sim (I|A^{-1}).$$

Обґрунтування алгоритму. Нехай A зводиться до одиничного вигляду, тобто існує набір елементарних матриць U_i, $i = 1, \dots, r$, такі, що

$$U_r U_{r-1} \cdots U_1 A = I. \qquad (7.4)$$

При здійсненні тих же перетворень справа над матрицею I одержимо матрицю

$$U_r U_{r-1} \cdots U_1 I = U_r U_{r-1} \cdots U_1.$$

Але ж з урахуванням (7.4) матриця $U_r U_{r-1} \cdots U_1$ і є оберненою до A.

Якщо не існує елементарних перетворень таких, що $A \sim I$. Це має місце, коли матрицю A не зводиться до строго східчастого вигляду, а для квадратної матриці A таке відбувається, коли східчастому вигляді цієї матриці є нульові рядки. Отже, після застосування елементарних перетворень

$$U_r U_{r-1} \cdots U_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (7.4)$$

тобто маємо знизу хоча б один нульовий рядок. Припустимо, що при цьому існує обернена до A матриця A^{-1}. Тоді помноживши (7.4) справа на $A^{-1}U_1^{-1} \dots U_{r-1}^{-1}U_r^{-1}$, одержимо

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A^{-1}U_1^{-1} \dots U_{r-1}^{-1}U_r^{-1}.$$

У матриці справа в останньому рядку всі елементи дорівнюють нулю, а в одиничній матриці зліва немає рядка з нульовим рядком. Маємо суперечність, яка виникла через припущення існування оберненої до A матриці A^{-1}.

Підсумовуючи вищенаведене, робимо висновок: *Матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ має обернену A^{-1}, якщо вона невироджена*, а це для матриці A означає, що $detA \neq 0$. (Переконатись!)

Лема 7.1. *Якщо $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – довільна матриця, а U – елементарна матриця, то*

$$\det(UA) = \det(U)\det(A). \qquad (7.5)$$

Доведення. Для матриці U типу 1 очевидно, скільки $\det(U) = 1$ та $\det(UA) = \det A$.

Для матриці U типу 2 маємо $\det(U) = -1$, а $\det(UA) = -\det(A)$, тобто (7.5) має місце.

Для матриці U типу 3 маємо $\det(U) = \lambda$, а $\det(UA) = \lambda \det(A)$, отже, (7.5) також виконується.

Теорема 7.4. *Нехай A та B – матриці $n \times n$. Тоді*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{7.6}$$

Доведення. **Випадок 1:** Матриця A – вироджена і $\det(AB) = 0$, то (7.6) має місце, оскільки $\det(A) = 0$.

Випадок 2: Матриці A та B – вироджені і $\det(AB) \neq 0$. Звідки випливає, що AB невироджена, а, отже, існує $(AB)^{-1}$, тобто

$$AB(AB)^{-1} = A[B(AB)^{-1}] = I.$$

Отже, матриця A має обернену матрицю $B(AB)^{-1}$, що неможливо, оскільки вона вироджена, а це означає, що випадок 2 неможливий.

Випадок 3: Матриці A та B – невироджені. Із (7.4) маємо $A = U_1^{-1} \dots U_{r-1}^{-1} U_r^{-1}$, тобто

$$AB = U_1^{-1} \dots U_{r-1}^{-1} U_r^{-1} B.$$

Звідки, з урахуванням леми 7.4, маємо

$$\det(AB) = \det(AB) = \det(U_1^{-1})\det(U_2^{-1} \dots U_{r-1}^{-1} U_r^{-1} B) = \cdots$$
$$= \det(U_1^{-1})\det(U_2^{-1}) \dots \det(U_r^{-1})\det(B) = \det(A)\det(B).$$

Вправи

1. Дослідити на сумісність СЛР

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + \ 10x_3 + \ 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + \ 5x_3 + \ 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 4. \end{cases}$$

2. Дослідити на визначеність СЛР

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + \ \ 10x_3 - \ \ 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -9 \\ 5x_1 - 4x_2 + \ \ 5x_3 + \ \ 3x_4 = 9 \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 11x_4 = -8. \end{cases}$$

3. Обчислити обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Лекція 8. Ізоморфізм лінійних просторів. Перетворення координат

Означення 8.1. *Нехай $\mathbb{L}$ та $\mathbb{V}$ два лінійні простори над $\mathbb{R}$. Відображення $\varphi: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ називається <u>ізоморфізмом</u>, якщо виконуються умови:*

1. *φ – взаємно однозначне, тобто $\forall x, y \in \mathbb{L}$: $x \neq y$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ та $\forall z \in \mathbb{V}$, $\exists x \in \mathbb{L}$: $\varphi(x) = z$.*
2. *$\forall x, y \in \mathbb{L}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ (лінійність).*

Легко бачити, що взаємно однозначне відображення $\varphi: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ оборотне, тобто існує $\varphi^{-1}: \mathbb{V} \to \mathbb{L}$, яке у свою чергу є взаємно однозначним (переконатись!)

Означення 8.2. *Лінійні простори $\mathbb{L}$ та $\mathbb{V}$ ізоморфні, якщо існує ізоморфізм $\varphi: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$.*

Позначається $\mathbb{L} \cong \mathbb{V}$.

Теорема 8.1. *Нехай $\mathbb{L}$ – n-вимірний лінійний простір. Тоді $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^n$.*

Доведення. Нехай e_i, $i = 1, \dots, n$ – базис в $\mathbb{L}$. Тоді $\forall x \in \mathbb{L}$ є лінійною комбінацією векторів цього базису $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$. Нехай $\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Неважко переконатись, що φ – ізоморфізм, дійсно, φ є взаємно однозначним відображенням, оскільки кожен вектор $x \in \mathbb{L}$ взаємно однозначно визначається своїми координатами.

Далі, для $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, маємо

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\, e_i\right) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$
$$= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(y_1, \dots, y_n) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

Лема 8.1. *Нехай* $\mathbb{L} \cong \mathbb{V}$, $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$. *Тоді* $\mathbb{L} \cong \mathbb{W}$.

Доведення. Із того, що $\mathbb{L} \cong \mathbb{V}$ та $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ випливає, що існують ізоморфізми $\varphi\colon \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ та $\psi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Нехай $\phi\colon \mathbb{L} \to \mathbb{W}$ таке відображення, що $\forall x \in \mathbb{L}\ \phi(x) = \psi\big(\varphi(x)\big)$. Легко бачити, що ϕ – ізоморфізм. Те, що ϕ взаємно однозначне відображення переконайтесь самостійно. Покажемо лінійність: $\forall x, y \in \mathbb{L}$,
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \psi\big(\varphi(\lambda x + \mu y)\big) = \psi\big(\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)\big) = \lambda\psi\big(\varphi(x)\big) + \mu\psi\big(\varphi(y)\big)$$
$$= \lambda\phi(x) + \mu\phi(y).$$

Теорема 8.1. *Два лінійні простори* $\mathbb{L}$ *та* $\mathbb{V}$ *ізоморфні тоді і тільки тоді, коли*

$$dim\mathbb{L} = dim\mathbb{V}.$$

Доведення. Достатність. Якщо $dim\mathbb{L} = dim\mathbb{V} = n$, то $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^n$ і $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^n$, а значить, за лемою 8.1 $\mathbb{L} \cong \mathbb{V}$. Необхідність. Нехай $\mathbb{L} \cong \mathbb{V}$ і $dim\mathbb{V} = n$, тоді $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^n$. За лемою 8.1 $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^n$. Припустимо, що $dim\mathbb{L} = m \neq n$, тоді $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^m$, звідки за лемою 8.1 $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, а це не так, оскільки $m \neq n$. Дійсно, якщо, наприклад, $m < n$, то, оскільки базисні вектори $\mathbb{R}^n$ лінійно незалежні, у просторі $\mathbb{R}^m$ існували б n лінійно незалежних векторів – образів базисних векторів простору $\mathbb{R}^n$, що неможливо. Тут використано те, що образом $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$є $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ (переконайтесь!)

Зауваження. Із теореми 8.1 випливає, що замість будь-якого n-вимірного лінійного простору можна, без втрати загальності, вивчати арифметичний простір $\mathbb{R}^n$.

Перехід до нового базису

Нехай в лінійному просторі $\mathbb{L}$ є два базиси e_1, e_2,…, e_n та e'_1, e'_2,…, e'_n. Перший базис будемо називати старим, а другий – новим. Розкладемо кожен вектор нового базису за векторами старого:

$$e'_j = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \dots + c_{nj}x_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, e_i, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{8.1}$$

Матриця $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$. називається *матрицею переходу* від базису e_1, e_2,…, e_n до базису e'_1, e'_2,…, e'_n. Матриця C – невироджена інакше її рядки лінійно залежні, а, отже, і вектори базису e'_1, e'_2,…, e'_n лінійно залежні, що неможливо. Отже, визначник матриці C не дорівнює нулеві.

Навпаки, якщо $detC \neq 0$, тобто її ранг дорівнює n, тоді її стовпці лінійно незалежні, а значить, і вектори e'_1, e'_2,…, e'_n – лінійно незалежні, отже, утворюють базис.

Таким чином, матрицею переходу може бути будь-яка невироджена матриця.

Зауваження 8.1. Легко бачити, що j-тий стовпець матриці переходу C складається із координат базисного вектора e'_j нового базису в старому базисі.

Введемо позначення

$$\bar{E} = (e_1, \dots, e_n), \qquad \bar{E}' = (e'_1, \dots, e'_n).$$

Тоді (8.1) можна записати у вигляді

$$\bar{E}' = \bar{E}C.$$

Оскільки C – невироджена, то існує C^{-1}, звідки

$$\bar{E} = \bar{E}'\, C^{-1},$$

тобто перехід від нового базису до старого здійснюється за допомогою оберненої матриці до матрицею переходу від старого базису до нового.

Зміна координат при переході до нового базису

Розглянемо як змінюються координати вектора при переході від одного базису до іншого. Нехай $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ у старому базисі та $x' = \sum_{i=1}^{n} x_i'\, e_i'$. У векторно-матричній формі це записується так

$$x = \bar{E}\boldsymbol{x}, \qquad x = \bar{E}'\boldsymbol{x}', \tag{8.2}$$

де $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

З урахуванням (8.2), маємо

$$x = \bar{E}'\boldsymbol{x}' = \bar{E}C\boldsymbol{x}', \qquad x = \bar{E}\boldsymbol{x}$$

Тобто $\bar{E}C\boldsymbol{x}' = \bar{E}\boldsymbol{x}$, звідки

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{x}' = C^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Отже, вектори базису і координати перетворюються по різному: перетворення від старих до нових координат, у яких бере участь матриця переходу називаються *коваріантними*, а перетворення, у яких бере участь обернена матриця до матриці переходу, називаються *контраваріантними*. Отже, координати вектора є контраваріантними, оскільки перетворення від старих координат до нових здійснюються за допомогою оберненої матриці.

Приклад Нехай

$$\begin{cases} e_1 = 2e_1' + e_2' \\ e_2 = 3e_1' - \dfrac{3}{2}e_2', \end{cases}$$

і вектор x за старим базисом розкладається так

$$x = 2e_1 - 6e_2.$$

Легко бачити, що у цьому випадку $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, а обернена матриця до матриці переходу має вигляд

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо координати вектораx в новому базисі. Маємо

$$\boldsymbol{x}' = C^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 11 \end{pmatrix},$$

тобто $x = -14e_1' + 11e_2'$.

Лінійні функціонали

Нехай $\mathbb{L}$ – лінійний простір над $\mathbb{R}$.

Означення 8.3. *Лінійним функціоналом на лінійному просторі* $\mathbb{L}$ *називається відображення* $f: \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, *яке задовольняє властивості:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{L}\; f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{L}$, , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Нехай e_1, e_2,…, e_n – базис в $\mathbb{L}$, тоді $\forall x \in \mathbb{L}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$. Маємо

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i).$$

$f_i = f(e_i),\; i = 1, \dots, n$, називаються координатами лінійного функціоналу f.

Приклад У векторному просторі V^3 зафіксуємо вектор $\vec{a} \in V^3$. Розглянемо відображення $f: V^3 \to \mathbb{R}$, де $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x})$. З урахуванням властивостей скалярного добутку $f(\vec{x})$ – лінійний функціонал.

Вияснимо як залежать координати лінійного функціоналу від базису. Нехай новий базис виражається через старий так:

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, e_i, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Координати функціоналу f у новому базисі позначимо $f_i' = f(e_i'),\ i = 1, \dots, n,$ Тоді

$$f(e_i') = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} f(e_i), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Тобто

$$f_i' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} f_i, \qquad j = 1, \dots, n,$$

або у матричній формі

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f}C,$$

де $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n), \boldsymbol{f}' = (f_1', \dots, f_n').$

Отже, нові координати f через старі виражаються за допомогою матриці переходу від базису e_1, e_2,…, e_n до базису e_1', e_2',…, e_n' і значить, координати функціоналу є коваріантними величинами.

Вправи

1. Чи є лінійним функціоналом відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, де $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, числа $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, фіксовані?
2. У векторному просторі V^3 зафіксуємо вектор $\vec{a} \in V^3$. Розглянемо відображення $f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}]$, де $[\cdot,\cdot]$ – векторний добуток. Чи є $f(\vec{x})$ лінійним функціоналом?

Лекція 9. Лінійні оператори

Нехай $\mathbb{L}$ і $\mathbb{V}$ лінійні простори над $\mathbb{R}$.

Означення 9.1. *Лінійним оператором називається відображення* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$, *яке задовольняє властивості:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{L}\ \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{L}$, , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$.

Зауваження. Лінійний функціонал є частинним випадком лінійного оператора, якщо $\mathbb{V} = \mathbb{R}$.

Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис в $\mathbb{L}$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ – базис в $\mathbb{V}$. Нехай $x \in \mathbb{L}$ розкладається за базисом $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$. Тоді

$$\mathcal{A}(x) = x_1 \mathcal{A}(e_1) + x_2 \mathcal{A}(e_2) + \cdots + x_n \mathcal{A}(e_n).$$

Оскільки $\mathcal{A}(e_i) \in \mathbb{V}$, то має місце розклад за базисом $\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\tau_j$, $i = 1, \ldots, n$. Звідки

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) = x_1(a_{11}\tau_1 + a_{21}\tau_2 + \cdots + \ a_{n1}\tau_n) + x_2(a_{12}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + \cdots + \ a_{n2}\tau_n) + \cdots \\ + x_n(a_{1n}\tau_1 + a_{2n}\tau_2 + \cdots + \ a_{nn}\tau_n) \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n)\tau_1 \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n)\tau_2 + \cdots \\ + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + \ a_{nn}x_n)\tau_n.\end{aligned}$$

Таким чином оператору $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ відповідає матриця $A = (a_{ij})_{m\times n}$, стовпці якої утворені коефіцієнтами розкладів векторів $\mathcal{A}(e_i)$, $i = 1,2, \ldots, n$ за векторами τ_j, $i = 1,2, \ldots, n$.

Нехай $\mathcal{A}(x) = y = \sum_{i=1}^{m} y_i \tau_i$, тоді маємо

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отже, дія лінійного оператора на вектор x зводиться до добутку матриці лінійного оператора на стовпець із його координат.

Якщо $dim\mathbb{L} = dim\mathbb{V}$, зокрема $\mathbb{L} = \mathbb{V}$, то матриця оператора є квадратною.

Приклад 1. Нехай $\mathbb{L} = \mathbb{V}$ – множина многочленів степеню не вище $n \in \mathbb{N}$. В якості лінійного оператора візьмемо оператор диференціювання $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$. Базис в $\mathbb{L}$ має вигляд $e_0 = 1$, $e_1 = x$,…, $e_n = x^n$. Маємо

$$\mathcal{A}e_1 = \frac{d}{dx}1 = 0 = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_n,$$

$$\mathcal{A}e_k = \frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1} = 0 \cdot e_0 + \cdots + ke_{k-1} + 0 \cdot e_k + \cdots + 0 \cdot e_n,,$$

$$k = 1,2, \dots, n.$$

Тоді матриця оператора $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Нехай $\mathbb{L} = \langle 1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx \rangle$. В якості лінійного оператора візьмемо оператор диференціювання $\mathcal{A} = \frac{d^2}{dx^2}$. Базис в $\mathbb{L}$ має вигляд $e_0 = 1$, $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$,…, $e_{2n-1} = \sin nx$, . $e_{2n} = \cos nx$ Маємо

$$\mathcal{A}e_0 = \frac{d}{dx}1 = 0 = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_{2n},$$

$$\mathcal{A}e_1 = \frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x = 0 \cdot e_0 - e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_{2n}$$

$$\mathcal{A}e_2 = \frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 - e_2 + \cdots + 0 \cdot e_{2n},$$

$$-----------------------------$$

$$\mathcal{A}e_{2n-1} = \frac{d^2}{dx^2}\sin nx = -n^2 \sin nx = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + \cdots - n^2 e_{2n-1} + 0 \cdot e_{2n},$$

$$\mathcal{A}e_{2n} = \frac{d^2}{dx^2}\cos nx = -n^2\cos x = 0\cdot e_0 + 0\cdot e_1 + \cdots - n^2 e_{2n}.$$

Тоді матриця оператора $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n^2 \end{pmatrix}.$$

Ядро і образ лінійного оператора

Означення 9.2. *Ядром лінійного оператору* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ *називається множина*

$$ker\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{L} | \mathcal{A}(x) = 0\}.$$

Означення 9.3. *Образом лінійного оператору* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ *називається множина*

$$ImA = \{y \in \mathbb{V} | \exists x \in \mathbb{L}: \mathcal{A}(x) = 0\}.$$

Теорема 9.1. *Нехай* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ *– лінійний оператор. Тоді* $ker\mathcal{A}$ *підпростір* $\mathbb{L}$*, а* $Im\mathcal{A}$ *підпростір* $\mathbb{V}$.

Доведення. Покажемо, що

c) $\forall a, b \in ker\mathcal{A}$: $a + b \in ker\mathcal{A}$,

d) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in ker\mathcal{A} : \lambda a \in ker\mathcal{A}$,

Дійсно, $\forall a, b \in ker\mathcal{A}$ маємо $\mathcal{A}(a + b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b) = 0$, тобто $a + b \in ker\mathcal{A}$. Також $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in ker\mathcal{A} : \lambda a \in ker\mathcal{A}$ маємо $\mathcal{A}(\lambda a) = \lambda\mathcal{A}(a) = 0$, тобто $\lambda a \in ker\mathcal{A}$.

Отже, згідно лема 5.1 $ker\mathcal{A}$ – лінійний підпростір $\mathbb{L}$.

Аналогічно доводиться, що $Im\mathcal{A}$ – лінійний підпростір $\mathbb{L}$.

Теорема 9.2. $dim\ ker\mathcal{A} + dim\ Im\mathcal{A} = dim\ \mathbb{L}$.

Доведення. Нехай $\mathbb{L}$ – n-вимірний простір з базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а $dim\ ker\mathcal{A} = k$. Візьмемо в ядрі базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$, а вектори $e_{k+1}, \ldots, e_n$ не належать ядру. Далі, $\forall x \in \mathbb{L}$ розкладемо за базисом $x = \sum_{i=1}^{k} x_i\, e_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i\, e_i$. Тоді

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=k+1}^{n} x_i\, \mathcal{A}(e_i).$$

Очевидно, що будь-який вектор $y \in ImA$ розкладається за векторами $a_i = \mathcal{A}(e_i)$, $i = k+1, \ldots, n$. Покажемо, що a_i, $i = k+1, \ldots, n$ – лінійно незалежні. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i a_i = 0,$$

тобто

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = 0.$$

Звідки

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, e_i\right) = 0,$$

і, отже, $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, e_i \in ker\mathcal{A}$, але ми вибрали $e_{k+1}, \ldots, e_n$, що не належать ядру. Звідки випливає, що $\lambda_i = 0$, $i = k+1, \ldots, n$.

Зауваження 9.1. Інколи $dim\ ker\mathcal{A}$ називають *дефектом* лінійного оператора $\mathcal{A}$, а $dim\ \ Im\mathcal{A}$ – *рангом* лінійного оператора $\mathcal{A}$.

Перетворення матриці лінійного оператора при заміні базису

Нехай в лінійному просторі $\mathbb{L}$ є два базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ та $e_1', e_2', \ldots, e_n'$. Нехай $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{V}$ – лінійний оператор, а A і A' матриці, які відповідають оператору $\mathcal{A}$ у базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ та $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ відповідно. Будемо розглядати $\bar{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ та $\bar{E}' = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$ як узагальнені вектори-рядки, тоді $\bar{E}' = \bar{E}C$, де C – матриця переходу від базису e_1, e_2,…, e_n до e_1', e_2',…, e_n'.

Тоді для $y = \mathcal{A}(x)$, маємо $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ – матриці-стовпці координат відповідно x і y в базисі e_1, e_2,…, e_n. І для розкладів x і y в базисі e_1', e_2',…, e_n' маємо вектори стовпці $\boldsymbol{x}'$ і $\boldsymbol{y}'$. Легко бачити, що $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{y}'$. Із $C\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}'$ випливає, що

$$\boldsymbol{y}' = C^{-1}AC\boldsymbol{x}'.$$

Отже, при перетворенні координат матриця оператора має вигляд

$$A' = C^{-1}AC. \tag{9.1}$$

Зауваження 9.2. Якщо матриця A' утворена із матриці A за формулою $A' = C^{-1}AC$, то A' і A називаються *подібними* матрицями.

Означення 9.4. *Оператор* $\mathcal{J}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, *такий, що* $\forall x \in \mathbb{L}$, $\mathcal{J}(x) = x$ *називається одиничним.*

Вправи

1. Довести, що у довільному базисі матриця, яка відповідає одиничному оператору $\mathcal{J}$ є одиничною матрицею.
2. Знайти якийсь базис ядра лінійного функціоналу

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ де } f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i > 0,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Лекція 10 Власні значення та власні вектори лінійного оператора

Нехай $\mathbb{L}$ лінійний простір над $\mathbb{R}$, а $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – лінійний оператор.

Означення 10.1. *Вектор* $x \in \mathbb{L}$, $x \neq 0$ *називається* ***власним вектором*** *оператора* $\mathcal{A}$, *якщо* $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ *таке, що* $\mathcal{A}x = \lambda x$. *При цьому число* λ *називається* ***власним значенням***, *що відповідає власному вектору* x, *а вектор* x *є власним вектором, що відповідає власному значенню* λ.

Твердження 10.1. *Множина власних векторів, які відповідають одному і тому ж власному значенню λ, доповнена нульовим вектором, утворює лінійний підпростір.*

Доведення. Дійсно, позначимо цю множину через $\mathbb{S}_\lambda$. Тоді $\forall x, y \in \mathbb{S}_\lambda$ маємо $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$, тобто $x + y \in \mathbb{S}_\lambda$. Також $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{S}_\lambda$, маємо $\mathcal{A}(cx) = c\mathcal{A}(x) = \lambda cx$, тобто $cx \in \mathbb{S}_\lambda$. Отже, згідно лема 5.1 $\mathbb{S}_\lambda$ – лінійний підпростір $\mathbb{L}$.

Легко бачити, що $\mathbb{S}_0 = ker\mathcal{A}$.

Знаходження власних значень та власних векторів

Нехай $\mathbb{L}$ – n-вимірний простір, а $\mathcal{A}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – лінійний оператор і власний вектор $x \in \mathbb{L}$ відповідає власному значенню λ, тобто $\mathcal{A}(x) = \lambda x$. Перепишемо це у виді $\mathcal{A}(x) - \lambda\mathcal{I}(x) = 0$ або

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(x) = 0. \tag{10.1}$$

Виберемо в $\mathbb{L}$ базис і нехай у цьому базисі оператору $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$ відповідає матриця $(A - \lambda I)$. Рівність (10.1) запишеться в матричній формі

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{10.2}$$

Однорідна СЛР (10.2) має ненульовий розв'язок $\boldsymbol{x}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{10.3}$$

Многочлен $\det(A - \lambda I)$ відносно λ називається *характеристичним многочленом*, а рівняння (10.3) відносно λ називається *характеристичним рівнянням*. Його корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ називаються характеристичними числами. Дійсні характеристичні числа і будуть власними значеннями оператора $\mathcal{A}$.

Лема 10.1. *Характеристичний многочлен* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *має вид:*

$$p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det A,$$

де $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ *– сума елементів головної діагоналі матриці, яка називається слідом матриці.*

Доведення випливає безпосередньо при розкладанні визначника $\det(A - \lambda I)$.

Зауважимо, що при заміні базису характеристичний многочлен оператора не змінюється, Дійсно, якщо C – матриця переходу від старого базису до нового, то відповідна оператору $\mathcal{A}$ матриця A при переході до нового базису має вигляд $A' = C^{-1}AC$. Звідки маємо таку рівність

$$\det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(C^{-1})\det(A - \lambda I)\det(C) = \det(A - \lambda I).$$

Останній перехід зроблено з урахуванням того, що $\det(C^{-1})\det(C) = 1$.

Як наслідок – власні значення оператора не залежать від базису, а координати власних векторів змінюються при заміні базису.

Означення 10.2. *Алгебраїчна кратність власного значення* λ *– це його кратність як кореня характеристичного рівняння. Будемо позначати* $alg(\lambda)$.

Щоб знайти власні вектори підставляємо по черзі власні значення в (10.2), і розв'язуючи для кожного власного значення λ_k однорідну систему $(A - \lambda_k I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ лінійних рівнянь (10.2), одержуємо її фундаментальну систему розв'язків, яка є базисом підпростору $S_{\lambda_k} = ker(A - \lambda_k I)$, який відповідає власному значенню λ_k. Множини власних векторів, що відповідають підставленому власному значенню – це множина всіх ненульових векторів підпростору S_{λ_k}.

Означення 10.3. *Розмірність* $dim(S_{\lambda_k})$ *називається геометричною кратністю власного значення* λ_k. *Будемо позначати* $geom(\lambda)$.

Твердження 10.2. *Власні вектори, які відповідають різним власним значенням, лінійно незалежні.*

Доведення. Для одного вектора теорема очевидна, оскільки власний вектор ненульовий. Припустимо, що теорема має місце для $m - 1$. Нехай x_1, x_2,…,

x_m – власні вектори оператора $\mathcal{A}$, які відповідають власним значенням λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ відповідно, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$, якщо $i \neq j$. Нехай

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_{m-1}x_{m-1} + c_mx_m = 0, \tag{10.4}$$

тоді

$$\mathcal{A}(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m) = c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \cdots + c_m\lambda_mx_m = 0. \tag{10.5}$$

Помножимо (10.4) на λ_m і результат віднімемо від (10.5), маємо

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_m)x_2 + \cdots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0.$$

Оскільки $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, $i = 1, \ldots, m-1$ і x_1, $x_2,\ldots$, x_{m-1} лінійно незалежні, то $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. А із того, що $c_mx_m = 0$ та $x_m \neq 0$ випливає, що $c_m = 0$. Отже, x_1, $x_2,\ldots$, x_m – лінійно незалежні.

Приклад 10.1. Нехай $\mathbb{R}^3 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R}\right\}$ і в базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ оператору $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичний многочлен є визначником

$$det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\, det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\, det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(7-\lambda)^2.$$

Коренями цього характеристичного многочлена є дійсні числа 1 та 7 причому 7 кратний. Отже, це і є власні значення оператора $\mathcal{A}$. Знайдемо власні вектори. Підставляємо власне значення $\lambda_1 = 1$, маємо

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями зводимо матрицю до покращеного східчастого виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна система розв'язків складається із вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тобто $S_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

А щоб одержати власний вектор x оператора $\mathcal{A}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$ потрібно вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ помножити на будь-яке ненульове число, тобто

$$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \neq 0.$$

Власне значення $\lambda_2 = 7$ має алгебраїчну кратність 2. Підставляючи $\lambda_2 = 7$ в (10.2), маємо

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що така система зводиться до одного рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Базисна змінна x_1, а вільні змінні x_2, x_3. Надаючи значення вільним змінним $x_2 = 1, x_3 = 0$ та $x_2 = 0, x_3 = 1$, одержуємо фундаментальну систему розв'язків: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ відповідно.

Звідки

$$S_{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad dim(S_{\lambda_2}) = 2.$$

Отже, у цьому прикладі алгебраїчна кратність власного значення λ_2 та його геометрична кратність рівні.

Будь-який власний вектор $\boldsymbol{x}$, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 7$ одержується так

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Чи завжди алгебраїчна кратність власного значення та його геометрична кратність рівні? Ні.

Приклад 10.2. Нехай оператору $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичний многочлен є визначником

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Власне значення $\lambda = 1$ має алгебраїчну кратність 3. Підставляємо це власне значення, маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тут базисні змінні x_2, x_3, а вільна змінна x_1. Покладаючи $x_1 = 1$, маємо фундаментальну систему розв'язків, яка складається із вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто $S_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, а це означає, що

$$dim(S_\lambda) = 1.$$

Отже, у цьому випадку геометрична кратність λ менша від алгебраїчної. Чи може геометрична кратність власного значення бути більшою від алгебраїчної? Ні.

Теорема 10.1. *Геометрична кратність власного значення λ лінійного оператора завжди не більша від алгебраїчної кратності, тобто $geom(\lambda) \leq alg(\lambda)$.*

Без доведення.

Наслідок 10.1. Сума геометричних кратностей усіх власних чисел оператора $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ менша або дорівнює n.

Твердження 10.3. *Визначник матриці $n \times n$, яка з урахуванням кратності має n власних значень, дорівнює добутку її власних значень:*

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Доведення. Дійсно, із того, що

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots + \det A \\ &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

маємо

$$p(0) = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Вправа

Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Лекція 11 Власні вектори оператора як базис простору. Жорданова форма матриці

Нехай $\mathbb{L}$ лінійний n-вимірний простір над $\mathbb{R}$, а $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – лінійний оператор.

Теорема 11.1. *Матриця лінійного оператора діагональна тоді і тільки тоді, коли базис простору* $\mathbb{L}$ *складається із власних векторів оператора* $\mathcal{A}$.

Доведення. Достатність. Нехай у базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Розкладемо $\mathcal{A}(e_1)$ за векторами базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. З лекції 9 нам відомо, що координати цього вектору стоять у першому стовпці матриці A, тобто $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$, а значить e_1 – власний вектор, що відповідає власному значенню λ_1. Аналогічно маємо $\mathcal{A}(e_k) = \lambda_k e_k$, $k = 1,2, \ldots, n$.

Необхідність. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, який складається із власних векторів оператора $\mathcal{A}$. Тоді $\mathcal{A}(e_k) = \lambda_k e_k$, $k = 1,2, \ldots, n$, тобто оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Наслідок11.1. Якщо знайдеться n власних векторів оператора, з яких можна скласти базис простору $\mathbb{L}$, то у цьому базисі матриця A оператора $\mathcal{A}$ буде діагональною, якщо лінійно незалежних векторів оператора $\mathcal{A}$ менше розмірності простору $\mathbb{L}$, то у жодному із базисів матриця A не буде діагональною.

Означення 11.1. *Матриця A називається діагоналізовною, якщо існує подібна до A діагональна матриця.*

Отже, якщо базис простору $\mathbb{L}$ складається із власних векторів оператора $\mathcal{A}$, то його матриця діагоналізовна.

Приклад 11.1. Повернемось до прикладу 10.1. Із власних векторів оператора можна скласти базис:

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З використанням теореми 11.1 маємо, що у цьому базисі матриця оператора $\mathcal{A}$ має вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, матрицю A' можна одержати із матриці A за допомогою матриці переходу C від старого базису e_1, e_2, e_3 до нового базису e_1', e_2', e_3'. Враховуючи зауваження 8.1, матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$A' = C^{-1}AC. \qquad (11.1)$$

Вправа 11.1. Переконатись, що (11.1) справді має місце для цього прикладу.

Приклад 11.2. Звернемось до прикладу 10.2. Як було показано геометрична кратність $geom(\lambda) = 1$, а алгебраїчна $alg(\lambda) = 3$, і, отже, не існує базису, у якому матриця оператора була б діагональною.

Означення 11.2. *Підпростір* $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}$ *називається інваріантним відносно лінійного оператора* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$*, якщо* $\mathcal{A}: \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$*, тобто* $\forall x \in \mathbb{L}_1$ $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{L}_1$*.*

Прикладами інваріантного підпростору є: ядро оператора $\mathcal{A}$, весь простір $\mathbb{L}$, нуль підпростір.

Означення 11.3. *Нехай* $\mathbb{V}_1$ *та* $\mathbb{V}_2$ *– підпростори простору* $\mathbb{L}$ *такі, що* $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0\}$*. Прямою сумою* $\mathbb{V}_1$ *та* $\mathbb{V}_2$ *називається множина*

$$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in \mathbb{V}_1, v_2 \in \mathbb{V}_2\}.$$

Лінійний оператор простої структури

Означення 11.4. *Лінійний оператор* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ $(dim(\mathbb{L}) = n)$ *називається оператором простої структури, якщо* $\mathbb{L}$ *є прямою сумою одновимірних підпросторів, інваріантних відносно оператора* $\mathcal{A}$*, тобто*

$$\mathbb{L} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n,$$

де $dim(\mathbb{V}_k) = 1$*,* $k = 1, \dots, n$*. Інакше оператор* $\mathcal{A}$ *називається оператором складної структури.*

Приклад 11.3. Оператором простої структури є будь-який оператор $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ $(dim(\mathbb{L}) = n)$ з попарно різними власними значеннями. Це є наслідком теореми 11.1.

Твердження 11.1. *Лінійний оператор* $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ *є оператором простої структури тоді і тільки тоді, коли кожне власне число оператора* $\mathcal{A}$ *має рівні алгебраїчну та геометричну кратності.*

Доведення. Дійсно, у цьому випадку в якості базису $\mathbb{L}$ $(dim(\mathbb{L}) = n)$ можна взяти власні вектори $\mathcal{A}$ і, з урахуванням теореми 11.1, $\mathbb{L} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n$, де $\mathbb{V}_k$ – одновимірний простір з базисним вектором e_k, що є власним вектором оператора $\mathcal{A}$, $k = 1, \dots, n$.

Означення 11.5. *Жордановою клітинкою* J_k *розміру* k *називається квадратна матриця виду*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Якщо у деякому базисі матриця лінійного оператора $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ має вигляд $J_n(\lambda)$, то характеристичне рівняння оператора $\mathcal{A}$ має вигляд

$$(J_n(\lambda) - \lambda_0 I) = (\lambda - \lambda_0)^n = 0.$$

Отже, маємо

$$M = J_n(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $rankM = n - 1$, то $dim\left(S_{\lambda_0}\right) = 1$, (розв'язок СЛР $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ містить $(n-1)$-ну базову змінну та одну вільну, тобто ФСР містить лише один вектор) і, якщо $n > 1$, то $J_k(\lambda)$ не діагоналізується.

Означення 11.6. *Блочно-діагональна матриця $A(\lambda_0)$, кожен блок якої є жордановою клітинкою, називається жордановим блоком, що відповідає власному значенню λ_0, тобто*

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i_2}(\lambda_0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & J_{i_l}(\lambda_0) \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Твердження 11.2. *Кількість жорданових клітинок у блоці дорівнює геометричній кратності власного значення λ_0, тобто $geom(\lambda_0) = l$, алгебраїчна кратність λ_0 дорівнює сумі розмірностей всіх жорданових клітинок(або розміру матриці $A(\lambda_0)$), тобто $alg(\lambda) = i_1 + i_2 + \cdots + i_l$*

Без доведення.

Приклад 11.3. Якщо геометрична кратність $geom(\lambda_0) = 1$, а алгебраїчна $alg(\lambda_0) = 3$, то у такому випадку жордановий блок має вигляд

$$A(\lambda_0) = J_3(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ж геометрична кратність $geom(\lambda_0) = 2$, а алгебраїчна $alg(\lambda_0) = 3$, то жордановий блок має вигляд

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

або

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова нормальна форма матриці

Означення 11.7. *Жордановою нормальною формою називається блочно діагональна матриця виду*

$$A = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & & & \\ & A(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(\lambda_k) \end{pmatrix}, \qquad (11.3)$$

де $A(\lambda_i)$ – жордановий блок, що відповідає власному значенню λ_i, $i = 1, \dots, k$.

Лекція 12. Жордановий базис

Нехай $\mathbb{L}$ лінійний n-вимірний простір над $\mathbb{R}$, а $\mathcal{A}: \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – лінійний оператор.

Означення 12.1. *Базис, у якому лінійному оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця жорданової нормальної форми називається <u>жордановим базисом</u>.*

Діагональна матриця також є матрицею жорданової нормальної форми, яку називають матрицею простої структури.

Означення 12.2. *Вектор x називається приєднаним вектором висоти $m \geq 1$ лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному значенню λ, якщо*

$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{m-1}(x)$ *є власним вектором* $\mathcal{A}$, *що відповідає* λ, *тобто* $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{m-1}(x) \neq 0$, *а*

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{m}(x) = 0.$$

Нехай в $\mathbb{L}$ існує послідовність векторів e_1, e_2,…, e_m така, що

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(e_1) = 0,\\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(e_2) = e_1 \ \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^2(e_2) = 0,\\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(e_3) = e_2 \ \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^3(e_3) = 0,\\ \dots\\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(e_m) = e_{m-1} \ \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^m(e_m) = 0.\end{gathered} \qquad (12.1)$$

Отже, e_1, e_2,…, e_m – послідовність приєднаних векторів, де вектор e_k має висоту k, $k = 1, \dots, m$, (e_1 – власний вектор).

Теорема 12.1. *Вектори* e_1, e_2,…, e_m, *що задовольняють* (12.1), *лінійно незалежні, а значить, якщо* $m = n$, *то утворюють базис простору* $\mathbb{L}$.

Доведення. Із (12.1) випливає, що

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(e_1) = \lambda e_1,\\ \mathcal{A}(e_2) = e_1 + \lambda e_2,\\ \mathcal{A}(e_3) = e_2 + \lambda e_3,\\ \dots\\ \mathcal{A}(e_{m-1}) = e_{m-2} + \lambda e_{m-1}\\ \mathcal{A}(e_m) = e_{m-1} + \lambda e_m.\end{gathered} \qquad (12.2)$$

Припустимо, що e_1, e_2,…, e_m – лінійно залежні, тобто $\exists c_1, \dots, c_m$, такі, що $|c_1| + \dots + |c_m| > 0$ і $c_1e_1 + \dots + c_me_m = 0$. Із (12.2) випливає

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{A}(c_1e_1 + \dots + c_me_m) &= c_2e_1 + \dots + c_me_{m-1} + \lambda(c_1e_1 + \dots + c_me_m)\\ &= c_2e_1 + \dots + c_me_{m-1}.\end{aligned}$$

Рівність $|c_2| + \cdots + |c_m| = 0$ неможлива, оскільки тоді $c_1 e_1 = 0$, тобто $c_1 = 0$ – суперечність із тим, що $|c_1| + \cdots + |c_m| > 0$.

Отже, $|c_2| + \cdots + |c_m| > 0$, тобто e_2, e_3,…, e_m лінійно залежні. Враховуючи,

що $c_2 e_1 + \cdots + c_m e_{m-1} = 0$, маємо

$$0 = \mathcal{A}(c_2 e_1 + \cdots + c_m e_{m-1}) = c_2 e_1 + \cdots + c_{m-1} e_{m-2} + \lambda(c_2 e_1 + \cdots + c_m e_{m-1}) \\ = c_2 e_1 + \cdots + c_{m-1} e_{m-2}.$$

Рівність $|c_2| + \cdots + |c_{m-1}| = 0$ неможлива, оскільки тоді $c_m e_{m-1} = 0$, тобто $c_m = 0$ – суперечність із тим, що $|c_2| + \cdots + |c_m| > 0$.

Отже, $|c_2| + \cdots + |c_{m-1}| > 0$, тобто e_2, e_3,…, e_{m-1} лінійно залежні. Далі, враховуючи,

що $c_2 e_1 + \cdots + c_{m-1} e_{m-2} = 0$, маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}(c_2 e_1 + \cdots + c_{m-1} e_{m-2}) \\ &= c_2 e_1 + \cdots + c_{m-2} e_{m-3} + \lambda(c_2 e_1 + \cdots + c_{m-1} e_{m-2}) \\ &= c_2 e_1 + \cdots + c_{m-2} e_{m-3}. \end{aligned}$$

Рівність $|c_2| + \cdots + |c_{m-2}| = 0$ неможлива, оскільки тоді $c_{m-1} e_{m-2} = 0$, тобто $c_{m-1} = 0$ – суперечність із тим, що $|c_2| + \cdots + |c_{m-1}| > 0$.

Продовжуючи цей процес нарешті одержимо e_2 лінійно залежний, тобто $e_2 = 0$, але тоді із $\mathcal{A}(e_2) = e_1 + \lambda e_2$ випливає $e_1 = 0$, що неможливо.

Отже, якщо у просторі $\mathbb{L}$ ($dim(\mathbb{L}) = n$) існує набір приєднаних векторів e_1, e_2,…, e_n оператора $\mathcal{A}$, де вектор e_k має висоту k, $k = 1, \dots, n$, то ці вектори утворюють базис простору $\mathbb{L}$. У цьому базисі матриця оператора $\mathcal{A}$ має форму жорданової клітки $J_n(\lambda)$. Така умова відповідає випадку, коли алгебраїчна кратність власного значення оператора $alg(\lambda) = n$, а його геометрична кратність $geom(\lambda) = 1$.

Якщо ж $alg(\lambda) = n$, а $geom(\lambda) = l$, $1 < l < n$, то для кожного із l власних векторів знаходимо послідовність приєднаних векторів аналогічно послідовності (12.2) для власного вектора e_1. Одержимо базис $\mathbb{L}$, у якому відповідна $\mathcal{A}$ матриця має блочно-діагональний вигляд (11.2) з λ по діагоналі.

Якщо $alg(\lambda) < n$, і існують інші власні значення λ_i, $i = 1, \dots, k$, оператора $\mathcal{A}$, сума алгебраїчних кратностей яких дорівнює n, то продовжуючи описану процедуру для кожного власного значення λ_i одержимо базис $\mathbb{L}$, у якому відповідна оператору $\mathcal{A}$ матриця A має жорданову нормальну форму (11.3).

Приклад 12.1. У прикладі 10.2 $alg(\lambda = 1) = 3$, $geom(\lambda = 1) = 1$. Отже, у жордановому базисі матриця A має мати вигляд

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переконаємось у цьому. Знайдемо жордановий базис

$$(A - \lambda I)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Далі,

$$(A - \lambda I)e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Матриця переходу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже, за формулою (9.1) одержуємо

$$A(1) = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лекція 13. Квадратична форма

Означення 13.1. *Квадратичною формою називається функція*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,2, \dots, n$.

Легко бачити, що $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, де $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, причому A – симетрична матриця, тобто $A^T = A$. Матриця A називається матрицею квадратичної форми f. Враховуючи це, квадратичну форму можна записати у вигляді

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$$

Зміна матриці квадратичної форми при лінійних перетвореннях координат.

Нехай C – матриця перетворення координат (або базису), тобто $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}'$, де $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $\det C \neq 0$. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (C\boldsymbol{x}')^T A(C\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'^T C^T AC\boldsymbol{x}',$$

тобто

$$f(x_1', x_2', \dots, x_n') = \boldsymbol{x}'^T B \boldsymbol{x}', \text{ де } B = C^T A C.$$

Покажемо, що $f(x_1', x_2', \dots, x_n')$ – квадратична форма, для чого досить довести, що B – симетрична матриця. Дійсно, $B^T = (C^T A C)^T = (AC)^T (C^T)^T = C^T A C = B$.

Отже, при перетворенні координат матрицею перетворення C матриця квадратичної форми змінюється так $B = C^T A C$.

Твердження 13.1. *При лінійному невиродженому перетворенні координат з матрицею перетворення C знак визначника матриці квадратичної форми не змінюється, тобто*

$$sign(\det A) = sign(\det B), \qquad B = C^T A C.$$

Доведення. Дійсно, враховуючи властивості визначника, маємо

$$\det B = \det C^T \det A \det C = (\det C)^2 \det A.$$

Оскільки $(\det C)^2 > 0$, то твердження доведено.

Означення 13.2. *Кажуть, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має канонічний вид, якщо $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots, n$, тобто*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2. \qquad (13.1)$$

Теорема 13.1. *Для будь-якої квадратичної форми $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ існує перетворення координат, при якому ця квадратична форма має канонічний вид.*

Доведення проведемо за індукцією. При $n = 1$ маємо канонічний вид

$$f(x_1) = a_{11} x_1^2.$$

Нехай твердження має місце для всіх квадратичних форм від $n - 1$ змінної. Розглянемо квадратичну форму від n змінних

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2.$$

Можливі два випадки:

а) існує хоча б один квадрат з відмінним від нуля коефіцієнтом, припустимо, не зменшуючи загальності, що це $a_{nn} \neq 0$, то згрупуємо всі доданки, які містять x_n

$$2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2$$

і виділимо повний квадрат:

$$\begin{aligned}2a_{1n}x_1x_n &+ 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2\\ &= a_{nn}\left(\frac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{2n}}{a_{nn}}x_2 + \cdots + \frac{a_{n-1n}}{a_{nn}}x_{n-1} + x_n\right)^2\\ &- a_{nn}\left(\frac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{2n}}{a_{nn}}x_2 + \cdots + \frac{a_{n-1n}}{a_{nn}}x_{n-1}\right)^2.\end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= \frac{1}{a_{nn}}(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{n-1n}x_{n-1} + a_{nn}x_n)^2\\ &+ g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),\end{aligned}$$

де g – квадратична форма від $n-1$ змінної. За припущенням індукції існує матриця перетворення координат $\bar{C}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix} = \bar{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}\end{pmatrix}\right)$, яка зводить g до канонічного виду

$$g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1n-1}y_{n-1}^2.$$

Розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} & \boxed{\bar{C}} & & 0 \\ & & & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n-1n}}{a_{nn}} & 1\end{pmatrix}$$

Оскільки $\det\bar{C} \neq 0$, то $\det C \neq 0$ (розгляньте розклад по останньому стовпцю) і матриця переходу C від координат $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ до $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$) здійснює перетворення координат, при якому квадратична форма має канонічний вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

b) $\forall k = 1, \dots, n$, $a_{kk} = 0$, але якийсь із коефіцієнтів $a_{ij} \neq 0$ інакше це не білінійна форма. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $a_{12} \neq 0$. Розглянемо таке лінійне перетворення координат:

$$x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n.$$

У цьому випадку маємо доданок $a_{12}x_1x_2$ перейде у такий

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2,$$

а далі застосовуємо алгоритм пункту a).

Наслідок 13.1. *Якщо A – симетрична матриця, то існує невироджена матриця C така, що*

$$D = C^T A C,$$

де D – діагональна матриця.

Наслідок 13.2. *Зробимо в* (13.1) *підстановку $\sqrt{|a_{ii}|}x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$, одержимо квадратичну форму*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \dots \pm y_m^2, \qquad m \leq n,$$

у якій перед кожним $y_1, y_2, \dots, y_m$ коефіцієнт або 1, або -1. Перенумерацією змінних можна одержати такий вигляд квадратичної форми

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \dots - y_{p+q}^2, \qquad p + q \leq n.$$

Твердження 13.2. *Нехай квадратна матриця A діагоналізовна так, що*

$$D = O^T A O, \tag{13.2}$$

де O – ортогональна матриця, а D – діагональна матриця. Тоді A – симетрична матриця.

Доведення. Із (13.2) маємо

$$A = (O^T)^{-1} D O^{-1} = O D O^T.$$

Звідки

$$A^T = (O^T D O)^T = O^T D^T (O^T)^T = O^T A O = A.$$

Твердження 13.3. *Якщо A – симетрична матриця, то A діагоналізовна, більш того, існує ортогональна матриця O така, що*

$$D = O^T A O,$$

де D – діагональна матриця.

Без доведення.

Закон інерції квадратичних форм

Теорема 13.2. (Закон інерції квадратичних форм). *Якщо квадратична форма зводиться до канонічного виду* (13.1) *в двох різних базисах, то число доданків з додатними коефіцієнтами, як і число доданків з від'ємними коефіцієнтами, в обох випадках однакове.*

Доведення. Припустимо, що у базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ лінійного простору $\mathbb{L}$ квадратична форма має вигляд

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad (13.3)$$

де x_i – координати $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$ у базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$, а у базисі $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_t^2 - y_{t+1}^2 - y_{t+2}^2 - \dots - y_{t+s}^2, \quad (13.4)$$

де y_i – координати $\boldsymbol{x}$ у іншому базисі $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ лінійного простору $\mathbb{L}$.

Припустимо, що $p > t$. Розглянемо в $\mathbb{L}$ підпростір $\mathbb{L}_1$, породжений векторами $e_1, e_2, \dots, e_p$ і підпростір $\mathbb{L}_2$, породжений векторами $\tau_{t+1}, \tau_{t+2}, \dots, \tau_n$.

Оскільки $dim\mathbb{L}_1 + dim\mathbb{L}_2 = p + n - t > n$, то існує ненульовий вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Цей вектор розкладається як за базисом e_1, e_2,…, e_p:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p,$$

так і за базисом τ_{t+1}, τ_{t+2},…, τ_{t+s}:

$$\boldsymbol{x} = \beta_{t+1}\tau_{t+1} + \cdots + \beta_{t+s}\tau_{t+s}.$$

З урахуванням того, що $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, хоча б одне $\alpha_i \neq 0$, маємо за формулою (13.3)

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 > 0,$$

у той же час за формулою (13.4)

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\beta_{t+1}^2 - \beta_{t+2}^2 - \cdots - \beta_{t+s}^2 \leq 0.$$

Одержали суперечність через припущення $p > t$. Із міркувань симетрії $p \not< t$, отже, $p = t$. Аналогічно показується що $s = q$.

Лекція 14. Білінійна форма. Базові властивості

Нехай $\mathbb{L}$ лінійний n-вимірний простір і для будь-яких елементів $x, y \in \mathbb{L}$ визначена функція $B(x, y)$.

Означення 14.1. $B(x, y)$ *називається білінійною формою, якщо* $\forall x, y, z \in \mathbb{L}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$,

   $B(\lambda x, z) = \lambda\, B(x, z)$;

2. $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$,

   $B(x, \lambda z) = \lambda\, B(x, z)$.

Нехай e_1, e_2,…, e_n – базис лінійного простору $\mathbb{L}$ і $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. Тоді

$$B(x, y) = B(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i, e_j)\ x_i y_j.$$

Покладемо

$$B(e_i, e_j) = b_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Матриця $B = (b_{ij})_{n\times n}$ називається матрицею білінійної форми $B(x, y)$.

Зміна матриці білінійної форми при заміні базису.

Нехай $C = (c_{ij})_{n\times n}$ – матриця переходу від базису e_1, e_2,…, e_n до базису e_1', e_2',…, e_n', тобто

$$e_j' = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \cdots + c_{nj}x_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, e_i, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Звідки для матриці білінійної форми $B' = (b_{ij}')_{n\times n}$ у базисі e_1', e_2',…, e_n' маємо

$$b_{ij}' = B(e_i', e_j') = B\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\, e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\, e_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki}\, B(e_k, e_l) c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki}\, b_{kl} c_{lj}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Позначимо $c_{ki} = d_{ik}$, маємо

$$b_{ij}' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d_{ik}\, b_{kl} c_{lj}, \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{14.1}$$

Легко бачити, що матриця $(d_{ij})_{n\times n} = C^T$ – транспонована до матриці C. Із (14.1) випливає, що матриця B' білінійної форми $B(x, y)$ у базисі e_1', e_2',…, e_n' має вигляд:

$$B' = C^T BC.$$

Означення 14.2. *Білінійна форма $B(x, y)$ називається <u>симетричною</u>, якщо* $\forall x, y \in \mathbb{L}$

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Легко бачити, що матриця симетричної білінійної форми сама є симетричною, оскільки $b_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = b_{ji}, i, j = 1, \dots, n$.

Якщо $B(x, y)$ – симетрична білінійна форма, то $B(x, x)$ – квадратична форма, яку називають квадратичною формою, породженою білінійною формою. Відзначимо, що білінійна форма однозначно визначається породженою нею квадратичною формою, дійсно

$$B(x + y, x + y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y).$$

Звідки

$$B(x, y) = \frac{1}{2}\big(B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y)\big).$$

Означення 14.3. *Білінійна форма* $B(x, y)$ *називається* *<u>кососиметричною</u>, якщо* $\forall x, y \in \mathbb{L}$

$$B(x, y) = -B(y, x).$$

Звідки випливає, що для кососиметричної білінійної форми маємо $\forall x \in \mathbb{L}$

$$B(x, x) = 0.$$

Для довільної білінійної форми $B(x, y)$ очевидно, що білінійна форма

$$C(x, y) = \frac{1}{2}\big(B(x, y) + B(y, x)\big)$$

є симетричною, а білінійна форма

$$D(x, y) = \frac{1}{2}\big(B(x, y) - B(y, x)\big).$$

Оскільки

$$B(x, y) = C(x, y) + D(x, y),$$

то, отже, будь-яка білінійна форма є сумою симетричної та кососиметричної форм.

Література

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. К. : Видавничополіграфічний центр “Київський університет”, 2016. 255 с.
2. Авдєєва Т.В., Шраменко В.М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Збірник задач для студентів 1 курсуФМФ НТУУ «КПІ». НТУУ «КПІ», 2016. 206 с
3. Кушлик-Дивульська О.І., Поліщук Н.В. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: навч. посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 141 с.
4. Дзюбак Л. П., Іглін С. П., Лінник Г. Б., Морачковська І. О. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв’язання: навчальнометодичний посібник. Х.: НТУ "ХПІ", 2013. 240 с.
5. Городецький В. В., Колісник Р. С., Сікора В. С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник. Чернівці, 2014. 336с. (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист погодження № 1/11-4239 від 26.03.2014 р.)
6. Рокіцький І.О., Панасенко О.Б. Застосування лінійної алгебри. Вінниця : Вид. Главацька Р. В., 2012. 240 с.
7. Холькін О.М. Курс вищої математики : у 3-х частинах : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. М-во освіти і науки України, Приазовський державний технічний університет. Маріуполь : ПДТУ, 2011. Ч.1 : Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. 2011. 175 с.