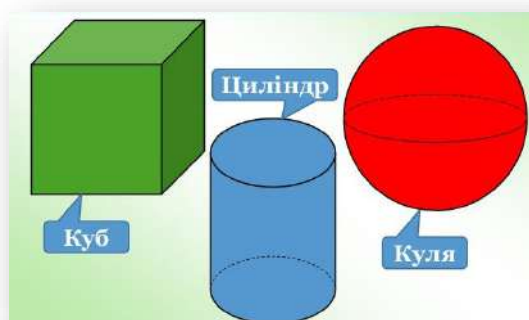
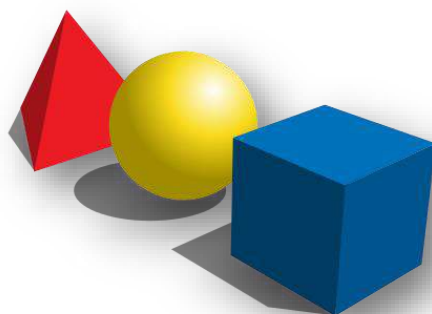


Житомирський державний університет імені Івана Франка
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Іван Ленчук, Микола Працьовитий

ПОЗИЦІЙНА СТЕРЕОМЕТРІЯ, НАЙПЕРШІ ЗАДАЧІ

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти



Житомир, 2026

УДК 514.14
ББК 22.151я7

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 11 від 29 травня 2026 року)

Рецензенти:

Доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики Українського державного університету імені М. П. Драгоманова

Олександр Школьний

Доктор педагогічних наук, професор кафедри алгебри та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

Ольга Матяш

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри та геометрії
Житомирського державного університету імені Івана Франка

Василь Михайленко

Іван Ленчук, Микола Працьовитий. Позиційна стереометрія, найперші задачі:

Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2026. 103 с., 63 рис.

Навчальний посібник уміщує теоретичні відомості за обраною темою, стислу інформацію стосовно підходів до розв'язування базових задач, систему вправ для самостійного розв'язання та добірку задач для практичних занять із таких підтем: «Основні позиційні задачі», «Найперші задачі стереометрії», «Перерізи тіл площиною», «Оптимізація перерізів», «Перерізи кулі, конуса і циліндра площиною». Наявні також контрольні питання, тренувальні вправи, задачі для самостійної роботи, приклади покрокових міркувань у задачах.

*Для студентів фізико-математичних факультетів закладів вищої освіти,
для викладачів конструктивної геометрії*

© Ленчук Іван, Працьовитий Микола, 2026
© Житомирський державний університет
імені Івана Франка, 2026

ЗМІСТ

РОЗДІЛ I	2
Передмова	2
§1. Зображення основних геометричних об'єктів простору. Позиційна визначеність зображень	5
§2. Основні позиційні задачі. Задачі з перших розділів стереометрії	9
Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації	25
Контрольні запитання	27
Тренувальні вправи і завдання	28
Приклади міркувань у покроковому моделюванні пропозицій	28
РОЗДІЛ II	35
Перерізи тіл площиною	35
§1. Моделювання перерізів багатогранників площиною	35
§2. Пізнавально-візуальний підхід в опорядженні методів побудови перерізів тіл площиною	48
2.1. Побудовна оптимізація методу внутрішнього проєкціювання	54
2.2. Умоглядна та змістовна функції сліду площини на повному проєкційному кресленні стереометричного тіла	63
§ 3. Моделювання одно-картинним зображенням перерізу кулі площиною	69
§ 4. Установлення типу та побудова опорних точок кінчних перерізів	74
Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації	82
Контрольні запитання	88
Тренувальні вправи і завдання	89
Приклади міркувань у покроковому моделюванні пропозицій	91

РОЗДІЛ I



«Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити і розмірковувати»

Г. Галілей

ПЕРЕДМОВА

До найважливіших передумов становлення творчої особистості відносять цілеспрямовану, системну працю на розвиток, упорядкування і довершеність природних задатків мислення просторовими формами тривимірного світу. Дієвим чинником, одним із складових компонентів досягнення позитивних результатів засобами геометрії в цьому сенсі є, щонайперше, прищеплення навичок і вмінь *якісного виконання формально-обчислювальних, графічних і графоаналітичних операцій* із певною мірою абстрактними, в переважній більшості випадків описаними вербально та лише потім відображеними в уявленнях, а отже, реально відсутніми тривимірними об'єктами. Тож у роботі вчителя з учнями ці своєрідні орієнтири діяльності мають зайняти гідне місце на самому початку опанування найпершої з наук.

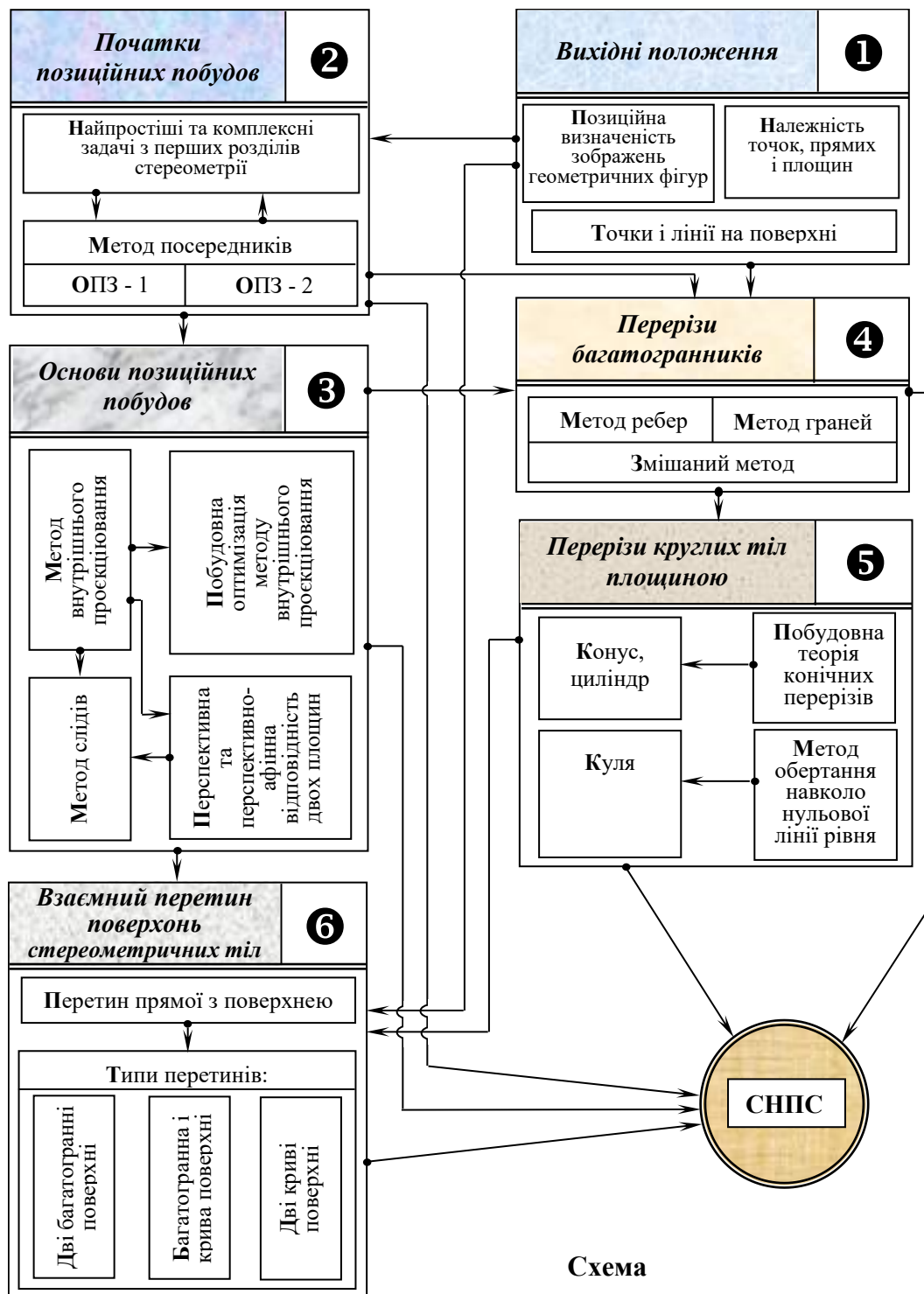
У повсякденному професійному виявленні, творчому зростанні вчителя особливо цінуються вміння виконувати крейдою на класній дошці досконалі рисунки до теорем і задач. Закономірні проєкційні креслення, що з'являються в динаміці дій паралельно поясненню геометричних фактів, у пізнавальному плані значно корисніші, ніж готові плакати чи моделі, оскільки вони яскраво і наочно ілюструють думку вчителя в той самий час, коли його слухають учні. Щербина В. В. говорив, що *рисунок нарівні зі словом і письмом є методом передачі думки, часто-густо єдиним і незамінним. Іноді буває важко, а деколи й неможливо, висловити те, що легко передається за допомогою схеми, нарису чи ескізу.*

Об'єктивно першоджерелом формування вихідних геометричних понять і уявлень є предмети, які оточують усіх нас. Спроможність «бачити» геометрію навколо себе, аналізувати, зіставляти об'ємні форми, виділяти в побаченому визначальне, суттєве і абстрагуватися від другорядного, несуттєвого, слід вважати неабияким хистом, що потребує всілякої підтримки та інтенсивного розвитку. Зусилля вчителя, спрямовані на осмислене формування і розвиток таких здібностей учня, без сумніву призведуть у підсумку до *відображення і закріплення у свідомості останнього зримих образів багатьох геометричних фігур та стрижневих міжелементних співвідношень*. Тут, із метою з'яви та накопичення в мозку учня якомога більш яскравих геометричних уявлень, як допоміжний засіб навчання можуть знайти своє місце моделі. Далі, шляхом використання моделей або ж без них, слід *тренувати вміння учня викликати у власних уявленнях та уяві ті чи інші умовно-реальні геометричні об'єкти*, тобто

– мислити абстрактними просторовими конструкціями. Корисно послатися, наприклад, до добре продуманих психолого-педагогічних тестів чи завдань. Найкраще ж продовжити такі розумово-розвивальні тренування через вправи уявлення геометричних фігур за їх зображеннями (читання креслень) і зображення фігур з уяви (виконання творчих креслень), що згодом сприятиме вирішенню конструктивними методами наступної за складністю проблеми: придбання навичок і вмінь *графічно оперувати з геометричними образами*, відсутніми в оригіналі та лише зображеними на картинній площині. Тобто не просто уявляти геометричні фігури, а й розв'язувати найрізноманітніші питання стосовно їх взаємного розташування і, навіть, розмірів. Упередженими з цього приводу, надто категоричними в судженнях були В. Є. Михайленко та І. Ф. Тесленко: *«Найдійовішим засобом розвитку в учнів просторових уявлень і просторової уяви є розв'язування геометричних задач на побудову. Особливо важливі і потрібні ті задачі на побудову в просторі, які розв'язуються на проєкційному кресленні»* [8, с. 30].

Чимало інших учених-геометрів у своїх численних працях методично виважено обґрунтовують доречне застосування в навчальному процесі вже знайомих нам креслень-картин. Вони стверджують, що креслення-картини тренують просторові уявлення учнів, допомагають у пошуку методу і шляху розв'язання будь-якої задачі, однак вони не надають можливості фактично розв'язувати стереометричну задачу на кресленні, схоже на те, як це відбувається в нарисній геометрії і як це вимагається при вирішенні різноманітних творчих задач прикладної геометрії в реальному житті, в науці та техніці. В цьому, на думку видатних педагогів, «криється серйозний недолік такої методики». Прогалина, про яку йдеться, дається взнаки в першу чергу в коледжах і ліцеях у засвоєнні геометрії, креслення та інших загальноосвітніх предметів, а також шкодить молодим людям, які мріють здобути інженерно-технічну професію. В університетах вони тривалий час надто важко адаптуються до предметів геометрично-графічного циклу саме тому, що в школі не тренуються належним чином мислити просторовими категоріями, зокрема, в них геть відсутня практика розв'язування задач на кресленнях-моделях.

Багато хороших книг-посібників для вчителів написано з означеної тематики відомими геометрами. Одні автори схиляються до виваженого і ґрунтовного висвітлення питань стереометричних побудов за принципом «від простого до складного», інші ставлять собі за мету здійснити типізацію стереометричних задач (зокрема, й конструктивних) за їх висновком і геометричним змістом, а ще інші досить повно обґрунтовують дії виконавця в процесі розв'язування непростих позиційних і метричних задач відповідно як на кресленнях-картинах, так і на кресленнях-моделях. Всі вони приділяють значну увагу задачам на перерізи тривимірних тіл площиною загального розташування, підкреслюючи, що основними позиційними задачами є задачі на відшукання *точки перетину прямої із площиною* та *лінії перетину двох площин*, а також формулюють правила-орієнтири дій у випадку пошуку розв'язань кожної з названих основних позиційних задач на проєкційному кресленні.



Парадоксально, але тексти жодної із книг не мають вичерпно зрозумілих і напрочуд простих, природно закономірних тлумачень уявлених нюансів цих принципово важливих задач, не ставляться авторами чіткі запитання, які логічно впливають зі сформульованих алгоритмів дій: «Чому так, а не інакше розв'язуються основні позиційні задачі?»; «У чому полягає геометрична суть кожної операції при уявній чи графічній реалізації означених алгоритмів?»; «Як змістовно і конструктивно-генетично пов'язані між собою, в чому споріднені та (можливо) суперечливі основні позиційні задачі?»; «Якщо вони дійсно в чомусь суперечливі, то яким чином в їх графічних реалізаціях позбавляються цієї суперечливості?». Зрозуміло, відсутні також і чіткі відповіді на такі запитання за

обставин, коли якраз вони розкривають ідею і внутрішню суть, обґрунтовують геометричне підопліччя *методу посередників*, який наскрізь пронизує курси конструктивної та прикладної стереометрії.

§1. Зображення основних геометричних об'єктів простору. Позиційна визначеність зображень

Спочатку якомога коротко пригадаємо уявлювану просторову конструкцію методу паралельного проєкціювання і з'ясуємо, водночас, питання позиційної визначеності (повноти) стереометричних зображень, виконаних із дотриманням властивостей цього методу (порівняно з викладками в переліку літературних джерел, тут міркування проведемо дещо в іншому ракурсі).

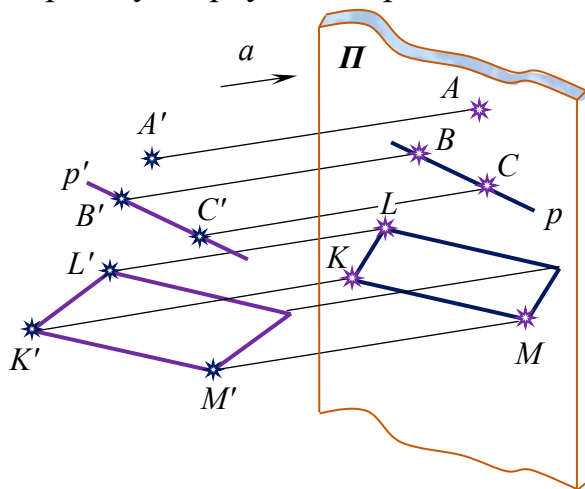


Рис. 1.1

Нехай площина Π (рис. 1.1) є картинною площиною, а a – напрямом проєкціювання ($a \nparallel \Pi$). Візьмемо трійку найпростіших об'єктів геометрії: точку A' , пряму p' і площину Σ' загального розташування відносно обраної площини проєкції Π . Проєціюємо A' , p' і Σ' на площину Π за напрямом a . В результаті одержимо їх паралельні проєкції A , p і Σ , відповідно. Виключно так будь-який просторовий об'єкт або комплекс кількох об'єктів перетворюється у свою

паралельну проєкцію на визначеній картинній площині Π , чим, власне, й користуються у практичній стереометрії. Тепер абстрагуємося в думці від оригіналу, тобто уявимо собі лише площину проєкції Π і зображення на ній уже згаданих точки, прямої і площини, виконані за описаним сценарієм. Запитується, чи можна за цим кресленням установити взаємне розташування в просторі перерахованих геометричних об'єктів? Безумовно, що не можна! Єдине, в чому ми впевнені категорично, то це, що точка A' не належить прямій p' . На запитання «Як взаємно розміщені дані точка і площина, пряма і площина?» або (знаючи напевне, що пряма не паралельна площині) «Як зобразити спільну точку прямої і площини?», дати однозначну відповідь неможливо, оскільки так одержані зображення найпростіших геометричних фігур на площині Π об'єктивно не вміщують у собі відповідної зворотної інформації, тобто вони є позиційно невизначеними.

Подолати невизначеність, досягти позиційної злагоди на цьому кресленні пропонується наступним прийомом. Побудуємо спочатку паралельні проєкції точки A' і прямої p' ($B'C'$) на площині Σ' ($K'L'M'$) за деяким напрямом a' , не паралельним Σ' , а потім проєціюємо одержану просторову модель на площину зображень Π за напрямом a , тобто виконаємо не одне, а вже **два** упорядковані проєкціювання. Матимемо зриму (рис. 1.2) графічну ситуацію, в якій дані точка, пряма і площина вже не будуть окремо взятими об'єктами геометрії, будь-як взаємно розміщеними в просторі, а такими, які жорстко пов'язані між собою

цілком певною стереометричною фігурою, в нашому конкретному випадку – зрізаною призмою. Нижня основа трикутної призми – трикутник $A_1B_1C_1$ – належить площині Σ' , її верхня основа (зріз призми) визначена заданим трикутником $A'B'C'$, а бічні ребра $A'A_1$, $B'B_1$ і $C'C_1$ є проєкціювальними прямими для точок A' , B' і C' на Σ' за напрямом a' відповідно. До речі, такий зв'язок між точкою, прямою і площиною можна принагідно встановити не лише через паралельне проєкціювання за визначеним напрямом a' , а й за допомогою центрального проєкціювання з визначеним центром проєкцій S' (рис. 1.3). У цьому випадку зв'язувальною стереометричною фігурою буде вже інший, добре відомий учням ЗЗСО багатогранник – піраміда $S'A_1B_1C_1$.

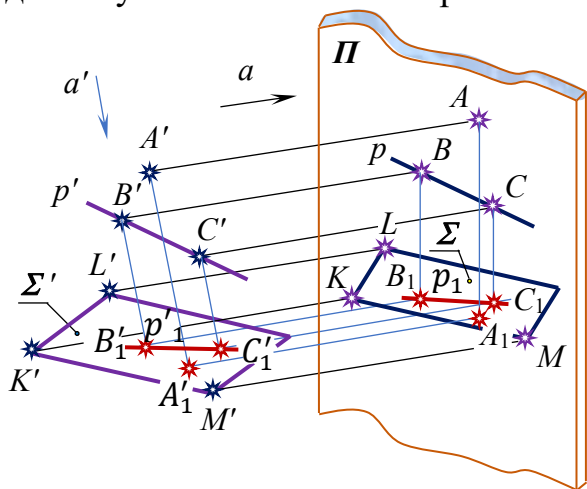


Рис. 1.2

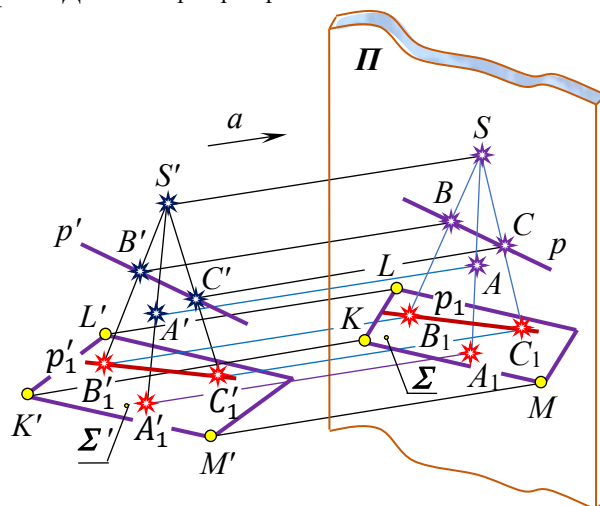


Рис. 1.3

Тепер на площині Π матимемо таке зображення призми (піраміди), на якому кожна вершина (точка чи ребро) багатогранника однозначно визначається не тільки зображенням самої точки ($A' \rightarrow A$, $B' \rightarrow B$, $C' \rightarrow C$, основи), а й зображенням її проєкції на площину Σ' ($A_1 \rightarrow A_1$, $B_1 \rightarrow B_1$, $C_1 \rightarrow C_1$). Інакше кажучи, на картинній площині Π побудовано не лише зображення точки A' , прямої p' і площини Σ' , а й зображення їх проєкцій на Σ' ($\Sigma'_1 \equiv \Sigma'$) разом із апаратом первісного паралельного (чи центрального) проєкціювання. Очевидно, що в такому унікальному варіанті уявлених дій позиційна поінформованість про заданий комплекс найпростіших фігур на екрані помітно зростає.

Отож, за введених умовностей, точка на площині проєкцій Π однозначно визначатиметься своїм власним зображенням і зображенням своєї ж проєкції на деяку площину Σ' . Тут точку A_1 , приміром, називають **вторинною проєкцією точки A'** , адже A' спочатку проєкціюють визначеним методом на площину Σ' у точку A_1 , а потім останню паралельним проєкціюванням – на площину Π в точку A_1 . Проєкціювання на площину Σ' , що в динаміці дій є першим, називають **внутрішнім**, оскільки воно виконується «всередині» призми чи циліндра, піраміди чи конуса. Внутрішнє проєкціювання може бути або паралельним (циліндричним), або центральним (конічним). Інше ж проєкціювання (друге в упорядкованій парі дій), тепер уже на картинну площину проєкцій Π , називають **зовнішнім**. Воно, відповідно до вибору методу зображень у реаліях педагогічного процесу ЗЗСО, завжди є виключно паралельним. При цьому площину Σ на

площині зображень називають **основною площиною**, оскільки вона є паралельною проєкцією площини основи Σ' певної пов'язуючої стереометричної фігури, а точки A_1, B_1, C_1 – **основами точок** A, B, C відповідно. Нарешті, відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 , що зображають на картинній площині Π промені внутрішнього проєкціювання $A'A'_1, B'B'_1$ і $C'C'_1$, називають, за вже усталеною термінологією,

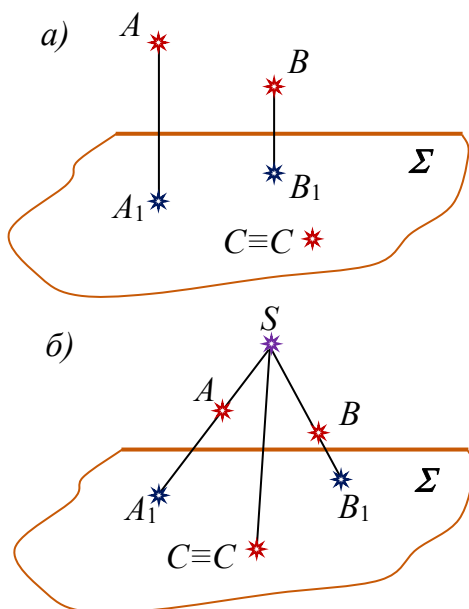


Рис. 1.4

«**шпичками**» внутрішнього проєкціювання.

Таким чином, будь-яка з'ява визначеного (в певному розумінні) зображення на картинній площині обов'язково передбачає спочатку **внутрішнє**, а потім **зовнішнє** проєкціювання, а також (про що не варто забувати) подібне перетворення плоскої фігури (моделі), яка є паралельною проєкцією того чи іншого просторового об'єкту. Останній факт, як відомо, впливає з означення зображення.

За цих обставин, *усяка точка простору вважається заданою на проєкційному кресленні, якщо на ньому (рис. 1.4) показано точку і її паралельну (центральну) проєкцію на основну площину (основу).*

У свою чергу, якщо на моделі кожна точка стереометричної фігури є заданою (A, A_1), то зображення такої фігури називається **позиційно визначеним** або **повним**. Іншими словами, зображення просторової фігури буде повним, якщо всі її елементи задані.

Уважний читач напевно пригадує, що питання позиційної визначеності (повноти) однокартинних проєкційних креслень уже розглядалося нами раніше [6], хоч і принципово на іншій основі – з посиланнями до аксонометричних проєкцій. Однак у першому варіанті, та й зараз, як неважко переконатися, результат не змінюється, а тому висновки щодо графічного задавання точки (фігури) в обох трактуваннях ідентичні.

Не зашкодить також додати таке. Оскільки будь-яка пряма однозначно визначається двома своїми точками, а всяка площина – трійкою неколінеарних точок, то вмюючи задавати повні зображення точок, очевидно просто задавати позиційно визначеними зображеннями прямі та площини. При цьому не потрібно забувати, що *будь-яку пряму чи площину, паралельну обраному напрямку проєкціювання, називають проєкціовальною*.

Зокрема, *площина, яка вмює проєкціовальну пряму, є проєкціовальною*. Наприклад (рис. 1.5), шпичка BB_1 у площині Δ – проєкціовальна, отже площина Δ теж проєкціовальна, а пряма C_1D_1 – її вироджена проєкція. Цей факт, як результат дії проєкціювання за напрямом $A \rightarrow A_1$, варто вважати частинним випадком ознаки перпендикулярності двох площин ([10], §3, п. 15).

Уявимо собі довільну пряму, задану на проєкційному кресленні двома різними точками $A(A_1)$ і $B(B_1)$ (рис. 1.6). Якщо відмітимо на цій прямій будь-яку точку M , то легко знайти її основу M_1 . Для цього досить через точку M провести

шпицю $MM_1 \parallel AA_1$ до перетину з основою A_1B_1 заданої прямої AB . Одержимо шукану точку M_1 (пригадайте властивості паралельних проєкцій).

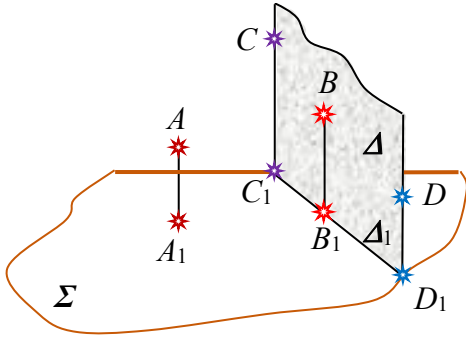


Рис. 1.5

Розглянемо тепер площину, яка задана на повному проєкційному кресленні деякою трійкою неколінеарних точок $A(A_1)$, $B(B_1)$ і $C(C_1)$ (рис. 1.7). Візьмемо на цій площині будь-яку точку M . Безсумнівно, що і в цьому випадку для точки M можна легко знайти її основу M_1 , оскільки всім відомо, що точка належить площині тоді, коли вона лежить на деякій прямій заданої площини; пряма ж належить площині, якщо дві точки цієї прямої лежать у площині. Тому проведемо, наприклад, пряму площини AM до перетину із прямою BC у точці N . Основу N_1 точки N знаходимо так, як це було продемонстровано вище. Після цього, скориставшись ще однією шпицею, на прямій A_1N_1 знаходимо основу M_1 точки M . Як результат маємо, що деяка точка, яка належить заданій прямій чи заданій площині, є також заданою, а її основа легко будується на проєкційному кресленні.

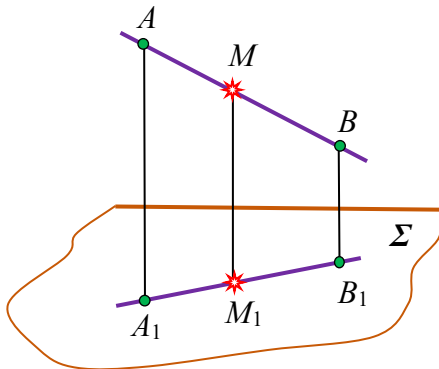


Рис. 1.6

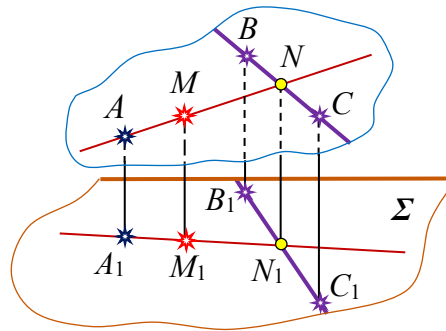


Рис. 1.7

Такі прості міркування індукують евристичне правило-допуск грамотного, чіткого виконання графічними методами позиційних операцій на проєкційних кресленнях. Із цього приводу один з відомих геометрів зазначав, що *визначаючи нові точки, прямі і площини через уже задані, ми завжди будемо мати на кресленні зображення фігур, всі точки яких є заданими. Основи таких точок, як було показано, визначені на кресленні. Це дозволяє нам розв'язувати задачі на точки, прямі, площини і утворені ними фігури на кресленні, як у самому просторі. Таким чином, учні привчаються уявляти просторові фігури і виконувати над ними ті чи інші операції.*

Отож, щойно остаточно з'ясовано умовну динаміку і геометричну сутність методу моделювання зображеннями будь-яких просторових фігур за допомогою упорядкованого подвійного проєкціювання. Й це, за певних суб'єктивних обставин, забезпечить правильність та наочність, а отже якість зображень фігур на картинній площині, що посприяє виконанню наперед передбачуваних, результативних (однак, поки що, дещо обмежених за змістом) побудов на позиційно визначеному проєкційному кресленні.

Немає жодних сумнівів, що *повні зображення цілком характеризують об'єкт позиційно*. За ними робиться фаховий висновок про розміщення окремих елементів

даного об'єкта відносно інших. На них можна графічними методами шукати і знаходити спільні елементи (інциденції) кількох заданих кресленням геометричних об'єктів, тобто візуально розв'язувати позиційні задачі (що й буде продемонстровано далі). **Інциденцією** ж геометричних фігур називається, як відомо, їх спільний елемент, який цілком визначається цими фігурами. Наприклад, інциденцією двох різних точок є пряма, яка визначена цими точками; інциденцією трьох неколінеарних точок є площина, що проходить через ці точки; інциденцією прямої і площини є їх точка перетину; інциденцією двох площин є пряма їх перетину; інциденцією конуса і площини є конічний переріз і т. ін.

§2. Основні позиційні задачі, Задачі з перших розділів стереометрії

Ми змушені констатувати, що сьогодні традиційно в основу викладання й учіння евклідової геометрії покладено формально-логічний підхід. Учитель, учень «не помічають» **конструктивної** складової підручника «Геометрія». Як наслідок, середньостатистичний випускник ЗОНЗ слабо розуміє структуру дисципліни, не у змозі чітко класифікувати фігури, плутає поняттями і фактами, не вміє належним чином користуватися ними в пошуках розв'язків задач середнього ступеня складності на обчислення. Мова не йде про задачі на доведення і, тим паче, на побудову. Матеріал, викладений у підручнику, не засвоюється свідомо і в повному обсязі. З іншого боку, в університетах елементарній геометрії теж не приділяється достатня увага, хоч вона за своєю природою є категоріально-понятійною і змістовою основою всіх предметів геометричного циклу. Мимоволі виникає запитання: «Чому студент-математик, навчаючись, не у змозі якісно осилити початки диво-науки, грамотно донести її концепцію, методологію і змістову складову до дітей у власній професійній діяльності на посаді вчителя? Чи не є це свідченням *кризових* тенденцій на вітчизняній освітянській ниві?».

Геометрії належить особливе місце серед природничо-математичних наук, адже вона вирізняється своєю *винятковою естетичною привабливістю, візуально підкресленою красою*. **Найпершу з наук** древні вважали **неперевершеною школою мудрості**. Належне опанування дисципліни «Геометрія» розвиває і шліфує мислення. В XVII столітті Б. Паскаль із цього приводу писав: «Серед рівних розумом – при однакових інших умовах – має перевагу той, хто знає геометрію». Йому вторує Ф. Прокопович: «А якщо хтось ґрунтовніше бажає пізнати переваги, які має геометрія, нехай знає, що жодна з наук про полегшення й покращення людського життя без неї не змогла б виникнути, ні вдосконалюватись. І відомо з досвіду, що народи, які опанували цю науку, в будь-якому мистецтві переважають інші, бо й інші народи також мають засоби, але не досконалі й не прикрашені, тоді як у тих народів, які знають геометрію, *навіть найпростіші речі мають якусь особливу красу*» [11, с. 105]. Ще більш вражає, що не байдужим до диво-науки був один із відомих поетів, який писав, що *натхнення потрібне в поезії, як і в геометрії*. Вислів гідний поваги. А для шанувальників геометрії – утішне порівняння! Свідченням цього є ще більш ранній історичний факт. Біля входу до Академії, заснованої старогрецьким філософом-ідеалістом і

геометром Платоном (438-347 рр. до н. е.), було викарбовано напис: «*Не заходь незнаючий геометрію*».

Яскраво, красномовно ідеалізував геометрію один із відомих академіків, який говорив, що особливість елементарної геометрії серед інших складових математики полягає в тому, що вона *об'єднує в собі сурову логіку з наочним уявленням, логічний аналіз – із цілісним синтетичним сприйняттям предмета*. Якщо конкретно, то за суттю своєю *геометрія і є не що інше, як органічне поєднання суворої логіки з наочним уявленням: наочне уявлення пронизане і організоване суворою логікою, і логіка, пробуджена наочним уявленням*. Там, де немає однієї з цих складових, немає і справжньої геометрії.

Відомий математик констатував *нерозривне переплетіння в геометрії логіки речей з їх наочним уявленням*. Тут одне без іншого не животворне. До того ж, як свідчить досвід, *лише методи умоглядного конструктивізму в змозі ефективно представити такі тісні зв'язки*. Без професійного навчання курсу «Конструктивна геометрія», *головним діючим об'єктом якого є геометрична фігура, а головним засобом навчання – візуальний рисунок* (зображення, модель), неможливо викликати справжній, живий інтерес до дисципліни і досягти системного засвоєння суб'єктами навчання такого потужного, самобутнього, специфічного методу пізнання світу, яким визнано геометрію. *Опанування цього методу – одна з найбільш важливих цілей освіти!* І, перш за все, для особи, яка мріє пов'язати своє майбутнє з математикою.

Конструктивізм математичний – це окремий напрямок у математиці й побудовані на цій основі математичні теорії. За його канонами, основним у побудові математичних теорій є **конструктивно-генетичний метод**. Згідно з цим методом, будь-який математичний об'єкт і твердження про нього мають бути результатом діяльності мислення з побудови в оригінальних вираженнях більш складних конструкцій із більш простих, за певними, простими і легко контрольованими правилами (алгоритмами) дій, які дозволяють за допомогою скінченного числа кроків, скінченного числа операцій за скінченний час однозначно одержати результуючу конструкцію.

Коли ж, зокрема, йдеться про **конструктивізм геометричний**, то маються на увазі *побудови, конструювання*, що в перекладі з латині цілком відповідає суті терміну «*construktivus*».

Методика навчання математики, як відомо, є педагогічною наукою про *цілі, зміст, методи, форми і засоби* передачі учням математичних знань, про виховання дисципліною у процесі навчання. *Геометричний конструктивізм* слід обрати стрижневим **методом** професійного *опанування науки «Геометрія»*, яка історично є одним із найдревніших пам'ятників людства, «... *феноменом загальнолюдської культури*».

З огляду на зміст, структуру, функції та особливості евклідової геометрії в контексті її природного конструктивізму ми ставимо за мету на переконливих прикладах з'ясувати істинний потенціал посібника для розвитку наочно-образного й логічного мислення учнів, подати зразки істинної геометризації теоретичних фактів і задач, вирізнення графічних та графоаналітичних методів їх закономірних реалізацій.

Ми певні, не варто зараз марно повторювати ШКГ, оскільки знайомство з елементарним курсом відбувається за обраним підручником. Потрібно, як уже відзначалося, в динаміці дій візуалізувати ще не усталені знання шляхом їх покрокового унаочнення, навчитися мітко вилучати із власної пам'яті доречні істини з метою їх педагогічно виваженого залучення до розв'язування різних за характером і рівнем складності пропозицій. У творчо-практичній діяльності учень ґрунтовно, ефективно переосмислить усі геометричні поняття, факти і закономірності, а набуті вміння прискіпливо аналізувати підручник на предмет його конструктивізму буде вельми корисним.

Змістовною складовою третього пункту § 1 підручника для ЗЗСО, із назвою «**Перетин прямої із площиною**», є лише теорема про належність прямої площині. Після її короткого, але строгого доведення зроблено такий висновок: «Із теореми 1.2 випливає, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці» ([10, с. 5], рис. 5). В учня, який звик міркувати, виникають принципово важливі запитання: «Чи відповідає назва пункту його змісту?»; «Чому вербально і на рисунку не реалізована суть задекларованого в пункті питання?»; «Як побудувати точку перетину прямої із площиною?». Напевно, що професійно підготовлений, грамотний педагог зумів би дати відповідь на ці запитання, із честю подолати прикру **недоговореність** у книжковому викладенні.

Як з'ясувалося, дві основні позиційні задачі на інциденції (ОПЗ-1, ОПЗ-2) розв'язується дуже просто, якщо в уявленнях і на наочних рисунках-схемах уміло скористатися одним із найперших неозначуваних відношень у геометрії («належності» точок, прямих і площин) та послатися до загальногеометричного методу **посередників**.

Працюючи на *повних проєкційних кресленнях конструктивно* доводиться щоразу виконувати тривіальні, певною мірою стандартизовані побудови, які об'єктивно обов'язкові в пошуку графічних розв'язків багатьох задач у розділі «Стереометрія», оскільки останні де-факто є природною проміжною ланкою в послідовності дій, які пов'язують задані в умові геометричні об'єкти з шуканими. Сама окремо взята побудова визначеного типу належить до класу так званих *найпростіших* (або елементарних) *позиційних задач*.

Змоделюємо спочатку ОПЗ-1 і ОПЗ-2 в найпростішому їх варіанті.

Задача 1. *Нехай задано точки $A(A_1)$ і $B(B_1)$, що не лежать в основній площині. Потрібно знайти точку перетину прямої AB з основною площиною.*

Вихідним, стрижневим поняттям у самій суті цієї задачі, яке вичерпно обґрунтовує побудову на кресленні точки $X = AB \cap \Pi$ (рис. 1.8), є відношення «належати» («лежати на»). Останнє, що надто важливо, входить до гурту основних понять. Учні інколи недооцінюють значущість неозначуваних основних об'єктів геометрії та основних відношень між ними, достеменно не знають, яке особливе місце вони займають у практичній геометрії; не те, що не вміють кваліфіковано в тій чи іншій ситуації скористатися основними поняттями, але й не спроможні дотепно виконувати найпростіші побудовні дієства з точками, прямим і площинами, як наприклад: «Можна побудувати точку, яка напевно належить побудованій фігурі», «Можна побудувати точку, яка напевно не

належить побудованій фігурі».

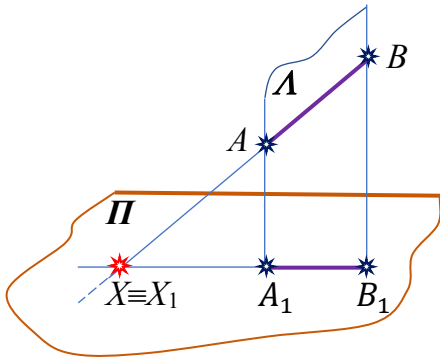


Рис. 1.8

На етапі введення учня в планіметрію (7 кл.) й, тим паче, у стереометрію (9 кл.), такий стан справ із постановкою навчання слід вважати стратегічним прорахунком вчителя. Це надто шкідливо також у психолого-педагогічному сенсі, адже нерозуміння понятійних основ, азів першопредмету не мотивує учіння предмету і не сприяє його свідомому засвоєнню. Зняти ж проблему можна винятково шляхом системного розв'язування саме тих позиційних пропозицій стереометрії, які розв'язуються конструктивними

методами, розпочавши з вихідних, стрижневих, в яких обійтися без основних понять просто неможливо.

Таким чином, у сформульованій задачі мова йде про точку, що належить позиційно визначеній прямій, тому її будь-яка проєкція належить відповідній проєкції прямої ([6], ч. I, р. I, §3, вл.3°). AB є паралельною проєкцією прямої простору $A'B'$ на площину дошки (зошита), а A_1B_1 – її вторинною проєкцією, тому X належить AB , а X_1 – A_1B_1 . Проте, як точка X (за умовою), так і пряма A_1B_1 (основа AB) належать ще й основній площині Π , а тому звідси прямо випливає, що $X \equiv X_1$ і $X(X_1) = AB \cap A_1B_1$.

Очевидно, що у випадку, коли таку точку X на кресленні «без меж» знайти неможливо, тобто AB і A_1B_1 не перетинаються, то це означає, що пряма AB розташовується паралельно основній площині. **Пряму, паралельну основній площині, прийнято називати прямою рівня.**

Точку X називають слідом прямої AB на основній площині. Пряма A_1B_1 є, при цьому, слідом (слід-проєкцією, виродженою проєкцією) площини Λ , що визначається парою паралельних проєкціювальних променів (шпиць) AA_1 і BB_1 й яку також називають **проєкціювальною** (п. 1.1). **Слід-проєкція (A_1B_1) проєкціювальної площини (Λ), як уже відомо і що надто суттєво в процесі відшукування інцидентій заданих геометричних об'єктів, має збиральну властивість: основа будь-якої точки, прямої чи плоскої фігури, розташованої у проєкціювальній площині, належить слід-проєкції цієї площини.**

Задача 2. Нехай задано точки $A(A_1)$, $B(B_1)$ і $C(C_1)$, які не належать одній прямій і не лежать в основній площині. Потрібно побудувати лінію перетину площини $\Sigma(ABC)$ з основною площиною.

Оскільки пряма перетину даних площин (рис. 1.9) цілком визначається двома точками, спільними для них, достатньо двічі скористатися задачею 1: 1) знайдемо точку X , в якій пряма AB перетинає основну площину (X – слід прямої AB); 2) знайдемо точку Y , в якій пряма BC перетинає основну площину (Y – слід прямої BC). XY й буде шуканою прямою.

Пряму XY називають слідом площини загального розташування $\Sigma(ABC)$ на основній площині. Очевидно, що коли площина Σ не має сліду, то вона паралельна основній площині. **Площину, паралельну основній площині,**

називають *площиною рівня*. Безумовно, що всяка пряма площини рівня є, у свою чергу, прямою рівня.

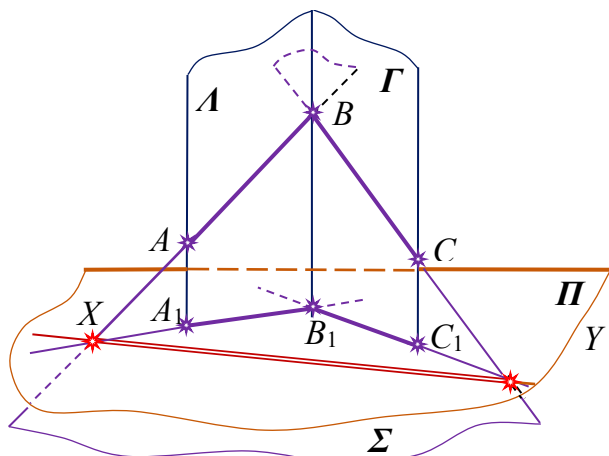


Рис. 1.9

З метою структурування та уявлюваної алгоритмізації процесу позиційних побудов у цілому, спробуємо зосередитися не стільки на вже зрозумілих нам результатах елементарних графічних операцій в кожній із двох розглянутих найпростіших задач на інциденті, скільки на аналізі та оцінці внутрішніх просторових взаємозв'язків між заданими умовою, задіяними в

конструкції і побудованими найпростішими геометричними об'єктами. Адже ми зараз мали справу із задачами на побудову спільних елементів чи то прямої AB , чи то площини $\Sigma(ABC)$ загального розташування і деякої площини Π (у поданій вище ситуації остання займає частинне розташування, вона є площиною *нульового рівня*). Раніше вже відмічалось, що задачі на перетини прямої і площини та двох площин є основними позиційними в теорії і практиці конструктивної стереометрії. У зв'язку з цим, з одного боку, поставимо собі за мету чітко розчленувати за кроками (диференціювати) процес розв'язування цих двох задач, хоча б, спочатку, в частинному випадку, а з іншого, – узагальнити та систематизувати його у найбільш загальному випадку.

Отже, для обґрунтування схеми пошуку на проєкційному кресленні точки $X = AB \cap \Pi$ (рис. 1.8) можуть бути задіяні ще й такі елементарні і, водночас, не менш переконливі та логічно незаперечні умовиводи. Вже відомо, що пара паралельних проєкціювальних прямих AA_1 і BB_1 визначають проєкціювальну площину Λ , яка містить ці прямі. Оскільки пряма AB і її проєкція A_1B_1 на основну площину Π лежать у площині Λ , то їх точка перетину X і буде шуканою, що не підлягає сумніву. Тепер, залучивши до справи уявлення та зумисне перефразувавши останню ситуаційно просту конструкцію, подамо її конкретизованим уявно динамічним правилом-орієнтиром дій у три кроки: **1)** введемо в розгляд проєкціювальну площину Λ ($AA_1 \parallel BB_1$), яка містить задану пряму AB ; **2)** зафіксуємо на моделі пряму A_1B_1 , спільну для площин Λ і Π ; **3)** знайдемо точку X перетину прямих AB і A_1B_1 , розташованих у площині Λ . Очевидно, що компактний, чітко алгоритмізований, строго упорядкований варіант міркувань теж має право на існування. Окрім цього, в умовах вираженого запровадження в процес навчання геометрії інноваційно-комунікаційних технологій, він справді може бути затребуваним.

Побудову ж прямої XU перетину двох площин $\Sigma(ABC)$ і Π із задумом, свідомо розіб'ємо на два ідентичні етапи (рис. 1.9). Насамперед, через очевидний, зумовлений конструктивними обставинами алгоритм дій у три кроки шукаємо точку X : **1)** введемо в розгляд проєкціювальну площину $\Lambda(AA_1 \parallel BB_1)$; **2)** зафіксуємо прямі AB і A_1B_1 перетину площини Λ із площинами Σ і Π

відповідно; **3)** знайдемо точку X перетину прямих AB і A_1B_1 , котрі належать площині Λ . Точка X є шуканою. Іншу спільну точку Y , спільну для заданих площин, знаходимо аналогічно.

Цікаво, що нововведені в переліку операцій проєкціювальні площини та прямі їх перетину з кожною із заданих площин ($\Sigma(ABC)$ і Π) виконують, фактично, роль елементів апарату внутрішнього проєкціювання та є, відповідно, результатом дії такого перетворення. Отже, бажаємо ми цього чи не бажаємо, а геометрично визначені та формально зафіксовані в побудові об'єкти вже природно присутні (зображені) на проєкційному кресленні. І якими б словесними обґрунтуваннями ми не супроводжували хід задачі, алгоритм дій «у три кроки» в ньому обов'язково матиме місце.

Таке (як на перший погляд, штучне) алгоритмізоване тлумачення основних позиційних задач із площиною Π в особливому (частинному) розташуванні має обґрунтовано серйозне геометричне підґрунтя. Далі слід провести цікаве *узагальнення* одержаних результатів і сформулювати надто важливий для позиційної геометрії **висновок**.

Тепер уявимо собі пряму m і площину Σ розташованими загальним чином одна відносно іншої в евклідовому просторі (рис. 1.10). Поставимо **задачу відшукування точки K , що належить заданій прямій m і площині Σ** . Отже, потрібно сконструювати алгоритм побудови їх спільної точки (*інциденції*). Незалежно від виду проєкційного креслення, на якому доведеться працювати (Г. Монжа, стандартному аксонометричному чи при вільному виконанні зображень), відразу ж постає природне запитання: «Коли будь-яка точка належить площині?». Як уже не один раз зазначалося, на нього є чітка відповідь ([10], §1, теорема 1.2): «Тоді, коли ця точка лежить на деякій прямій (скажімо, (1–2)) заданої площини». Але ж шукана точка K належить також і прямій m , тому m і (1–2) перетинаються саме в точці K . У свою чергу, дві прямі, які перетинаються, визначають, що також є не менш відомим фактом (там само, аксіома C_3), єдину площину. Нехай це буде, наприклад, площина Ω .

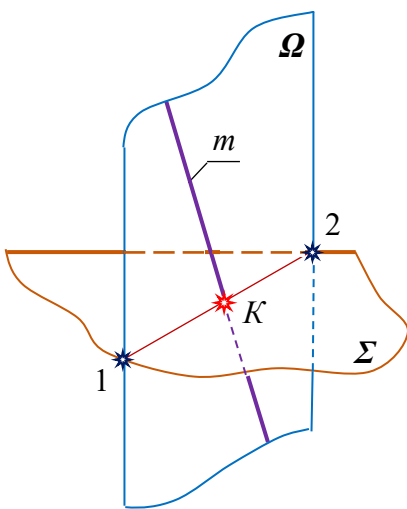


Рис. 1.10

А зараз забудемо на деякий час змістовну складову пропозиції, яку ми вирішуємо в уявленнях, наголосивши, що наведені певною мірою підсвідомо (інтуїтивно) звичні міркування, з посиланнями до елементарних понять логіки і геометрії, лежать на поверхні й у них, як з'ясувалося, передбачається наявність деякої (якої конкретно – з'ясуємо дещо пізніше) допоміжної площини Ω , якій напевне в динаміці умоглядних дій відводиться неостання роль.

Справді, щоб побудувати в заданій площині Σ пряму (1–2), якій гарантовано належить точка K заданої прямої m , потрібно, перш за все, ввести в розгляд згадану площину Ω , яка містить пряму m , і лише потім визначитися із прямою (1–2), як інциденцією двох площин Σ і Ω . На

завершення, в перетині прямих m і $(1-2)$ й зафіксуємо шукану точку K . Як бачимо, і в цьому найбільш загальному випадку розташування прямої m і площини Σ алгоритм побудови їх спільної точки K однозначно описується вже знайомими нам трьома побудовними процедурами: **1) через пряму m проведемо деяку допоміжну площину Ω ; 2) побудуємо пряму $(1-2)$ перетину заданої площини Σ і допоміжної площини Ω ; 3) знайдемо точку K перетину заданої і побудованої прямих m і $(1-2)$.**

З методологічної і психолого-педагогічної точок зору надто важливо, що природна реальність та чітка послідовність наведених кроків безсумнівні, очевидні учню, оскільки алгоритм візуальних графічних операцій індукується логікою простих і несуперечливих міркувань та обґрунтовується базовими геометричними поняттями і твердженнями.

Задля вичерпного розуміння суті описаного методу особливо корисно «бачити», що задача на відшукування точки K перетину прямої m і площини Σ включає в себе іншу задачу – на побудову прямої $(1-2)$ перетину двох площин Σ і Ω . З іншого боку, як уже відмічалось в частинному випадку вище, задача на відшукування прямої перетину двох площин, врешті-решт, зводиться до задачі на перетин прямої і площини. Зокрема, в одній із даних площин можна вибрати дві різні прямі та знайти точки перетину кожної з них з іншою площиною. Відтак, *обидві позиційні задачі тісно внутрішньо переплетені, споріднені одна з одною. Більше того, кожна з них розв'язується через іншу.* Таке взаємне включення вказує не лише на спорідненість, а й на суперечливість алгоритмів розв'язання цих задач. Ми опинилися неначе б то в «замкненому колі». На перший погляд, за законами логіки, здавалося б, що це – безвихідь, «глухий кут», однак, як ми зараз нижче з'ясуємо, ситуація може залишатися підконтрольною суб'єкту операції моделювання. Суть справи полягає в тому, що теоретично через пряму m проходить безліч, пучок площин із віссю m . Тому на проєкційному кресленні в названому пучку площину Ω потрібно вибрати *не будь-як, а педагогічно виважено, осмислено, вдало!* Так, щоб процес відшукування точок 1 і 2 прямої перетину був якомога простим, заздалегідь запрограмованим у зримих уявленнях, майже очевидним у побудові. Реально, на практиці рівень кваліфікації виконавця конструктивних дій проявляється саме у виборі площини Ω , й лише вдалий її вибір розриває згадане замкнене коло, ліквідує суперечливість. До речі, *вдало вибраною в переважній більшості випадків вважається допоміжна площина-посередник частинного розміщення – проєкціювальна або ж рівня.* Зокрема, проєкціювальна площина завше просто задається на будь-якому проєкційному кресленні та, завдячуючи збиральній властивості її слід-проєкції, забезпечує ефективний шлях до візуально-рисункового розв'язання задачі.

Заради повної поінформованості відмітимо (певною мірою, нагадаємо), що загалом й задачу на перетин двох площин загального розташування не обов'язково розв'язувати безпосередньо через першу з основних позиційних задач. Її також можна геометрично узагальнити, творчо перефразувати словами, звівши в конструктивній реалізації до послідовно строгого розв'язання двох однотипних задач на перетин площини загального розташування із помірковано,

вдало введеною щоразу за кмітливим вибором учителя (учня) площиною частинного розташування. Уявимо собі дві зовсім різні площини Σ і Λ , які розташовані загальним чином, пряму KL перетину яких потрібно знайти на проєкційному кресленні (рис. 1.11): **1) перетнемо задані площини третьою, вдало вибраною в просторі площиною Ω_1** ; **2) знайдемо прямі (1–2) і (3–4) перетину допоміжної площини Ω_1 з кожною із площин Σ і Λ** ; **3) зафіксуємо точку K перетину побудованих прямих (1–2) і (3–4)**. Очевидно, що ця точка й буде однією з шуканих. Аналогічно, скориставшись допоміжною площиною Ω_2 (із зрозумілих причин Ω_2 зручно вибирати паралельною до Ω_1 ([10], §2, п. 12)), знаходимо другу потрібну точку L , яка разом із точкою K визначатиме спільну пряму KL заданих умовою площин Σ і Λ .

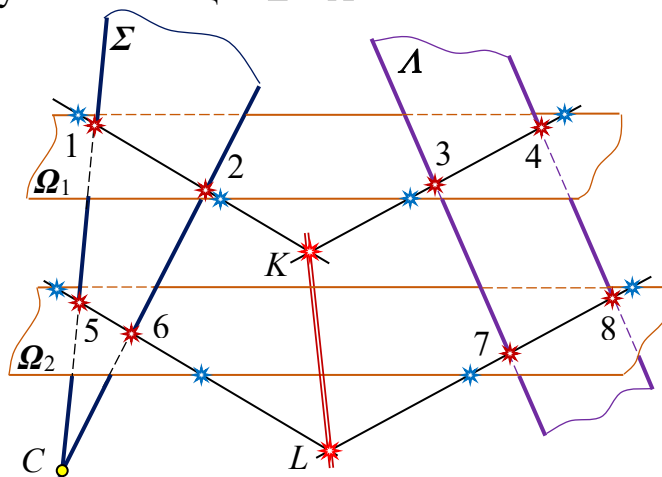


Рис. 1.11

Легко помітити, що сконструйований алгоритм операцій у випадку ОПЗ-2 ніяк не виключає з її внутрішнього змісту ОПЗ-1 – точка 1, наприклад, є точкою перетину прямої AC із площиною Ω_1 . Однак площини-посередники Ω_1 і Ω_2 залучаються до справи власноруч виконавцем побудови, а тому подаються в спрощеному вигляді, оскільки займають вдало обране, зручне в дії частинне розташування. Саме такий факт гарантує успіх, виключаючи нібито закладену логікою міркувань безвихідність у випадку з ОПЗ-2.

Отже, зараз нами озвучено саме ті факти, які вчитель мав би «бачити між рядками» в п. 3, §1 підручника [10]. Надіємося, що викладки стосовно місця і ролі площин-посередників у конструюванні покрокових алгоритмів дій із метою уявлюваного, динамічного *моделювання основних позиційних задач* у просторі та, врешті, їх можливої реалізації на позиційно визначеному кресленні, дають вичерпні відповіді на запитання, поставлені на початку параграфа, а також переконливо тлумачать метод посередників у геометрії.

Такими міркуваннями *достовірно, вичерпно й остаточно введено класичні правила-орієнтири просторових дій у загальногеометричному тлумаченні обох основних позиційних задач, завершено етап аналізу в їх розв'язанні, який є обов'язковою складовою усякої задачі на побудову, зокрема, у стереометрії*. Поряд із цим, покрокове моделювання описаних алгоритмів не в уявленнях, не у схематичному вираженні імітаційними рисунками 1. 10 і 1. 11, а на повних проєкційних кресленнях проведемо лише після того, як навчимося розв'язувати

ОПЗ-1 і ОПЗ-2 в особливих, елементарно простих ситуаціях. А саме, крім уже розглянутих задач 1, 2 на побудову слідів прямої і площини загального розташування на основній площині, важливими в розумінні суті питання є також задачі на інциденції, за умовами яких хоча б один (чи обидва) із заданих геометричних об'єктів (прямих і площин) займає (займають) частинне розміщення по відношенню до основної площини (див. далі задачі 3-7).

Варто особливо наголосити, що допоміжні площини (Ω), які вводяться в конструктивній геометрії власноруч тим, хто вмівло моделює задачі, називають **площинами-посередниками**, а метод розв'язування позиційних задач за допомогою цих площин – **методом посередників**.

Окремо зауважимо, що в якості **посередників** у позиційних задачах на перетини поверхонь можуть використовуватися також площини загального розташування та, навіть, деякі поверхні, зокрема сферичні. Однак у будь-якому випадку їх вводять у розгляд осмислено, розсудливо, вибірково вдало, в особливому розташуванні до поверхонь, заданих на проєкційних кресленнях умовою задачі (творчий момент!).

Задача 3. Дано дві проєкціювальні площини $\Sigma(AA_1BB_1)$ і $\Lambda(CC_1DD_1)$. Потрібно побудувати їх лінію перетину.

Оскільки слід-проєкції A_1B_1 (Σ_1) площини Σ і C_1D_1 (Λ_1) площини Λ належать основній площині Π (рис. 1.12), то остання, насправді, реально виконує роль площини-посередника Ω у сформованому вище алгоритмі дій у три кроки (див. рис. 1.11). Отже, в перетині прямих A_1B_1 і C_1D_1 фіксуємо точку X , яка є спільною для обох заданих площин. Наголосимо, що площини Σ і Λ проєкціювальні, тобто кожна з них можна в уявленні вщерть заповнити *проєкціювальними* прямими. Звідси гіпотетично впливає таке припущення: шукана пряма $x = \Sigma \cap \Lambda$, інцидентна точці X , теж є проєкціювальною. Справді, адже якщо пряма x містить точку X площини Σ і паралельна прямій AA_1 цієї площини (всі проєкціювальні промені паралельні), то x належить площині Σ ([10], §2, задача 4). З аналогічних причин, x належить також площині Λ , тобто вона істинно є лінією їх перетину.

Такий самий висновок можна одержати, спираючись на збиральну властивість слід-проєкції проєкціювальної площини. Дійсно, шукана пряма x належить як проєкціювальній площині Σ , так і проєкціювальній площині Λ . Отже, з одного боку, її основа x_1 належить слід-проєкції Σ_1 площини Σ , а з іншого, – слід-проєкції Λ_1 площини Λ . Але Σ_1 і Λ_1 перетинаються в одній-єдиній точці X , тому $x_1 \equiv X(X_1)$, а x є проєкціювальною прямою та шуканою лінією перетину даних площин.

Важливо, що посиляючись на щойно виконану побудову, можна легко знайти точку перетину прямої загального розташування із проєкціювальною площиною (наступна задача).

Задача 4. Дано проєкціювальну площину $\Sigma(AA_1B_1B)$ і пряму загального розташування $CD(C_1D_1)$. Побудувати точку перетину даних прямої і площини.

Проєкціювальні промені (шпиці) CC_1 і DD_1 (рис. 1.13) визначають ще одну проєкціювальну площину Ω , яка містить задану пряму CD і є, фактично, площиною-посередником. Тож будуюмо пряму x перетину проєкціювальних

площин Σ і Ω (задача 3) та фіксуємо точку K перетину CD і x . Це і буде шукана точка, яка належить як прямій CD , так і площині Σ .

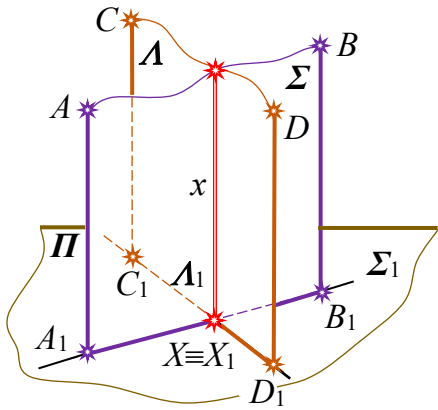


Рис. 1.12

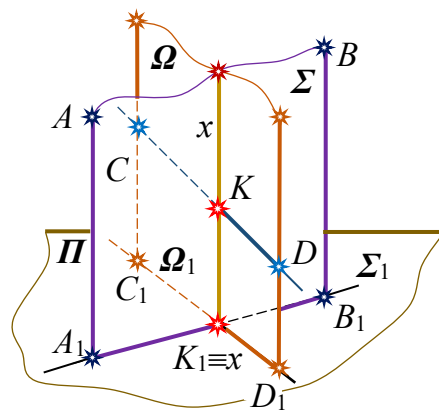


Рис. 1.13

Не секрет, у цьому частинному випадку (площина Σ – проєкціювальна!) чітке обґрунтування пошуку розв’язання основної позиційної задачі теж можна провести без явного звертання до методу посередників, а посилаючись лише до суті та властивостей відношення належності точок, прямих і площин. Справді, шукана точка $K(K_1)$ належить одночасно прямій і площині, тому K_1 (основа точки K) належить як вторинній проєкції прямої C_1D_1 , так і виродженій проєкції Σ_1 площини Σ . Отже, K_1 шукаємо в перетині прямих C_1D_1 і Σ_1 ($K_1 = C_1D_1 \cap \Sigma_1$). Далі, оскільки точки K і K_1 у схемі подвійного проєкціювання (див. п. 1.1) жорстко пов’язані шпичею (x), то провівши вказану шпичею через K_1 (паралельно AA_1) і зафіксувавши її перетин із прямою CD , будемо мати шукану точку K ($K = x \cap CD$). Суттєво, що хоч відверто площина-посередник Ω у цих останніх міркуваннях і не названа, все ж вона однозначно визначена на кресленні прямими $CD(C_1D_1)$ і $x(x_1)$, які перетинаються в точці $K_1 \equiv k_1$.

Задача 5. Площину загального розташування Σ задано точкою $A(A_1)$ і слідом BC . Знайти пряму її перетину із проєкціювальною площиною $\Lambda(AA_1D_1D)$.

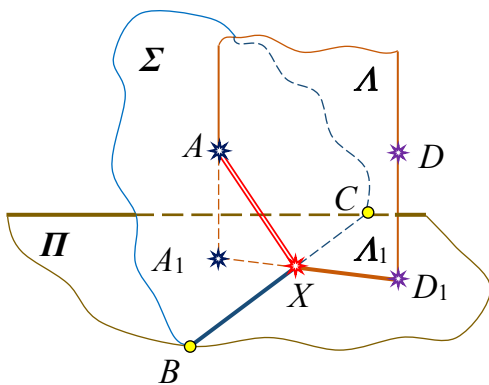


Рис. 1.14

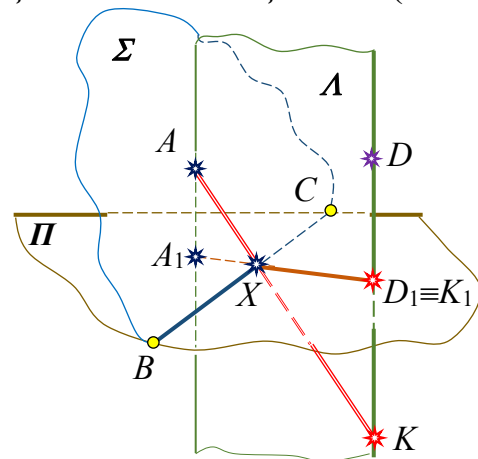


Рис. 1.15

Задача в розв’язанні надто проста (рис. 1.14), адже точка $A(A_1)$ належить відразу обом заданим площинам Σ і Λ за умовою. Ще одну спільну точку X шукаємо в перетині їх слідів BC і A_1D_1 . AX – шукана пряма.

Саме завдяки цій, одній з найпростіших геометричних конструкцій, до майже

очевидних побудов можна віднести також й наступну задачу.

Задача 6. Дано площину загального розташування Σ ($A(A_1), BC$) та проєкціювальну пряму DD_1 . Знайти їх точку перетину.

Уже дані на моделі шпичі AA_1 і DD_1 однозначно визначають проєкціювальну площину-посередник $\Lambda(AA_1D_1D)$, яка вміщує задану проєкціювальну пряму DD_1 і точку A площини Σ (рис. 1.15). Перетином площини-посередника із заданою площиною Σ буде пряма AX (задача 5). Точка K ($K_1 \equiv D_1$), що є спільною для прямих AX і DD_1 , й буде шуканою.

Зауважимо, що наведені міркування не є єдино можливими в пошуку шляху розв'язання сформульованої задачі.

Задача 7. Побудувати пряму перетину площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ із проєкціювальною площиною $\Lambda(EE_1F_1F)$.

1-й спосіб розв'язання (рис. 1.16). Одну спільну точку X площин Σ і Λ знайдемо відразу на основній площині Π у перетині їх слідів $BC \equiv B_1C_1$ та E_1F_1 . Іншу спільну точку Y шукаємо у перетині проєкціювальної прямої EE_1 площини Λ із площиною загального розташування Σ (задача 6). Пряма XY – шукана лінія перетину даних площин.

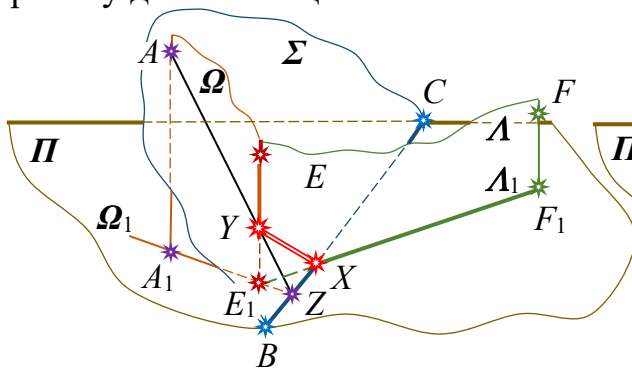


Рис. 1.16

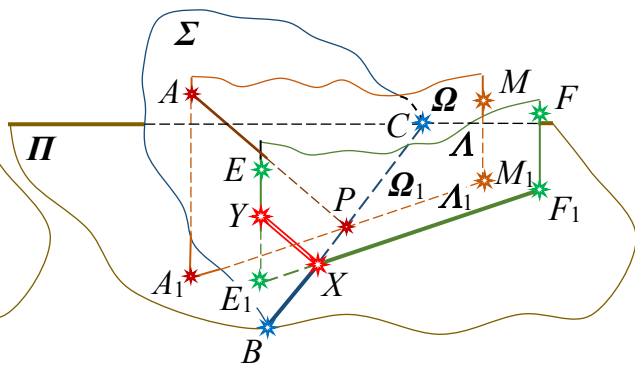


Рис. 1.17

2-й спосіб розв'язання (рис. 1.17). Помічаємо, що на відміну від задачі 5, у цьому більш загальному випадку задані площини Σ і Λ не мають визначених умовою спільних точок. Хоч, звичайно, точка X знайдеться без будь-яких додаткових побудов, усе ж таки, з обов'язковим обґрунтуванням. Природно виникає запитання: «Чи не можна іншу спільну точку Y указаних площин знайти, скориставшись саме задачею 5?» Виявляється, що можна. З цією метою введемо в розгляд проєкціювальну площину-посередник $\Omega(AA_1M_1M)$ так, щоб вона пройшла через точку A площини Σ і паралельно площині Λ . Тоді пряма $AP(A_1P)$ перетину площин Σ і Ω будується просто за вже відомою схемою, а шукана пряма XY проходить через точку X паралельно AP (тут спрацьовує відома властивість паралельних площин ([10], §2, п.12)).

3-й спосіб розв'язання (рис. 1.18). З метою відшукування точки $P(P_1)$, що належить одночасно кожній із площин Σ і Λ , перепадаємо площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ парою прямих $AB(A_1B_1)$ і $BC \equiv B_1C_1$, які перетинаються. Задіявши проєкціювальну площину-посередник $\Omega(AA_1B_1B)$, будуємо точку перетину прямої загального розташування $AB(A_1B_1)$ із проєкціювальною площиною $\Lambda(EE_1F_1F)$ (задача 6). Це й буде, окрім точки X , ще

одна шукана точка $P(P_1)$. PX – пряма перетину заданих площин Σ і Λ , а XY – її відрізок врізання відсіків площин у визначених зображенням межах.

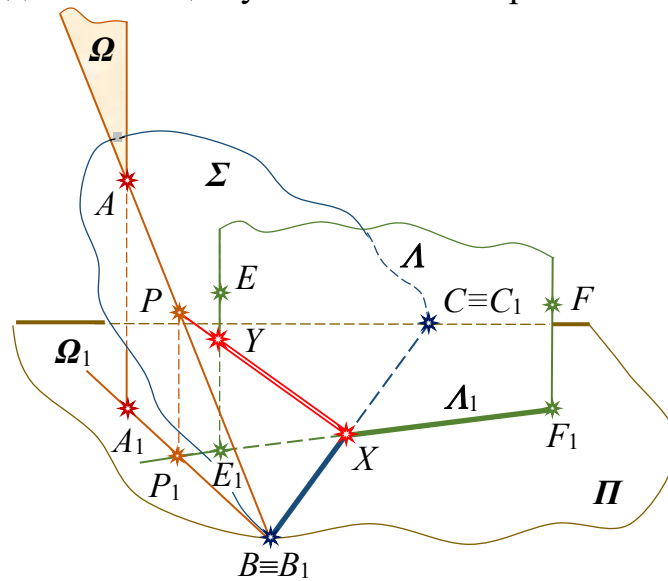


Рис. 1.18

Не коректно було б стверджувати, що щойно розв’язана трьома способами одна з важливих позиційних задач є найпростішою, оскільки вона не є очевидною і моделюється через ланцюжок із кількох ланок справді найпростіших геометричних операцій. Схожі до неї задачі можна назвати **базовими** чи **стрижневими**, бо саме вони є складовими багатьох інших цікавих графічних конфігурацій.

Задача 8. *Задано дві площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і $\Lambda(D(D_1), EF)$. Побудувати пряму їх перетину.*

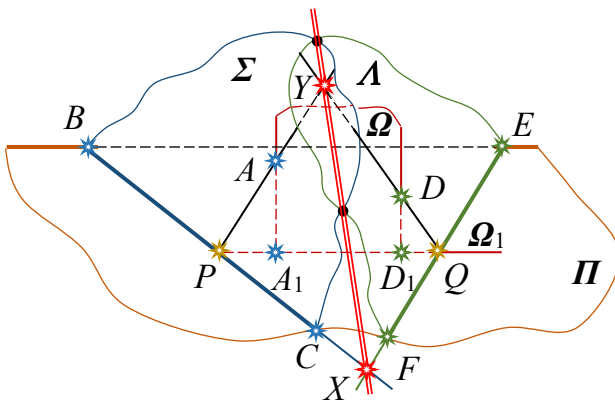


Рис. 1.19

1-й спосіб розв’язання. Одну спільну точку X даних площин знаходимо як інциденцію їх слідів BC і EF на площині основи Π (рис. 1.19). Для відшукування іншої спільної точки Y , скористаємося вже відпрацьованим алгоритмом дій у три кроки, а саме: **1).** Перетнемо задані в умові площини Σ і Λ проєкціювальною площиною-

посередником $\Omega(AA_1D_1D)$; **2).** Побудуємо прямі AP і DQ перетину площини-посередника Ω відповідно з кожною із площин Σ і Λ (задача 5); **3).** Знайдемо точку Y перетину прямих AP і DQ . Очевидно, що точка Y належить обом площинам загального розташування, а пряма XY – шукана лінія їх перетину.

Таким чином, конструктивно ОПЗ-2 у своєму розв’язанні передбачає застосування двох площин-посередників Π і Ω . У площині нульового рівня Π розташована одна спільна точка (X) даних площин Σ і Λ , а проєкціювальна площина $\Omega(AA_1D_1D)$ дозволяє побудувати ще одну їх спільну точку (Y).

4-й спосіб розв’язання задачі 7 і 2-й спосіб – задачі 8, із поважних причин, винесемо в кінець даного розділу.

Задача 9. Побудувати точку перетину прямої загального розташування $EF(E_1F_1)$ із площиною загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$.

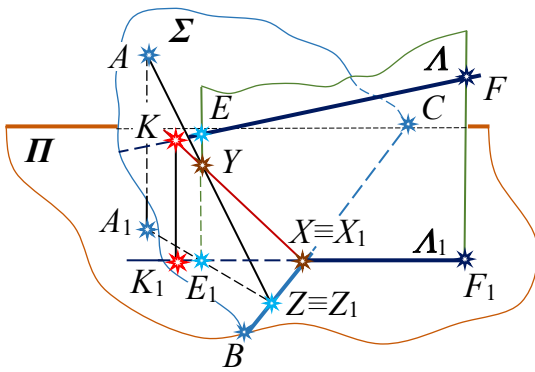


Рис. 1.20

1-й спосіб розв'язання. 1). Через дану пряму $EF(E_1F_1)$ проводимо проєкціювальну площину-посередник $\Lambda(EE_1F_1F)$. 2). Будуємо будь-яким із запропонованих вище (в задачі 7) алгоритмів дій пряму XY перетину даної площини $\Sigma(A(A_1), BC)$ і введеної площини-посередника $\Lambda(EE_1F_1F)$. 3). Знаходимо шукану точку $K(K_1)$ перетину даної прямої $EF(E_1F_1)$ із побудованою прямою XY .

Примітка. На рисунку 1.20 знайдено

спільну точку шпичі EE_1 заданої прямої EF із заданою площиною Σ .

2-й спосіб розв'язання. 1). Точкою $A(A_1)$ та не інцидентною їй прямою загального розташування $EF(E_1F_1)$ (рис. 1.21) установлюємо на моделі площину загального розташування $\Lambda(A(A_1), EF(E_1F_1))$. 2). Будуємо пряму, яка є перетином двох площин Σ і Λ : а) констатуємо, що точка $A(A_1)$ є спільною для цих площин (за умовою і п. 1); б) будуємо слід $HL \equiv H_1L_1$ площини Λ на площині основи Π (задача 2); в) знаходимо точку $P \equiv P_1$ перетину слідів BC і HL площин Σ і Λ ; г) проводимо пряму AP перетину площин Σ і Λ . 3). Фіксуємо точку $K(K_1)$ перетину прямих $EF(E_1F_1)$ і $AP(A_1P_1)$. Точка $K(K_1)$ й буде шуканою спільною точкою заданих прямої

$EF(E_1F_1)$ і площини $\Sigma(A(A_1), BC)$.

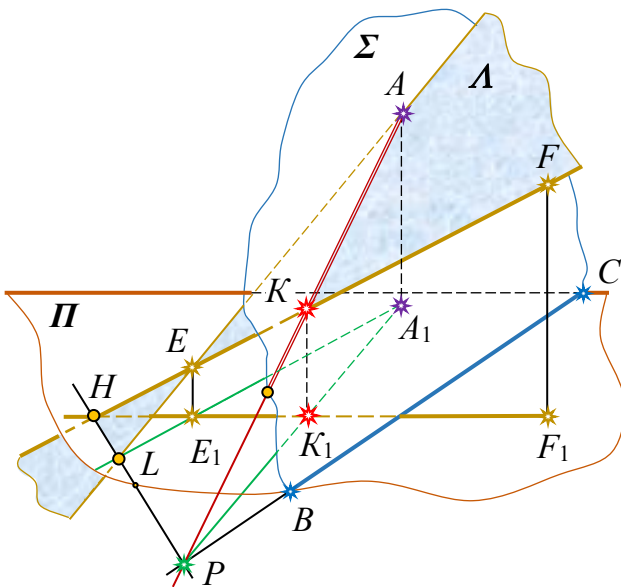


Рис. 1.21

Отже, випробовування на шляху до кваліфікованого моделювання **ОПЗ-1** та **ОПЗ-2**, у найбільш загальному варіанті задавання прямої і площини (двох площин), вичерпано. Привертаємо лише увагу вчителя (студента чи учня) до того факту, що на завершальному етапі графічних операцій у кожному з випадків обов'язково потрібно встановити **взаємну видимість** геометричних об'єктів із точки зору спостерігача проєкційного креслення. Це якісно поліпшить естетичне представлення останнього, таке зображення легко

«прочитається» сторонньою особою, тобто воно набуває властивості візуальної зворотності в уявленнях даного просторового оригіналу. Іноді, на більш-менш складних проєкційних кресленнях, практикують «відмивання» видимих відсіків поверхонь (площин) блідими, розбавленими водою різнобарвними фарбами або ж гуашшю.

А зараз, у продовження і розширення теми, озброївшись конструктивними схемами базових побудов, які описово й рисунково наведені в тексті вище, та вже

здобувши чіткі теоретичні і практичні навички в їх виконанні, змодельємо зображеннями в динаміці дій хоча б кілька *комплексних позиційних задач*. Це потрібно для того, щоб прикладами найперших класичних стереометричних задач, які, як з'ясувалося, вирішуються не лише формально-аналітично, а й графічно, наочно продемонструвати виняткові можливості методу посередників. До того ж, таке більш тісне знайомство з комплексними стереометричними побудовами ще більше зацікавить студента (учня), сприятиме поглибленню його уявлень про найпростіші об'єкти і конструкції евклідової геометрії, а також розширить можливості просторових варіацій останніх у комбінаціях.

Задача 10. Через задану точку $A(A_1)$ провести пряму, яка перетинає задані мимобіжні прямі $CD(C_1D_1)$ і $EF(E_1F_1)$.

1-й спосіб розв'язання (рис. 1.22, а, б). Змодельємо спочатку алгоритм дій у просторі (етап аналізу). В умові задачі задано пару мимобіжних прямих $C'D'$ і $E'F'$ та точку A' , що не належить жодній із прямих. Відомо, що точка A' разом із будь-якою прямою (наприклад, $C'D'$) однозначно визначають деяку площину $\Sigma'(A', C'D')$. Шукана пряма $A'P'$, очевидно, належатиме цій площині, оскільки з умови відомо, що вона містить точку A' і перетинає пряму $C'D'$. Крім цього, пряма $A'P'$ має перетинати й іншу пряму $E'F'$, мимобіжну з $C'D'$. Тому потрібно знайти точку P' перетину прямої $E'F'$ із площиною $\Sigma'(A', C'D')$ і провести пряму $A'P'$ до перетину із прямою $C'D'$ в єдиної можливій точці Q' , яка й буде шуканою на прямій $CD(C_1D_1)$.

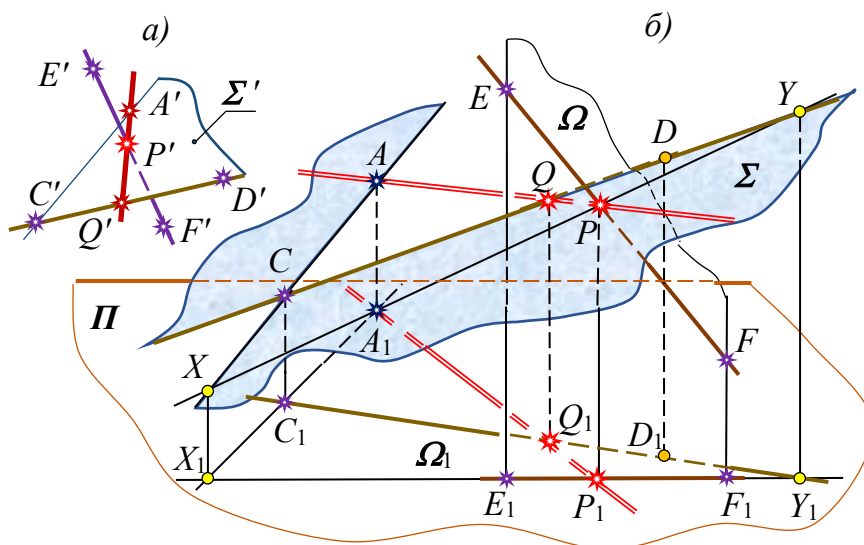


Рис. 1.22

Сформульована схема операцій може мати на проєкційному кресленні-моделі наступну графічну реалізацію: **1)** Площину Σ , визначену точкою $A(A_1)$ і прямою $CD(C_1D_1)$, перезадаємо парю прямих $AC(A_1C_1)$ і $CD(C_1D_1)$, які перетинаються. Для цього досить точки $A(A_1)$ і $C(C_1)$ з'єднати прямою $AC(A_1C_1)$. **2)** Знайдемо (задача 9) точку $P(P_1)$ перетину прямої $EF(E_1F_1)$ із площиною $\Sigma(AC(A_1C_1) \cap CD(C_1D_1))$. Із цією метою вводимо в розгляд проєкціювальну площину-посередник $\Omega(E_1F_1F)$ і двічі розв'язуємо задачу 7 на перетин прямої загального розташування ($CD(C_1D_1)$ і $AC(A_1C_1)$) із проєкціювальною площиною Ω . Точки $X(X_1)$ і $Y(Y_1)$ визначають пряму перетину площин Σ і Ω , а точку $P(P_1)$ будемо

як результат перетину прямих X_1Y_1 і E_1F_1 . **3**). Проведемо пряму $AP(A_1P_1)$ у площині Σ до перетину в точці $Q(Q_1)$ із прямою $CD(C_1D_1)$, яка (за побудовою) теж належить площині Σ . Це і є шукана пряма. Своєрідним «моментом істини» в цій побудові буде належність окремо знайдених точок Q і Q_1 одній і тій самій вертикальній шпиці внутрішнього проєкціювання.

2-й спосіб розв'язання (рис. 1.23, а, б). Якщо точка A' і пряма $C'D'$ визначають площину $\Sigma'(A', C'D')$, то ця сама точка A' та інша із двох заданих мимобіжних прямих ($E'F'$), у свою чергу, визначають єдину площину $\Lambda'(A', E'F')$. Площини Σ' і Λ' мають спільну точку A' , отже вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку ([10], аксіома C_2). Тому, в загальному випадку, їх спільна пряма перетинатиме кожен із заданих прямих $C'D'$ і $E'F'$. Отож, задача зводиться до побудови прямої перетину площин Σ' і Λ' .

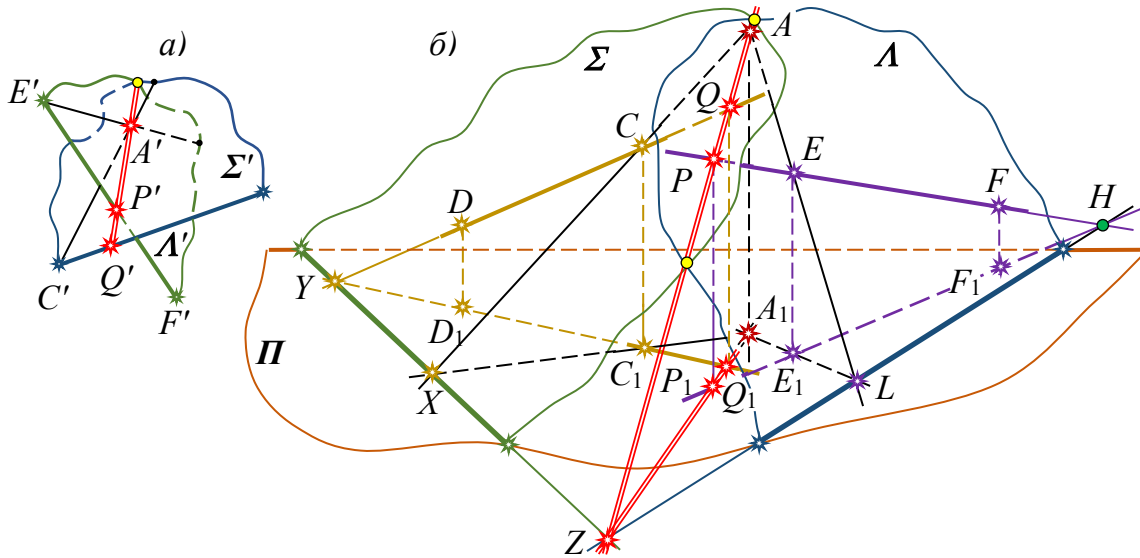


Рис. 1.23

Для відшукування на проєкційному кресленні ще однієї спільної точки $Z(Z_1)$ площин $\Sigma(A(A_1), CD(C_1D_1))$ і $\Lambda(A(A_1), EF(E_1F_1))$, досить за схемою задачі 2 побудувати сліди $XY \equiv X_1Y_1$ і $HL \equiv H_1L_1$ цих площин на площині основи Π і знайти їх точку перетину $Z \equiv Z_1$. Пряма $AZ(A_1Z_1)$ перетинає пряму $EF(E_1F_1)$ у точці $P(P_1)$, а пряму $CD(C_1D_1)$ у точці $Q(Q_1)$. Задачу розв'язано.

Задача 11. Дано площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), B(B_1), C(C_1))$ і точку $M(M_1)$. Як взаємно розташовані у просторі задані точка і площина?

Конкретизуємо запитання умови задачі, яке по іншому, що очевидно, можна сформулювати так: «Чи належить точка M площині Σ , чи ні?» Тому: **1**). Проведемо через дану точку $M(M_1)$ будь-яку проєкціювальну площину-посередник, приміром, $\Lambda(AA_1M_1M)$ (рис. 1.24). **2**). Побудуємо пряму $AP(A_1P_1)$ перетину площин Σ і Λ . **3**). Проаналізуємо взаємне розташування точки $M(M_1)$ і побудованої у проєкціювальній площині Λ прямої $AP(A_1P_1)$. Якщо вказані точка і пряма: а) належать одна одній, то точка M належить також і площині Σ ; б) не належать – точка M розташована поза площиною Σ : або «над» площиною ($MM_1 > NN_1$), або «під» площиною ($MM_1 < NN_1$). Тут точки M і N , основи яких M_1 і N_1 суміщаються на моделі, називають **конкурентними** по відношенню до основної

площини (Π).

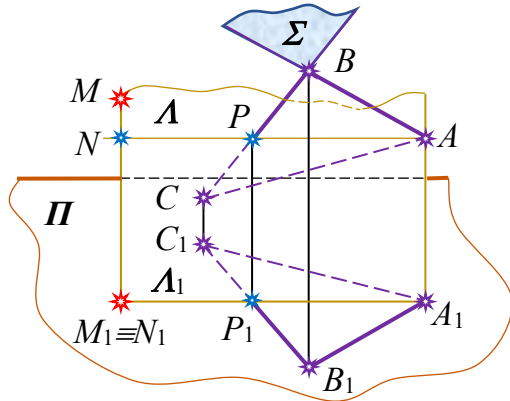


Рис. 1.24

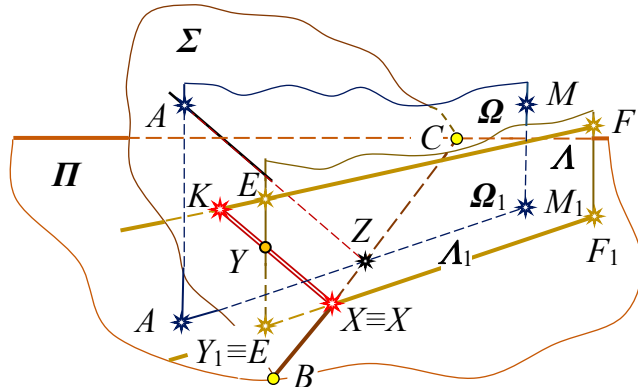


Рис. 1.25

Задача 12. Дано площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і пряму загального розташування $EF(E_1F_1)$. Як взаємно розташовані у просторі задані пряма і площина?

1). Першим кроком проведемо через дану пряму $EF(E_1F_1)$ проєкціювальну площину-посередник $\Lambda(EE_1F_1F)$ (рис. 1.25). 2). Побудуємо пряму $XU(X_1U_1)$ перетину площин Σ і Λ . 3). Проаналізуємо взаємне розташування двох прямих EF і XU у площині Λ . Тут можливі, що неважко уявити, три відмінні позиційні ситуації: а) прямі перетинаються в точці K (див рис.), отже задані пряма EF і площина Σ перетинаються в цій самій точці; б) прямі EF і XU паралельні, що засвідчить паралельність накреслених прямої і площини (див. далі задачу 3 і рис. 1.29, б – $DC \parallel \Sigma$); в) розглядувані прямі зливаються ($EF \equiv XU$), звідкіля випливає належність прямої EF площині Σ .

Задача 13. На повному проєкційному кресленні дано дві непрозорі трикутні пластинки, які у першому варіанті взаємного розміщення врізаються одна в одну, а у другому – одна із пластинок внутрішньо проникає крізь іншу. Побудуйте відрізок перетину пластинок, установіть видимість.

Логіка міркувань підказує, що спочатку варто знайти дві будь-які спільні точки площин заданих трикутників. Далі, з'єднавши ці точки прямою, вирізнути відрізок перетину пластинок ABC і MNP у їх власних межах. Отже, зображенням на моделі, з використанням площин-посередників Σ і Λ , двічі реалізовано алгоритм дій у «три кроки» (ОПЗ-1, задача 9), що й гарантувало правильний результат: $K = MN \cap (ABC)$; $Q = MP \cap (ABC)$. Тут KL є відрізком врізання пластинок (рис 1.26, а), а на рисунку 1.26, б (де $Q \equiv L$) – відрізком їх внутрішнього проникнення. Видимість встановлюємо методом «конкурентних точок» (задача 11).

Завершуючи етап знайомства з підвалинами позиційної стереометрії, потрібно констатувати таке.

Окремими прикладами основних і найпростіших побудов нами просто і доступно анонсовано метод посередників, продемонстровано перспективи його використання у вдалому вирішенні графічним способом задач із перших розділів стереометрії. При цьому з'ясувалося, що правильними й наочними проєкційними рисунками можна не лише зображати найпростіші об'єкти й відомі похідні фігури геометрії, скомпоновані з точок, прямих і площин, а й встановлювати на якісних зображеннях взаємне розміщення у просторі окремих елементів цих

фігур, шукати і знаходити інцидентії останніх. Теоретично і рисунково строго засвідчено, що позиційні задачі на обумовлених певними вимогами кресленнях-моделях істинно розв'язувані, оскільки такі зображення тривимірних об'єктів у змістовних комбінаціях є позиційно визначеними.

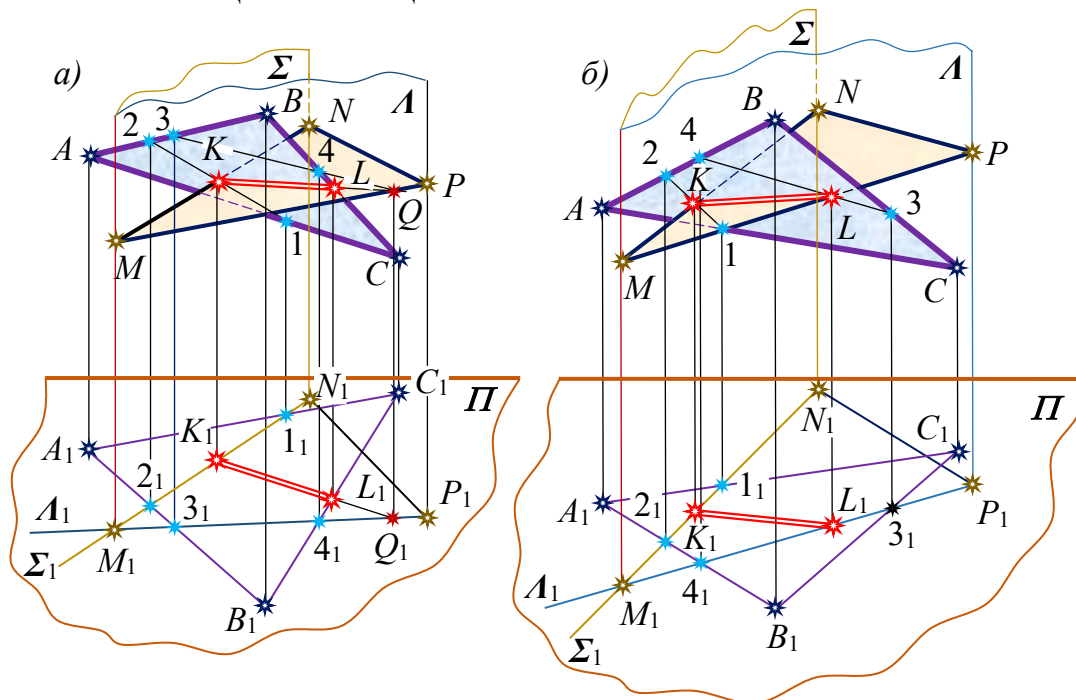


Рис. 1.26

Важливо підкреслити, що всі уявлювані просторові вправи та відповідні побудови на проєкційних кресленнях, продемонстровані вище, в жодному разі не виходять за **змістові** межі програм сучасної шкільної стереометрії. Навчаючи учнів наочно-образним методам оперування багатовидом фігур, варто звертати особливу увагу на акуратність виконання операцій, турбуючись про їх фахове візуальне представлення і естетичне оформлення. Правильно представлені (подані вчителем) орієнтири на якісне моделювання, за певних суб'єктивних умов, нестимуть учням в їх візуальних реалізаціях справжнє задоволення від власноруч одержаних графічних, графоаналітичних чи навіть обчислювальних результатів, виховуватимуть у них повагу до живої геометрії, зацікавленість споконвічною дисципліною.

Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації

У специфічних обставинах педагогічного процесу перед учителем ставиться надто важливе завдання: засобами геометрії розвинути в учнів просторові уявлення та уяву, образно-наочне і логічне мислення, навчити їх мистецтву дослідницького, творчого учіння геометрії! За таких обставин, потрібно розрізняти два принципово різні підходи до використання проєкційних креслень у задачах курсу стереометрії. Перший з них передбачає на базі відповідних стереометричних тверджень (аксіом, теорем) доведення *існування* певної геометричної фігури. Рисунок у цьому випадку носить допоміжний, суто ілюстративний характер. Це будуть так звані «уявні побудови» на кресленнях-картинах. Рисунок взагалі може й не бути, коли в суб'єкта навчання належним чином розвинені уява і просторове мислення. Суть іншого підходу полягає в тому, що проєкційне креслення обов'язкове, оскільки потрібні побудови не

просто відображають в уявленнях, а виконують безпосередньо на зображенні заданої просторової фігури – *моделюють* у динаміці дій. Однак у будь-якому випадку не варто забувати, що графічні операції не можна виконувати формально циркулем і лінійкою за сформульованим алгоритмом. Лінії кожного кроку побудови можуть з'явитися на кресленні лише після осмисленого уявлення відповідної операції в оригіналі, тобто задача на проєкційному кресленні має шанс на успішне розв'язання за умови, що той хто її розв'язує закономірно сконструював ланцюжок відповідних геометричних перетворень у просторі.

У свою чергу, розрізняють два види побудов, які виконуються строго за правилами паралельного проєкціювання на зображеннях стереометричних фігур: **позиційні** і **метричні**.

Розпочати покрокове розв'язання сформульованої просторової задачі на побудову дозволяється лише тоді, коли зображення заданих фігур має властивість **позиційної визначеності – повноти**. Зображення фігури Φ' називається **повним**, якщо кожна точка A' , що належить фігурі Φ' , є заданою на проєкційному кресленні. Це означає, що для кожної точки A зображення Φ фігури Φ' задана чи може бути побудована її вторинна проєкція A_1 на деяку площину, яка називається основною.

Задачі на візуально-рисунокове (чи формально-аналітичне) встановлення взаємних розташувань та побудову **інциденцій** – точок (ліній) перетину двох визначених стереометричних фігур, називаються **позиційними** (афінними).

Теорема. Для того, щоб позиційна задача була розв'язувана, необхідно і достатньо, щоб зображення заданих фігур було повним.

Звернемося до порівняно складних задач, таких, наприклад, як побудова лінії перетину поверхні площиною, лінії перетину багатогранної і кривої поверхонь чи лінії перетину двох кривих поверхонь. Треба знати, що їх графічне розв'язання зводиться, врешті-решт, до відшукування на проєкційному кресленні скінченного числа раз **точки перетину прямої із площиною** і (або) **лінії перетину двох площин**. Якраз тому ці дві особливі задачі називаються основними позиційними. Вони внутрішньо споріднені, тісно переплітаються одна з одною алгоритмами конкретних перетворень – кожна розв'язується через іншу.

Пригадаємо, приміром, задачу на відшукування точки зустрічі прямої і площини (див. вище рис. 1.20, 1.21): **1)** через задану пряму проведемо проєкціювальну площину-посередник; **2)** побудуємо пряму перетину заданої площини і площини-посередника; **3)** знайдемо точку перетину побудованої прямої із заданою прямою. Це й буде шукана точка. Зверніть увагу на другий пункт побудови, який, власне, й підтверджує сказане. Тепер уже виконати побудову лінії перетину площини загального розташування із площиною-посередником, що вибирається учнем (переважно) проєкціювальною, зовсім нескладно, оскільки слід-проєкція останньої має збиральну властивість, тобто вміщує в собі проєкцію (основу) шуканої прямої. Цим розривається замкнене коло у візуальному вираженні однієї основної позиційної задачі через іншу, ліквідується суперечливість між ними.

Зосередьмося також на тому факті, що алгоритми розв'язання кожної основної позиційної задачі формулюються у вигляді ланцюжка виключно просторових дій, і справа виконавця вміло реалізувати їх на проєкційному кресленні. Для цього потрібно мати лише хороші просторові уявлення і чітко володіти геометричною суттю методів центрального та паралельного проєкціювання, знати їх властивості, які й покладені в основу процесу моделювання зображеннями стереометричних фігур та операцій із ними на картинній площині.

Якщо ви виконаєте виключно позиційні побудови, то цим апелюєте до властивостей оригіналу, які зберігаються лише при паралельному зовнішньому проєкціюванні. Саме вони і носять назву **афінних**: 1) властивість фігури бути точкою, прямою, площиною. 2) властивість фігури мати перетини. 3) інваріантність паралельності прямих і площин. 4) інваріантність поділу відрізка в заданому відношенні. 5) інваріантність відношення довжин відрізків на паралельних прямих. 6) властивість фігури бути трикутником, паралелограмом, трапецією, еліпсом. 7) інваріантність відношення площ двох фігур.

Правило-орієнтир розв'язування позиційної задачі.

1. Встановіть факт повноти зображення. Якщо ж зображення неповне, то, задавши додаткові параметри, зробіть його повним.

2. Проаналізуйте задачу і складіть алгоритм її розв'язання у просторі; встановіть, які додатково точки, прямі і площини потрібно ввести в розгляд через уже задані на зображенні (не порушуючи його повноти), щоб можна було **максимально** просто знайти потрібні інцидентції.

3. Виконайте фактичні побудови і графічно виділіть результат.

4. Встановіть видимість елементів конструкції та наведіть лінії на зображенні.

Контрольні запитання

1. Що уявляє собою у схемі подвійного проєкціювання вторинна проєкція точки, яка їй природа? Чому проєкціювання називають подвійним?

2. Обґрунтуйте позиційну визначеність точки, прямої та площини.

3. Яке зображення геометричної фігури називається позиційно визначеним?

4. Чи позиційно визначені наочні зображення геометричних фігур ЗЗСО? Наведіть конкретні приклади.

5. Що називається слідом прямої на основній площині?

6. Що називається слідом площини на основній площині?

7. Коли пряма чи площина немає сліду на основній площині? Як називається така пряма (площина)?

8. Дайте образне пояснення покрокового алгоритму дій у побудові сліду прямої.

9. Дайте образне пояснення покрокового алгоритму дій у побудові сліду площини.

10. Що таке «Метод посередників»? Які місце та роль методу в конструктивній і прикладній геометрії?

11. Наведіть приклади застосування методу посередників у прикладній геометрії.

12. У чому причина, що задачу на перетин прямої і площини та задачу на перетин двох площин називають основними позиційними?

13. Чим споріднені та в чому суперечливі перша і друга основні позиційні задачі?

14. Дайте тлумачення уявлюваної просторової схеми розв'язання ОПЗ-1.

15. Дайте тлумачення уявлюваної просторової схеми розв'язання ОПЗ-2.

16. В чому проявляється фактор можливого застосування методу посередників у позиційній стереометрії?

17. Які задачі в позиційній стереометрії відносять до найпростіших (елементарних)?

18. Що таке афінні властивості геометричних фігур? Перерахуйте ці властивості.

19. За яким методом встановлюється видимість елементів геометричних фігур на проєкційних кресленнях? У чому полягає суть методу?

20. Сформулюйте правило-орієнтир розв'язання позиційної задачі.

Тренувальні вправи і завдання

Основними позиційними задачами, розглянутими вище в тексті, клас елементарних задач, розв'язуваних на наочному проєкційному кресленні, не вичерпується. До них потрібно віднести також найпростіші пропозиції на паралельність прямих і площин та окремі комплексні завдання на інцидентії.

1. Через дану точку $C(C_1)$ потрібно провести пряму, паралельну даній прямій $AB(A_1B_1)$.

2. Через дану точку $D(D_1)$ потрібно провести площину, паралельну даній площині $\Sigma(A(A_1), B \equiv B_1, C \equiv C_1)$.

3. Дано мимобіжні прямі $AB(A_1B_1)$ і $CD(C_1D_1)$. Потрібно через пряму AB провести площину, паралельну прямій CD .

4. Дано проєкціювальну площину $\Sigma(AA_1B_1B)$ і точку $C(C_1)$. Провести через дану точку площину рівня і побудувати пряму її перетину із проєкціювальною площиною Σ .

5. Задано площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і точку $D(D_1)$. Провести через точку $D(D_1)$ площину рівня і побудувати пряму перетину її із площиною Σ .

6. Побудувати пряму перетину площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ із проєкціювальною площиною $\Lambda(EE_1F_1F)$.

7. Задано дві площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і $\Lambda(D(D_1), EF)$. Побудувати пряму їх перетину.

8. Через задану точку $A(A_1)$ провести пряму, яка паралельна заданій площині $\Sigma(B(B_1), CD)$ і перетинає задану пряму $EF(E_1F_1)$.

9. Провести пряму, яка перетинає задані три попарно мимобіжні прямі $AB(A_1B_1)$, $CD(C_1D_1)$ і $EF(E_1F_1)$; скільки розв'язків має задача?

10. Побудувати пряму, паралельну даній площині $\Sigma(A(A_1), BC)$ так, щоб вона перетинала дані мимобіжні прямі $DE(D_1E_1)$ і $FG(F_1G_1)$; скільки розв'язків має задача?

11. Побудувати пряму, яка перетинає дві дані мимобіжні прямі $AB(A_1B_1)$ і $CD(C_1D_1)$, та паралельна третій даній прямій $EF(E_1F_1)$; скільки розв'язків має задача?

Приклади міркувань у покроковому моделюванні пропозицій

1. Через дану точку $C(C_1)$ потрібно провести пряму, паралельну даній прямій $AB(A_1B_1)$.

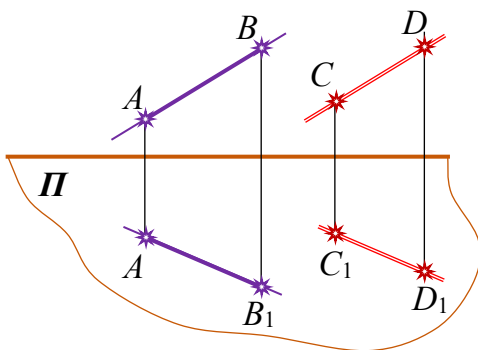


Рис. 1.27

Нехай $CD(C_1D_1)$ – пряма, яку потрібно побудувати (рис. 1. 27). Уже задана в умові пряма AB і шукана пряма CD є проєкціями зовнішнього проєкціювання на картинну площину паралельних прямих простору $A'B'$ і $C'D'$, а A_1B_1 і C_1D_1 , відповідно, – їх вторинними проєкціями. Оскільки паралельність прямих є інваріантом паралельного проєкціювання ([10], п. 13, с. 17), то спочатку через точку C проведемо пряму CD , паралельну AB , а потім через точку C_1 – пряму C_1D_1 ,

паралельну A_1B_1 . Задачу розв'язано.

2. Через дану точку $D(D_1)$ потрібно провести площину, паралельну даній площині $\Sigma(A(A_1), B \equiv B_1, C \equiv C_1)$.

Нагадаємо, що площина у стереометрії ЗССО задається рисунково (чи уявляється) або трьома неколінеарними точками, або прямою і точкою, неналежною прямій, або

двома паралельними чи такими, що перетинаються, прямими. На проєкційному кресленні дуже часто площину зображають будь-якою плоскою фігурою, зокрема, трикутником або ж, як у нашому випадку (рис. 1.28), – точкою $A(A_1)$ і прямою (слідом) $BC \equiv B_1C_1$ на основній площині. Тому надалі, в символічному представленні саме так заданої площини, введемо позначення і будемо писати: $\Sigma(A(A_1), BC)$.

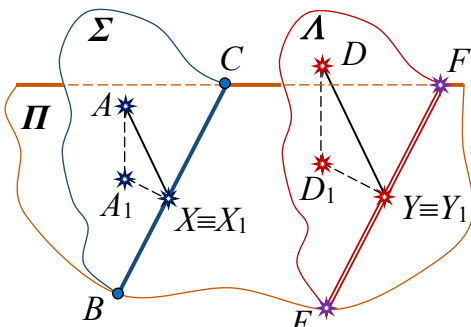


Рис. 2.28

Ознака паралельності двох площин, як відомо ([10], теорема 2.4), має таке формулювання: «Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні». Отже, площину Σ , що задана точкою і слідом, потрібно перезадати двома прямими, які перетинаються. Нехай ними будуть, приміром, прямі BC і AX , де X є будь-якою точкою прямої BC . Далі шукану площину побудувати вже неважко:

1) через точку D проведемо пряму $DY(D_1Y_1)$, паралельну прямій AX (задача 1);
 2) знайдемо точку Y – слід щойно проведеної прямої на основній площині (задача 1 у тексті);
 3) через точку Y у площині Π проведемо пряму EF , паралельну BC . Площина Λ , яка визначається точкою $D(D_1)$ і слідом $EF \equiv E_1F_1$, й буде шуканою.

3. Дано мимобіжні прямі $AB(A_1B_1)$ і $CD(C_1D_1)$. Потрібно через пряму AB провести площину, паралельну прямій CD .

Наприклад (рис. 1.29, а), через точку A проведемо пряму AF , паралельну прямій CD (задача 1), чим у перетині двох прямих AB і AF визначимо шукану площину $\Sigma(AF \cap AB) \parallel CD$. Цей висновок випливає безпосередньо з ознаки паралельності прямої і площини ([15], теорема 2.3).

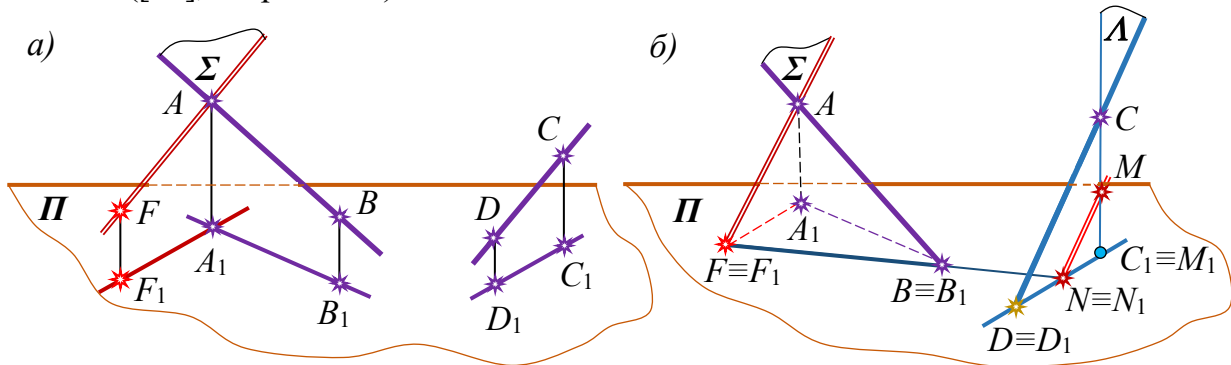


Рис. 2.29

Зауважимо, що у спостерігача за рисунком 1.29, б може скластися хибне враження стосовно взаємного розташування прямої $CD(C_1D_1)$ і площини $\Sigma(A(A_1), BF)$, адже слід площини Σ (B_1F_1) перетинає в точці $N \equiv N_1$ основу C_1D_1 даної прямої. Однак, останнє означає лише те, що у площині Σ завжди можна побудувати деяку пряму $MN(M_1N_1)$, паралельну $CD(C_1D_1)$ й таку, яка з цією прямою лежатиме в одній і тій самій проєкціювальній площині Λ . Фактично, побудована пряма MN є розв'язком задачі на перетин площини загального розташування Σ і проєкціювальної площини Λ , про що ми вже вели мову вище у тексті.

4. Дано проєкціювальну площину $\Sigma(AA_1B_1B)$ і точку $C(C_1)$. Провести через дану точку площину рівня і побудувати пряму її перетину із проєкціювальною площиною Σ .

Зваживши (зادля конструктивних зручностей) на ознаку паралельності двох площин ([10], теорема 2.4), основну площину Π рисунково перезадаємо парою прямих

A_1B_1 і B_1C_1 , які перетинаються (рис. 1.30). Шукана площина є площиною рівня, тобто паралельною Π . Тому її теж доцільно задати парою прямих, які перетинаються і паралельні відповідно A_1B_1 та B_1C_1 . Отож, проведемо спочатку CD паралельно C_1D_1 . Тут CD – пряма рівня, що розташована у проєкціювальній площині $\Lambda(BB_1C_1C)$ (вона містить точку C і паралельна прямій B_1C_1 цієї площини), а також, – у шуканій площині рівня Ω , а точка D є однією з точок перетину площини Ω і заданої площини $\Sigma(AA_1B_1B)$. Але ж пряма перетину площин Σ і Ω теж є прямою рівня, тому вона паралельна слід-проєкції площини Σ ([10], теорема 2.3). Проводимо DF паралельно B_1A_1 , що буде останнім кроком у побудові. Таким чином, шукана площина Ω однозначно визначається на рисунку перетином прямих CD і DF .

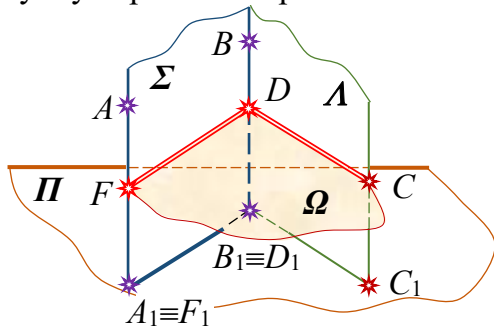


Рис. 1.30

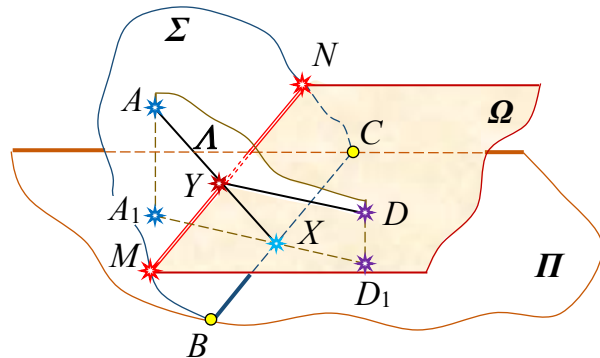


Рис. 1.31

5. Дано площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і точку $D(D_1)$. Провести через точку $D(D_1)$ площину рівня і побудувати пряму перетину її із площиною Σ .

Шукану площину Ω (рис. 1.31), як і в попередній задачі, слід зображати парою прямих, що перетинаються. Тут основну площину Π зручно перезадати перетином прямих $BC \equiv B_1C_1$ і A_1D_1 , остання з яких є слід-проєкцією проєкціювальної площини $\Lambda(AA_1D_1D)$, котра на рисунку визначена умовою задачі ($AA_1 \parallel DD_1$).

Отже, ввівши в розгляд проєкціювальну площину Λ , знаходимо пряму AH її перетину із заданою площиною загального розташування Σ (задача 7 у тексті). Тепер, у проєкціювальній площині Λ , через точку D паралельно A_1D_1 можна провести пряму рівня, яка буде однією з визначальних прямих площини Ω . Напевне, що точка Y перетину цієї прямої із прямою AH є спільною для площин Ω і Σ , тому, завершуючи, через точку Y у площині Σ проведемо ще одну пряму рівня MN , паралельну BC . Пряма MN , згідно з ознакою паралельності двох площин, й буде іншою (другою) визначальною прямою площини Ω ; окрім цього, вона є не лише прямою рівня площини Σ , а також прямою перетину заданої площини з шуканою площиною рівня. Задачу розв'язано.

Зараз подаємо ще один спосіб розв'язання задачі 7 із тексту цього розділу.

6. Побудувати пряму перетину площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ із проєкціювальною площиною $\Lambda(EF_1F)$.

4-й спосіб розв'язання (рис. 1.32). Площина основи Π на зображенні однозначно визначається перетином двох будь-яких прямих. Візьмемо, для визначеності, прямі A_1F_1 і E_1F_1 . Знову посилаємося на ознаку паралельності двох площин. Проведемо, приміром, через точку F площину-посередник Ω , паралельну Π . Це – площина рівня, яка проєкціювальну площину $\Lambda(EF_1F)$ перетне вздовж прямої рівня $FD \parallel F_1D_1$, що очевидно, а площину загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ – вздовж прямої рівня $PQ \parallel BC$ (задача 4). Прямі PQ і FD у своєму власному перетині висікають ще одну

(другу після $X = B_1C_1 \cap E_1F_1$) спільну для заданих площин точку Y . Пряма, яка з'єднує точки X і Y , є розв'язком задачі.

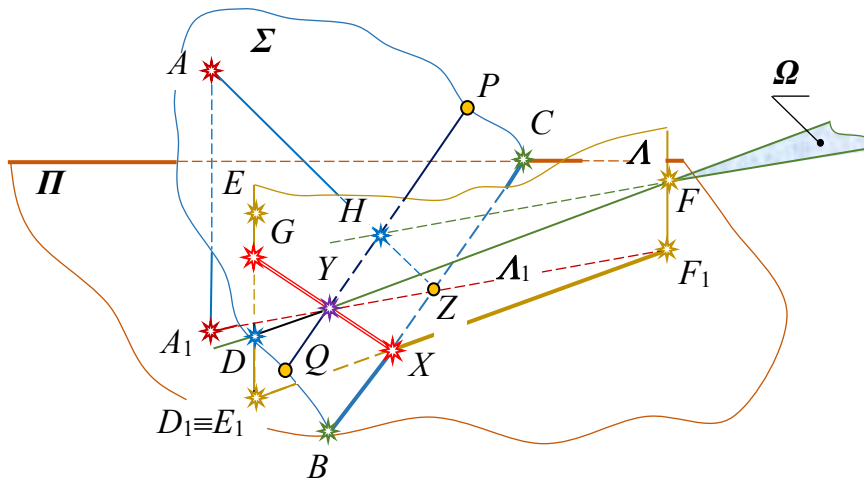


Рис. 1.32

У порівнянні можна помітити, що змістовно – у тлумаченнях словами та графічно – за числом допоміжних ліній побудови, найскладнішим є 4-й спосіб розв'язання задачі, де посередником вибрано площину рівня. Конструктивно ж – у візуальному, зримому сприйманні моделі, найбільш привабливим – другий.

До цього потрібно окремо додати, що лише після наочно-образного, просторово-ситуаційного осмислення групи задач підготовчого характеру, сформульованих і вже розв'язаних нами вище, усвідомленого покроково-рисунокowego уявлення правил-орієнтирів моделювання кожної з них на проєкційних кресленнях, можна сміливо перейти до компетентного розгляду *основних* та *комплексних позиційних задач стереометрії*. В таких задачах дані в умові фігури матимуть загальне розташування відносно основної площини, а також як завгодно складне варіаційне розміщення на картинній площині (див., напр., задачі 8 і 9 у тексті цього ж розділу).

А тепер подаємо ще один спосіб розв'язання задачі 8 із пункту 1.2.

7. *Задано дві площини загального розташування $\Sigma(A(A_1), BC)$ і $\Lambda(D(D_1), EF)$.*

і

Потрібно побудувати пряму їх перетину.

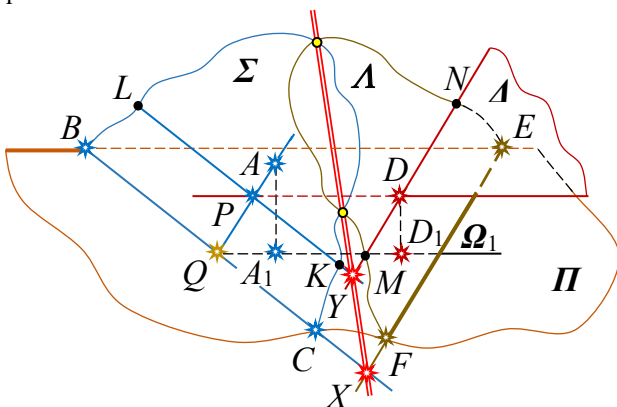


Рис. 1.33

2-й спосіб розв'язання. Напевне, що логічно виправдано було б спробувати саме з метою відшукування точки Y використати в ролі посередника (див. р. I, задачу 8) не проєкціовальну площину Ω , а ще одну площину рівня (рис. 1.33), паралельну Π . Безсумнівно, що таку площину (Δ) резонно задавати не будь-як, а розсудливо, творчо: по-перше, провести її, наприклад, через точку D площини Λ і, по-друге, визначитися з нею у просторі двома прямими, що

перетинаються, одна з яких паралельна EF , а інша – A_1D_1 . За таких умов, пряма MN перетину площини Δ і Λ буде утворюватися відразу, а пряма KL перетину площин Δ і Σ – за алгоритмом задачі 5. Але ж в останній задачі, якою ми зараз вимушені скористатися, додатково вводиться в розгляд все та ж сама площина-посередник $\Omega(AA_1D_1D)$, а

завершальний етап графічних дій на рисунку 1.33 мало чим відрізняється від випробовувань, проведених нами вище (на рис. 1.19). Отож, перетин заданих площин Σ і Λ допоміжною площиною-посередником Δ не є оригінальним прийомом, що очевидно. Це лише призводить до певних ускладнень побудовних реалізацій, чого по можливості потрібно уникати.

Звичайно, можна було б, наприклад, у площині Λ вибрати дві (загалом, будь-які) прямі EF і MN та знайти їх перетин з іншою площиною Σ в точках X і Y відповідно (див. рис. 1.33). Шлях графічного відтворення цього **третього** правила-орієнтиру дій на проєкційному кресленні пропонуємо реалізувати читачеві самостійно; опишіть словесно покроковий алгоритм розв'язання задачі.

8. Через задану точку $A(A_1)$ провести пряму, яка паралельна заданій площині $\Sigma(B(B_1), CD)$ і перетинає задану пряму $EF(E_1F_1)$.

Пошук шляху розв'язання комплексної позиційної задачі завжди і обов'язково потрібно розпочинати з детального **аналізу** (уявлення) взаємного розташування заданих умовою та шуканих геометричних об'єктів і створення **правила-орієнтиру дій** у просторі. Це визначальна передумова досягнення правильного результату, «прелюдія» до виваженого проведення певних операцій циркулем і лінійкою на проєкційному кресленні. В такому разі слід пам'ятати, що здійснювати аналіз варто повністю абстрагувавшись від типу креслення, а також від вибраного виконавцем конкретного (аналітичного, графічного чи графоаналітичного) методу розв'язання задачі. Тобто, тут ведуть пошукову роботу з уявними просторовими формами, зосередившись лише на створенні загальногеометричної схеми (алгоритму) дій в розглядуваній стереометричній ситуації.

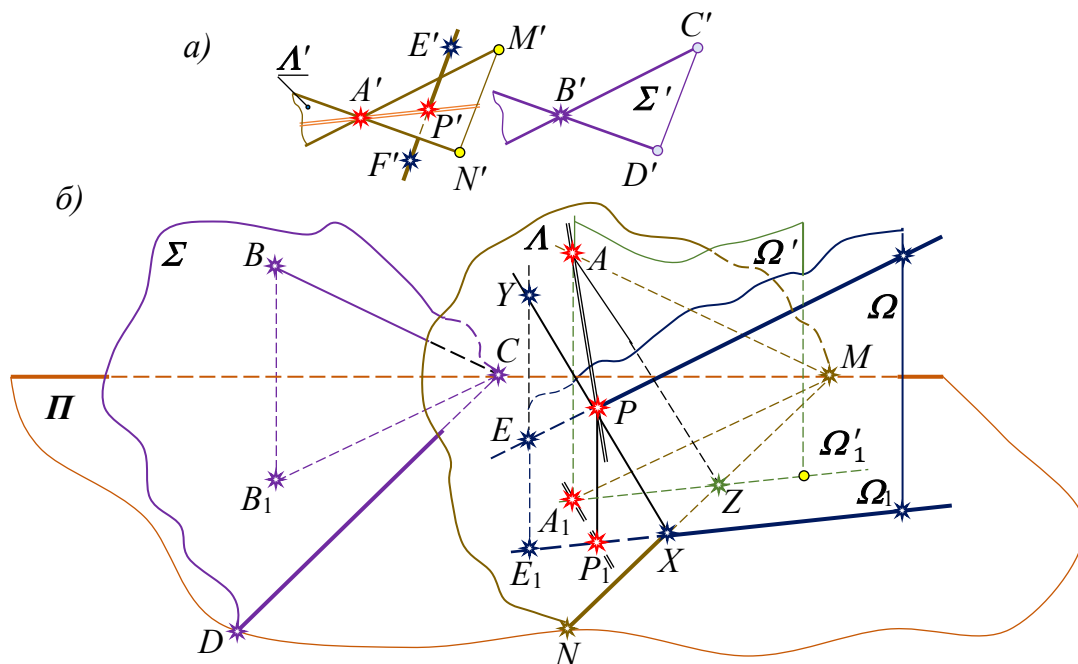


Рис. 1.34

1-й спосіб розв'язання. У випадку щойно сформульованої задачі (рис. 1.34), заданими є попарно не інцидентні точка A , площина Σ і пряма EF (поверніться в думці до п. 1.1). Шукана пряма має задовольняти трьом умовам відразу: містити точку A , бути паралельною площині Σ і перетинати пряму EF . Сконцентруємо свою увагу на перших двох умовах і відкинемо тимчасово третю умову. Отож, ми шукаємо пряму, яка містить точку A і паралельна площині Σ . Скільки таких прямих можна провести у просторі? Безумовно, безліч. Всі вони будуть розміщені в деякій площині (Λ), яка обов'язково

проходить через точку A і паралельна площині Σ (друга ознака паралельності прямої і площини). Тепер, із геометричного місця прямих площини Λ , які задовольняють першим двом умовам, потрібно вибрати ту, яка перетинає пряму EF , тобто задовольняє також третій умові. Очевидно, що для цього досить знайти точку перетину P заданої прямої EF із задіяною площиною Λ і з'єднати її з точкою A .

Із наведених уявлених міркувань безпосередньо випливає чіткий алгоритм просторових дій: **1).** Через точку A' (рис. 1.34, *a*) проведемо площину Λ' , паралельну площині Σ' . **2).** Знайдемо точку P' перетину прямої $E'F'$ із площиною Λ' . **3).** У площині Λ' проведемо шукану пряму $A'P'$.

Отже, в цьому методі закономірних пошуків замовленого умовою результату, основоположною є **перша** основна позиційна задача.

Реалізацію наведеного алгоритму на позиційно визначеному кресленні (рис. 1.34, *б*), як наголошувалося, потрібно провести залучивши до справи вже відомі нам, вище описані конструктивно-рисункові схеми: на першому кроці скористаємося задачею 2 (див. вище), а на другому – задачею 12 основного тексту, чим однозначно буде встановлено зображення шуканої прямої $AP(A_1P_1)$.

2-й спосіб розв'язання. Згідно із твердженням теореми 1.1 ([15], §1, п. 2), через пряму $E'F'$ і точку A' , яка не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. Нехай це буде площина $\Lambda'(A', E'F')$ (рис. 1.35, *a*). Якщо площини Σ' і Λ' перетинаються по прямій $M'N'$, то пряма, яка містить точку A' і паралельна прямій $M'N'$, обов'язково належить площині Λ' ([15], §2, задача 4), а отже, перетинає пряму цієї ж площини $E'F'$ у деякій точці P' ; поряд із цим, остання пряма ($A'P'$) паралельна площині Σ' ([10], §2, п. 9, теорема 2.3), тобто це й буде шукана пряма, адже вона задовольняє всі три вимоги умови задачі.

Неважко помітити, що в таких міркуваннях на шляху до розв'язку базовою виявилася вже **друга** основна позиційна задача.

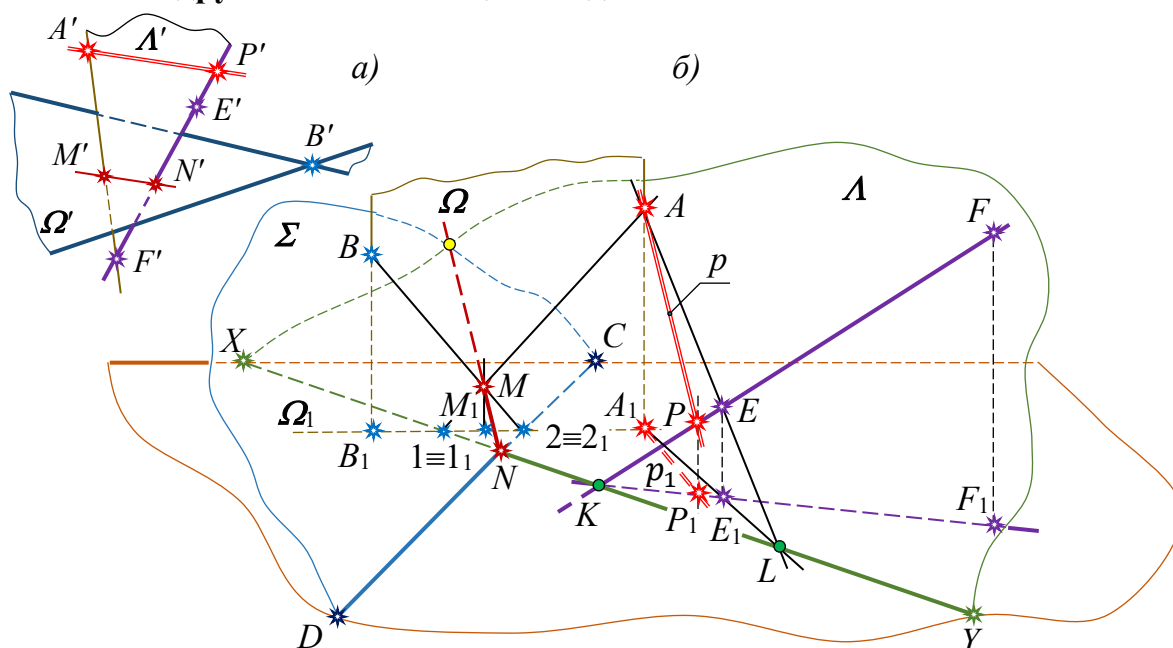


Рис. 1.35

Відтворення сформованого просторового алгоритму дій на моделі (рис. 1.35, *б*) зумисне проведемо дещо в іншому побудованому плані, ніж це має місце на наочному рисунку-схемі (посилаючись до задач основного тексту), а саме: **1).** Площину $\Lambda(A(A_1), EF(E_1F_1))$ перезадаємо, приміром, точкою $A(A_1)$ та її ж слідом $KL \equiv XY$ (задача 2);

2). Побудуємо пряму $MN(M_1N_1)$ перетину площин Σ і Λ (задача 8); 3. Через точку $A(A_1)$ проведемо пряму $p(p_1)$, паралельну $MN(M_1N_1)$ (задача 3); 4). В перетині знайденої прямої $p(p_1)$ із заданою прямою $EF(E_1F_1)$ фіксуємо точку $P(P_1)$: $P = p \cap EF$, $P_1 = p_1 \cap E_1F_1$. Тут зображення точки P і її вторинної проєкції P_1 обов'язково мають належати одній-єдиній шпичі внутрішнього проєкціювання PP_1 (тест на вірність та, врешті, на якість виконання навчального проєкційного креслення). Задача розв'язана.

Завершуючи тематику «Задачі з перших розділів стереометрії», настійно пропонуємо для самостійного розв'язання номери 9-11 із розділу «Тренувальні вправи і завдання». Змодельуйте їх наочними зображеннями як у просторі, так і на проєкційних кресленнях. Дайте, будь-ласка, детальні вербальні пояснення покрокової реалізації алгоритмів дій конструктивно-генетичним методом, оскільки тепер усім достеменно відомо, що без досвіду ґрунтовних побудовних навичок у дисципліні «Стереометрія», не опанувавши канонів **позиційної** складової на основі конструктивного підходу, шанси на успіх, щонайменше, примарні у професійному пізнанні **метрики** геометрії.





«...Уся природа знаходить вираз у символах
геометричного мистецтва»
Йоганн Кеплер

ПЕРЕРІЗИ ТІЛ ПЛОЩИНОЮ

§1. Моделювання перерізів багатогранників площиною

Доводячи теореми і розв'язуючи в курсі стереометрії традиційно звичні задачі на обчислення, учні досить часто переймаються перерізами тривимірних тіл площиною загального (частинного) розташування. У збірниках задач, зокрема, такими тілами є переважно піраміди та призми.

Природно, що суть постановки змістовно значущої задачі на перерізи полягає в тому, щоб побудувати зображення фігури перерізу, маючи зображення самого багатогранника і умови, які встановлюють (задають) на проєкційному кресленні січну площину. Чи означає сказане, що у висновку задачі завжди сформульовано домагання побудови того чи іншого перерізу? Зовсім не обов'язково. Висновком задачі може бути чітко описана вимога обчислити або площу вказаного перерізу, або відношення, в якому січна площина розділяє об'єм (поверхню) багатогранника, або відстань від деякої його точки (вершини) до площини перерізу тощо. У такому випадку накреслення фігури перерізу піраміди чи призми буде проміжним, допоміжним етапом. Однак для досягнення кінцевої мети дуже істотно мислено «бачити», уявляти достовірну форму фігури перерізу та її розташування відносно визначальних елементів багатогранника, а тому процес пошуку розв'язання такої задачі як на конструктивному, так і на обчислювальному етапах має бути щоразу глибоко обміркованим і переконливо обґрунтованим.

Уявимо собі деякий опуклий багатогранник – піраміду або призму курсу стереометрії ЗЗСО – і яку-небудь площину. Зрозуміло, що при будь-якому взаємному розташуванні у просторі означених фігур *перерізом* (якщо такий існує) *опуклого багатогранника буде плоский, опуклий і замкнений багатокутник*. Його вершини, загалом, є точками перетину січної площини з ребрами багатогранника, а сторони – відрізками перетину цієї площини із гранями багатогранника. Отже, в побудові перерізу багатогранника площиною, незалежно від обраних логічно незаперечних словосполучень у поясненнях дій виконавця, випадає шукати визначене (скінченне) число раз або вершини шуканого багатокутника, або його сторони, що, врешті-решт, однаково призводить до бажаного результату. Але ж такі задачі в геометрії якраз і є, як відомо, **основними позиційними** і цей факт, вочевидь, ще раз переконливо обґрунтовує таку гучну назву останніх.

Справді, вже на цьому етапі міркувань доречно чітко вирізняти два методи

розв'язування задачі на переріз багатогранника площиною: **1) метод ребер**, коли будують вершини шуканого багатокутника як точки перетину ребер багатогранника із заданою площиною; **2) метод граней**, коли будують сторони цього ж багатокутника як лінії перетину граней багатогранника із заданою площиною. Все ж таки, в більшості випадків на практиці зручно користуватися **змішаним методом**, який, з урахуванням умов задавання січної площини, певною мірою спрощує перебіг графічних операцій і пришвидшує результат.

Розв'язуючи на повному проєкційному кресленні позиційну задачу на побудову перерізу, учень обов'язково користується внутрішнім центральним чи паралельним проєкціюванням на основну площину. До діла нагадаємо, в найпростішому випадку аксонометрії точка простору A' на картинній площині вважається позиційно визначеною, якщо задано зображення не лише самої точки (A), а й її проєкції на одну з координатних площин (A_1), які пов'язані між собою променем AA_1 (спицею) внутрішнього проєкціювання. Якщо ж на картинній площині вже є в наявності зображення піраміди чи призми, то за основну, як правило, вибирають площину основи багатогранника. Тоді бічні ребра і грані стереометричного тіла обов'язково будуть проєкціювальними у внутрішньому проєкціюванні на площину основи. За цих умов, для задавання точки на поверхні просторової фігури, досить задати зображення точки і вказати словесно (символічно) ребро (грань) її розміщення. Далі, для побудови основи точки, потрібно лише пригадати збиральну властивість слід-проєкцій проєкціювальних прямих і площин (ребер і граней) та скористатися, при потребі, відповідним проєкціювальним променем.

Додамо таке. В попередніх випробуваннях, знайомлячись із правилами та методами бінарного моделювання правильними і наочними зображеннями геометричних об'єктів, їх розташувань та інциденцій, доводилося щоразу чітко розрізняти оригінал і його модель, виконану виключно в паралельній проєкції. Ми їх по різному називали і на кожному кроці через відповідну термінологію наголошували, що маємо на дошці (в зошиті) справу не з конусом, циліндром, пірамідою чи призмою, а із зображенням конуса, циліндра, піраміди чи призми, не з висотою, бісектрисою чи медіаною трикутника, а з їх проєкціями. Зараз же ми розпочинаємо графічно розв'язувати позиційні задачі, які стосуються безпосередньо визначеної умовою стереометричної фігури. Тому і будемо переважно говорити (писати) не про проєкції, не про зображення, а про самі фігури і про те, як будується чи розташовується у просторі той чи інший елемент фігури-оригіналу. Якщо ми, наприклад, скажемо: «Проведемо через точку A пряму n , паралельну до площини трикутника ABC », то будемо мати на увазі паралель до площини у просторовій моделі фігури, незалежно від того, як площина трикутника ABC і пряма n будуть зображені на кресленні. Якщо ж говорити коротко, то такі робочі рисунки будемо розглядати лише як ілюстрацію, як наочну графічну модель, яка допомагає з'ясувати особливості фігури, про яку йдеться в задачі. Спотворення, обумовлені зовнішнім проєкціюванням, ми перестанемо помічати (і чим раніше, тим краще!). Розмірковування, зокрема й у письмових поясненнях і обґрунтуваннях до пошуку шляху розв'язання задачі, будуть стосуватися самої фігури, а не її зображення, наприклад: «Нехай $SABCD$ –

правильна чотирикутна піраміда. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через середини ребер BC і CD паралельно ребру SC ». При цьому елементи даної фігури будемо називати за їх буквеними позначеннями на проєкційному кресленні.

А тепер продемонструємо методи ребер і граней на кількох елементарних прикладах, акцентувавши увагу на їх внутрішню спорідненість, адекватність логіки міркувань у діях, інваріантність підходів у досягненні результатів.

Задача 1. Зрізати трикутну піраміду $SA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через задані точки L і M на двох бічних гранях піраміди та точку N на площині її основи.

На картинній площині (рис. 1.36) апарат внутрішнього центрального проєкціювання цілком визначено точкою S , площиною основи $A_1B_1C_1$ і в'язкою променів (шпиць), які виходять із точки S . Тут LMN називають інколи трикутником, яким задається площина перерізу, а $L_1M_1N_1$ – його основою. Основи L_1, M_1, N_1 точок L, M, N є відповідно точками перетину із площиною основи променів внутрішнього проєкціювання (шпиць) SL, SM і SN ($L_1 \in A_1B_1, M_1 \in B_1C_1, N \equiv N_1$).

У залежності від можливого розташування вершин трикутника, яким задано переріз, січна площина $\Sigma(LMN)$ могла б бути паралельною тій чи іншій грані піраміди або ж паралельною лише одному її ребру, а також такою, яка перетинає площину основи або ж не перетинає її. Найпростішим є той випадок, коли всі бічні ребра мають із площиною перерізу спільні точки, тобто коли шукана фігура перерізу в межах зображення багатогранника розташовується вище основи.

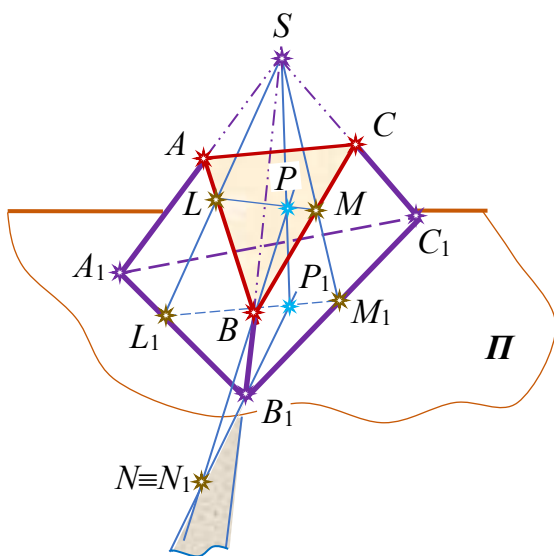


Рис. 1.36, а

Сформульована задача в її графічній реалізації надто проста. Проте на самому початку ми змушені наголосити на такому. **В методології** навчання конструктивної стереометрії важливі **не тільки і не стільки** навички механічного виконання операцій циркулем та лінійкою на площині зображень (що лишень й можна інколи почути від учня ЗЗСО), **скільки розуміння** геометричного змісту сформульованої в умові конструкції, **усвідомлення конкретної просторової ситуації** і, як наслідок, **уміння** правильно та змістовно **обґрунтувати** кожний крок у сконструйованому ланцюжку операцій і

обов'язкових, присутніх просторових перетворень.

Розпочнемо відшукування зумовленого перерізу, наприклад, **методом ребер** (рис. 1.36, а). Аналізуючи, оцінюючи мислено просторову ситуацію, помічаємо, що фігура перерізу виявиться цілком визначеною, якщо на проєкційному кресленні буде знайдено точку B перетину проєкціювального ребра піраміди SB_1 із січною площиною $\Sigma(LMN)$. Отож, діємо так: **1)** через ребро SB_1 проведемо проєкціювальну

площину-посередник $\Omega(SB_1, N \equiv N_1)$; **2**) побудуємо пряму $PN(P_1N_1)$ перетину площин Σ і Ω (тут другу спільну точку $P(P_1)$ названих площин знаходимо в перетині прямої $LM(L_1M_1)$ площини Σ із площиною-посередником $\Omega(\Omega_1)$); **3**) зафіксуємо точку $B(B_1)$ як інциденцію прямих SB_1 і PN . Нарешті, провівши промені BL і BM відповідно у гранях SA_1B_1 і SB_1C_1 , знайдемо дві інші вершини трикутника перерізу ABC : $A = BL \cap SA_1$, $C = BM \cap SC_1$.

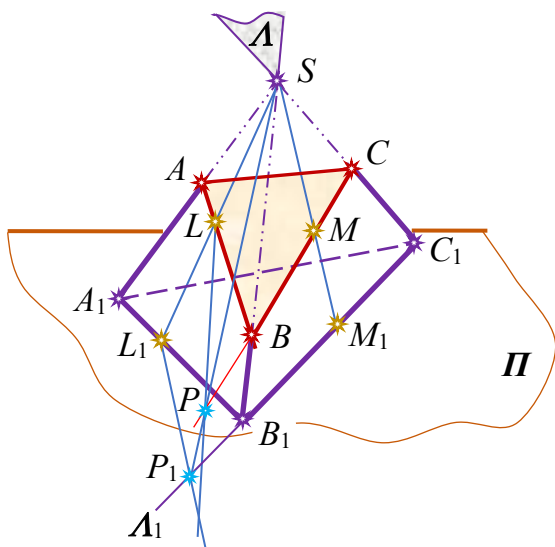


Рис. 1.36, б

вершину A знаходимо як у попередньому випадку: $A = SA_1 \cap BL$.

Зауважимо, що було б не зовсім коректно стверджувати, нібито у першому варіанті розв'язання задачі побудову виконано строго методом ребер. Адже шукані вершини A і C одержано як інциденції (відповідно ребер піраміди SA_1 і SB_1) уже визначених точкою B прямих (BL і BM) перетину площини $\Sigma(LMN)$ із гранями SA_1B_1 і SB_1C_1 цієї ж піраміди. Аналогічно, у другому варіанті, є сумнівною строгість методу граней, бо алгоритм дій у тому самому (до дрібниць) графічному представленні можна було б перефразувати і так: **1**) через ребра SB_1 і SC_1 (одночасно) проведемо проєкціювальну площину-посередник $\Lambda(SB_1C_1)$; **2**) побудуємо пряму $MP(M_1P_1)$ перетину площин $\Sigma(LMN)$ і $\Lambda(SB_1C_1)$; **3**) знайдемо точки $B(B_1)$ і $C(C_1)$ перетину прямої MP із ребрами SB_1 і SC_1 відповідно. Наведеною щойно процедурною схемою, як неважко здогадатися, індукується метод ребер. Таким чином, у виборі методу розв'язання задачі, врешті-решт, багато чого залежить від постановки питання виконавцем побудови, і тут не суть важливо, що буде покладено в основу конструкції – задачу на перетин прямої із площиною чи задачу на перетин двох площин, – результат буде один і той самий, оскільки основні позиційні задачі, як із наголосом підкреслювалося (див. ч. II, р. I, п. 1.2), тісно переплітаються між собою, нероздільно пов'язані одна з одною єдиним методом, який має назву «метод посередників».

Задача 2. Побудувати багатокутник перерізу правильної чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через точку M на бічному ребрі BB_1 паралельно діагоналі основи AC та перехресній із нею діагоналі призми BD_1 .

Згідно з ознакою паралельності прямої та площини ([10], §2, п.9, теорема 2.3), задану в умові задачі січну площину Σ потрібно на проєкційному

кресленні (рис. 1.37) візуально перезадати двома прямими, які перетинаються. При тому одну із прямих, нехай нею буде, наприклад, пряма m , розташуємо у просторі паралельно діагоналі призми BD_1 , а іншу n – паралельно діагоналі $AC(A_1C_1)$ її верхньої (нижньої) грані. Отож проведемо в діагональному перерізі призми BB_1D_1D через точку M пряму m , паралельну BD_1 , і відмітимо точку $N \equiv N_1$ перетину останньої з B_1D_1 ; через точку $N \equiv N_1$ у площині нижньої основи призми проведемо пряму n , паралельну A_1C_1 .

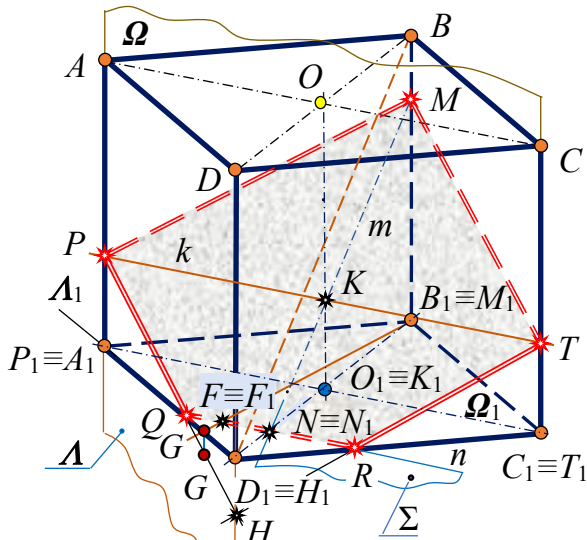


Рис. 1.37

точці $K(K_1 \equiv O_1)$, а пряма k ($k_1 \equiv A_1C_1$), яка проходить через точку K паралельно QR , є лінією перетину площин Σ і Ω , а отже, належить площині Σ і висікає на ребрах AA_1 та CC_1 останні дві вершини P і T багатокутника перерізу $MPQRT$.

Привертаємо увагу до факту, що наведені міркування більше притаманні методу ребер, адже ввівши в розгляд проєкціювальну площину-посередник $\Omega(AA_1 \parallel CC_1; A_1C_1 \equiv \Omega_1)$, ми скористалися ОПЗ-1 стосовно вказаних ребер призми. Так само успішно можна було б розпочати побудову з відшукування, скажімо, лінії перетину січної площини Σ грані AA_1D_1D (чи DD_1C_1C), яка за побудовою вже має з Σ одну спільну точку $Q \equiv Q_1$ ($R \equiv R_1$). Оскільки площина $\Lambda(AA_1D_1D)$ – проєкціювальна ($A_1 \equiv A_1D_1$), для відшукування ще однієї точки $G(G_1)$, що належить площинам Σ і Λ одночасно, зручно у площині Σ рисунково вдало ввести допоміжну пряму, наприклад $MF(M_1F_1)$, де $F(F_1) \in QR(Q_1R_1)$, і побудувати перетин останньої із проєкціювальною площиною Λ . Пряма QG на прямих AA_1 і DD_1 висікає відповідно точки $P(P_1 \equiv A_1)$ і $H(H_1 \equiv D_1)$, що й призведе, врешті-решт, до остаточної побудови багатокутника перерізу $MPQRT$.

Очевидно, що такий хід міркувань у розв’язанні задачі властивий методу граней, адже побудова лінії перетину площини лівої грані паралелепіпеда з січною площиною цілком позиційно визначає на кресленні шуканий багатокутник перерізу $MPQRT$. Той факт, що задача на перетин двох площин Σ і Λ включає в себе задачу на перетин прямої $MF(M_1F_1)$ із площиною Λ , на теперішньому рівні розуміння суті питання вже є природним явищем.

Окремо зауважимо, розв'язану щойно задачу на побудову можна легко переформулювати в задачу на обчислення (наприклад, – площі фігури перерізу), додавши в умові, наприклад, такі метричні параметри: ребро в основі призми рівне a , бічне ребро – $1,5a$, а $BM : MB_1 = 1 : 4$.

Окрім цього, пропонуємо зацікавленій особі з'ясувати, як можна спростити побудову, врахувавши, що діагональний переріз BB_1D_1D призми є її площиною симетрії? Та, до того ж, з'ясуйте форму фігури перерізу, змінюючи місце точки M на ребрі BB_1 .

Задача 3. Дано піраміду $SABCDE$ і площину Σ , яка визначена трійкою неколінеарних точок K, L і M . Відомо, що точка K належить ребру SA , точка M – грані SDE , а точка $L(L_1)$ розташовується всередині піраміди. Побудувати переріз піраміди площиною $\Sigma(KLM)$.

Для поіменного встановлення бічних ребер, точки перетину яких із площиною Σ доведеться обов'язково будувати (рис. 1.38), доречно зримо провести аналіз розташування вершин трикутника площини перерізу (KLM) відносно ребер і граней піраміди. Для цього в уявленнях, за годинниковою стрілкою чи проти неї, виконаємо обхід поверхні піраміди, розпочинаючи, приміром, із ребра SA . Чому саме з ребра SA ? Очевидно тому, що одна з вершин шуканого багатокутника – точка K – уже задана саме на цьому ребрі. Наступну вершину R можна знайти на ребрі SF , ще одну вершину T – на SE . Оскільки точка $M(M_1)$ належить грані SDE , то немає потреби будувати точку N перетину ребра SD із січною площиною, її знайдемо спільною для прямих TM і SD . Щоб замкнути шукану ламану, залишиться знайти точки U і W , які належать відповідно ребрам SC і SB та площині перерізу Σ .

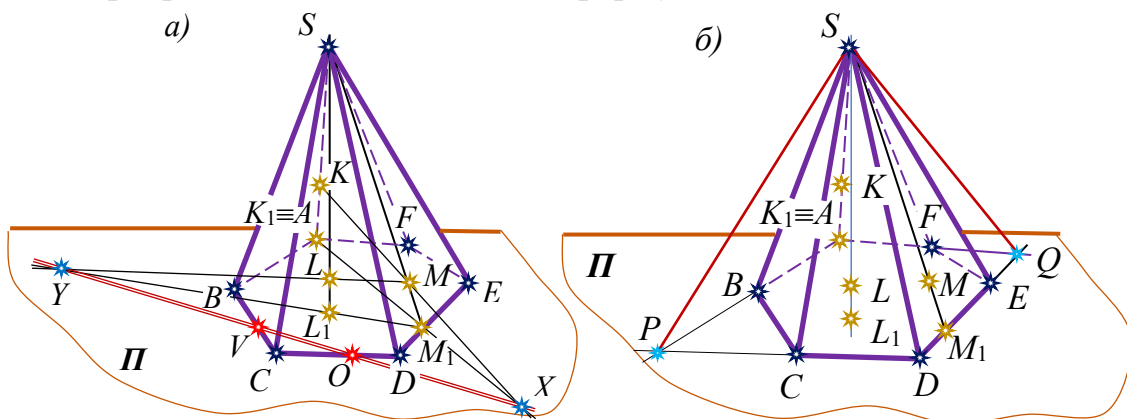


Рис. 1.38

Отже, багатокутник перерізу буде побудовано, якщо будуть знайдені на проєкційному кресленні точки перетину чотирьох бічних ребер піраміди (SF, SE, SC і SB) із площиною $\Sigma(KLM)$. Звичайно, здійснити задумане можна або методом ребер, або ж методом граней. Причому, в обох випадках виконавцю побудов доведеться лише двічі розв'язувати одну з основних позиційних задач. Як саме це потрібно зробити, пропонуємо читачеві вирішити самостійно (підказ: скористайтеся лише двома площинами посередниками $\Delta(SBE)$ і $\Delta(SCF)$).

Інколи, користуючись буденною термінологією, запропонований вище шлях до результату називають ще розв'язуванням «у лоб». Проте більше цінуються

вміння шукати і знаходити короткий, оптимальний варіант у схемі графічних операцій. Це конструктивно привабливо і, навіть, геометрично красиво. Таке дійство особливо корисне в ситуації, коли багатогранник уміщує чималеньке число бічних граней (коли це піраміда, вписана в конус).

Тут, перш за все, рекомендується пам'ятати про слід січної площини на площині основи (див. детально [6]), який, за певних вихідних умов, навч виключає з розгляду деякі бічні ребра. Наприклад, на рисунку 1.38, а вже побудовано слід XU площини $\Sigma(KLM)$. Дякуючи рисунку, зримо помічаємо, що ребро SC і площина перерізу в межах даного зображення піраміди $SAB CDEF$ не мають спільних точок.

Окрім цього, дуже важливо вміти робити на картинній площині умовний (рисунковий) перехід від уже заданого багатогранника до багатогранника, що вміщує в собі заданий і має менше число бічних ребер та граней (рис. 1.38, б). Така важлива операція елементарно призводить до зменшення кількості розв'язувань основних позиційних задач, які через відпрацьовану систему дій якраз і визначають багатокутник перерізу. Графічна реалізація такого перетворення проєкційного креслення порівняно проста, а спирається вона на **задачу про побудову лінії перетину двох несуміжних бічних граней піраміди чи призми**, які за будь-яких умов є проєкціювальні на площину основи багатогранника (р. I, п. 1.2, задача 3).

То ж скориставшись допоміжним перетворенням заданого зображення, перейдемо від шестикутної піраміди $SAB CDEF$, скажімо, до чотирикутної піраміди $SAPDQ$ (рис. 1.38 б, в). Далі шукаємо точки перетину ребер SP і SQ із площиною $\Sigma(KLM)$ за звичним алгоритмом дій у три кроки: **1)** введемо в розгляд проєкціювальну площину-посередник Ω , яка вдало вибирається учнем і вже задана на моделі ребрами SP і SQ , що є для неї визначальними; **2)** будуюмо пряму (1–2) перетину площини перерізу $\Sigma(KLM)$ із площиною-посередником Ω ($PQ \equiv \Omega_1$): $1(1_1) = KM(K_1M_1) \cap \Omega(\Omega_1)$; $2(2_1) = LM(L_1M_1) \cap \Omega(\Omega_1)$; **3)** знаходимо точки перетину прямої (1–2) з ребрами SP і SQ відповідно: $G = SP \cap (1-2)$; $H = SQ \cap (1-2)$.

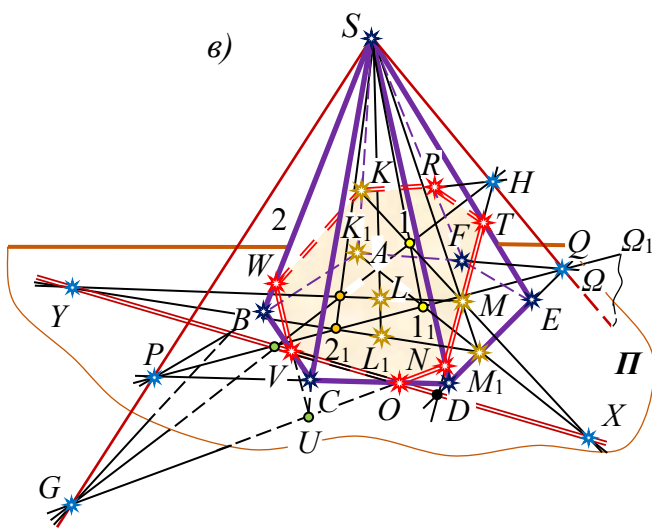


Рис. 1.38

основи піраміди і не є реальною вершиною шуканого багатокутника, то відрізок

Наступні міркування вельми прості та майже очевидні в їх графічній реалізації. Справді, точки H і M належать грані SDQ , а точки H і K – грані SAQ . Провівши прямі HM і HK , відразу знаходимо ще три вершини багатокутника перерізу T , N і R відповідно на ребрах SE , SD і SF . З іншого боку, точки G і N належать грані SPD , а точки G і K – грані SPA . Тому прямі GN і GK висікають на бічних ребрах SC і SB дві останні вершини U і W . Нарешті, оскільки точка U лежить нижче

NU в перетині зі стороною CD її основи дасть точку O , а відрізок WU в перетині зі стороною BC – точку V . Точки O і V є особливими вершинами багатокутника перерізу $KRTNOVW$, адже ними визначено слід січної площини на площині основи даної шестигранної піраміди.

З'єднувати відрізками прямих можна лише ті дві знайдені вершини, які належать одній і лише одній грані багатогранника. Це й будуть сторони багатокутника перерізу, видимість яких встановлюється з урахуванням видимості граней, що вміщують ці сторони.

Якщо у процесі аналізу вихідних даних і осмислення рисунка до задачі важко відразу зорієнтуватися у встановленні місця розташування і числа вершин фігури перерізу, то, як пропонувалося вище, можна знайти слід (XY) січної площини на площині основи (див. рис. 1.38) і подивитися чи перетинає він багатокутник в основі багатогранника, чи ні. Безумовно, це дещо прояснить просторову ситуацію, однак було б безпідставно стверджувати категорично, що така операція завжди є обов'язковою. Можна відразу ж, уявивши бічні ребра променями, не обмеженими в напрямках SA, SB, SC, SD, SE і SF , відшукати їх точки перетину із площиною трикутника KLM , зокрема, і за межами піраміди – під її основою (як, наприклад, точку U на промені SC). Потім багатокутник, побудований за так знайденими вершинами (і уявними в їх числі), висіче на ребрах основи ще дві реальні вершини. За будь-яких умов не потрібно розглядати ребра в основі стереометричного тіла окремо одне від одного, шукаючи їх спільні точки із площиною Σ , тобто тут, принагідно, доречно виключно ОПЗ-2.

Істотно розуміти, що в таких позиційних задачах немає особливої потреби завчасно визначатися з числом вершин багатокутника перерізу, оскільки це питання завжди вирішується чітко у процесі побудови, якщо, звичайно, побудова виконується закономірно й достатньо акуратно. Однак останнє зовсім не означає, що не потрібно детально аналізувати особливості багатогранника, його суто геометричні і позиційні характеристики та розташування січної площини відносно ребер, граней і деяких інших визначальних елементів просторової фігури. Зовсім навпаки, такий аналіз забезпечить розуміння внутрішньої суті конструкції і встановлення правильного та найбільш раціонального шляху в моделюванні перерізу. Це надзвичайно істотно у випадку, коли січна площина задається деякими особливими умовами, відмінними від традиційних. Наприклад, площина Σ може проходити через: **1)** дану точку паралельно даній площині; **2)** дану точку паралельно двом заданим мимобіжним або таким, що перетинаються, прямим; **3)** одну із двох даних мимобіжних прямих паралельно іншій; **4)** дану точку перпендикулярно до даної прямої; **5)** дану пряму перпендикулярно до даної площини; **6)** дану точку перпендикулярно до даної площини і паралельно даній прямій; **7)** дану пряму під даним кутом до даної площини [13]. Обґрунтовуючи форму фігури перерізу і алгоритм її побудови в кожному з випадків, потрібно посилаючись до відповідних означень, аксіом, а також теорем на перпендикулярність і паралельність прямих та площин. Дуже часто, розв'язуючи задачу на переріз в якомусь конкретному варіанті умови, доцільно перезадати січну площину трикутником або парою паралельних чи таких, що перетинаються, прямих, тобто повернутися до часто вживаного,

звичного представлення площини на проєкційному кресленні, а далі діяти за вже відомою схемою.

Продемонструємо сказане порівняно простою задачею на обчислення, яка за своїми геометричними формами і змістом не може бути названа оригінальною чи, навіть, «із родзинкою»; це – задача, на вістрі якої є лише переріз тіла *нетрадиційно* заданою площиною.

Задача 4. *Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, в якому $AC = a$, $BD = b$. Бічне ребро SA перпендикулярне площині основи. Через точку A і середину ребра SC проведено площину, паралельну діагоналі BD . Знайти площу фігури перерізу, якщо $SA : AC = 2\sqrt{2} : 1$.*

Нехай $SABCD$ – задана піраміда (рис. 1.39). Площина перерізу Σ чітко визначається двома точками (прямою AM) та її певним розташуванням відносно діагоналі BD ромба. Якщо M – середина ребра SC (згідно з умовою), то AM – медіана трикутника SAC . Ще одна медіана SO цього ж трикутника – відрізок, спільний для діагональних перерізів піраміди SAC і SBD . Нехай SO перетинає AM у точці Q . Тоді $SQ = \frac{2}{3}SO$. Проведемо через точку Q пряму p , паралельну BD . Цим дійством ми фактично **перезадаємо** зумовлену площину двома прямими, які перетинаються: $\Sigma(p \cap AM)$. Очевидно (див. [10], §2, теорема 2.1), пряма p належить площині трикутника SBD і перетинає ребра піраміди SB і SD в точках P і N , які разом із точками A і M будуть вершинами чотирикутника перерізу $APMN$. Переріз побудовано, спираючись на вихідні дані задачі та логіку міркувань.

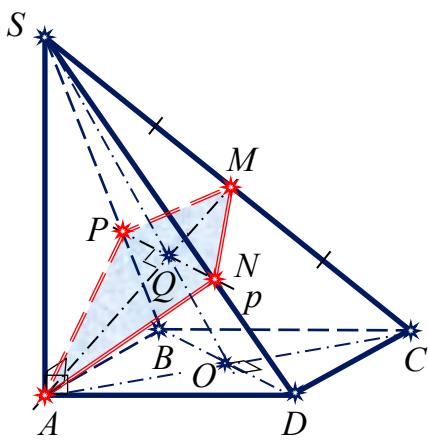


Рис. 1.39

У наведених щойно міркуваннях метод посередників неначе не простежується. Проте залучення до справи відрізка SO має в цьому сенсі своє тлумачення. А саме, одним із варіантів у поясненнях може бути ще й такий. У трикутних пластинок SAC і SBD уже є одна спільна точка S . Ще одну аналогічну точку O знайдемо за допомогою площини-посередника $\Lambda(ABCD)$, яка в перетині із пластинками визначає відповідно відрізки AC і BD . Останні у власному перетині дають точку O . Можна було б також говорити про точку Q , що є перетином прямої AM із площиною трикутника SBD . Тут, для відшукування точки Q , у ролі посередника могла б бути задіяна площина трикутника SAC . Таким чином, хочемо ми скористатися усталеним підходом в обґрунтуваннях рисункової діяльності чи ні, все ж *природна сутність методу посередників у позиційних задачах на побудову спільних елементів незаперечна*.

Аналізуючи, помічаємо, що $AM \perp PN$ (спрацьовує обернена теорема про проєціювання прямого кута: $PN \parallel BD$, AO – проєкція AM на площину основи піраміди), MO – середня лінія трикутника SAC , а $\Delta SPN \sim \Delta SBD$. Але ж $AO = \frac{a}{2}$ і $SA = 2\sqrt{2}a$. Тому, по-перше, $MO = \frac{1}{2}SA = \sqrt{2}a$, а $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \frac{3}{2}a$ (цього ж самого результату дійдемо взявши до уваги, що у прямокутному трикутнику

$SAC \ AM = \frac{1}{2} SC$). І, по-друге, $\frac{PN}{BD} = \frac{SQ}{SO} \Rightarrow PN = \frac{BD \cdot SQ}{SO} = \frac{2}{3} b$. Остаточню матимемо:
 $S = \frac{1}{2} AM \cdot PN = \frac{ab}{2}$. Задачу розв'язано.

Алгоритмічна схема

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot PN \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AO = \frac{AC}{2} \Leftrightarrow AC = a, \\ MO = \frac{SA}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow SA = 2\sqrt{2} AC \Leftrightarrow AC = a; \end{array} \right. \\ PN = \frac{BD \cdot SQ}{SO} (\Delta SPN \sim \Delta SBD) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = b, \\ SQ = \frac{2}{3} SO (Q = SO \cap AM) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Задача 5. *Задано піраміду $SABCD$ і відрізок PQ , який належить грані SBC . Побудувати точку перетину прямої PQ із площиною грані SAD .*

Самодостатня пропозиція конструктивної стереометрії тіл належить до класу елементарних і є, часто-густо, окремим проміжним компонентом багатьох комплексних позиційних побудов. Вона цікава своїм безхитрїсним (нібито) формулюванням і можливими простими, несхожими у тлумаченнях способами розв'язання, виявити які, «побачити» може лише творчо налаштована особа, із відмінним наочно-образним і логічним мисленням.

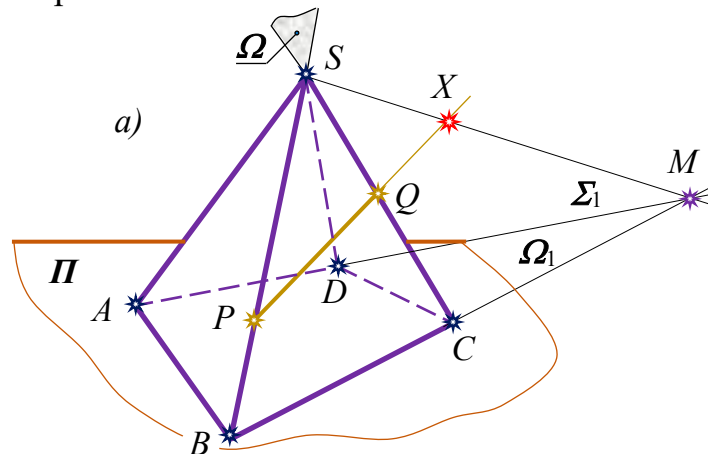


Рис. 2.40

1-й спосіб розв'язання (рис. 1.40, a). Оскільки, згідно з умовою задачі, передбачається відшукування на проєкційному кресленні точки перетину прямої та площини, то найліпше відразу звернутися до добре знайомого нам алгоритму дій у три кроки: **1)** скористаємося в якості посередника площиною Ω ($\Omega_1 \equiv BC$), яка – проєкціювальна та однозначно визначена прямою PQ і вершиною піраміди S (гранню SBC); **2)** побудуємо пряму SM перетину заданої Σ (SAD) і допоміжної Ω (SBC) проєкціювальних площин, одна спільна точка S яких уже є на площині зображень, а іншу точку M просто знаходимо в перетині слідів площин $\Sigma_1 \equiv AD$

та $\Omega_1 \equiv BC$ (див. вище, задача 3); **3)** відмічаємо точку X перетину прямих PQ і SM , яка й буде шуканою.

Далі додамо цікавіші варіанти дій – з елементами інтуїтивної творчості.

2-й спосіб розв'язання (рис. 1.40, б). Відразу домовимося в міркуваннях і викладках нижче точку X кваліфікувати виключно як слід прямої PQ на площині $\Sigma(SAD)$. Тоді задача зводиться до побудови прямої Ω^* – основи даної прямої PQ у власноруч обраному паралельному проєкціюванні на площину Σ .

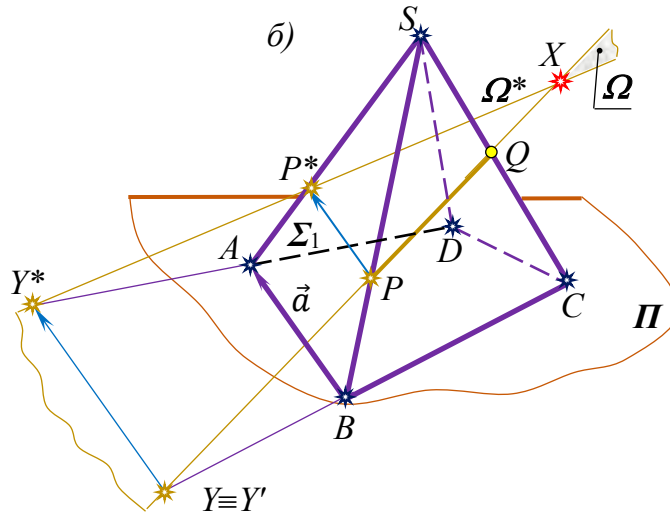


Рис. 1.40

Проекціюємо пряму PQ на площину грані SAD , наприклад, за напрямом $\vec{a} = \vec{BA}$. Очевидно, що точка P при цьому перейде у точку $P^* \in SA$ ($PP^* \parallel \vec{a}$), а слід прямої PQ на площині основи піраміди $\Pi(ABCD)$ – $Y \equiv Y_1$ – у точку $Y^* \in AD$ ($YY^* \parallel \vec{a}$). Точка X перетину прямих PQ і Y^*P^* й буде шуканою.

Привертаємо увагу читача до факту, що основну площину обрано нетрадиційно, а вибір напрямку проєкціювання хоч і не виключає певного суб'єктивного свавілля, мав би здійснюватися з позицій обов'язкового досягнення результату – помірковано та дотепно. Важливо усвідомлювати, що нині так введене внутрішнє винятково *паралельне* проєкціювання, на відміну від проєкціювання *центрального*, яке природно (і звично) визначається всередині піраміди точкою S і площиною основи $\Pi(ABCD)$.

Завдання. Чи є ще варіанти в обранні напрямку внутрішнього паралельного проєкціювання на ту ж площину проєкцій $\Sigma(SAD)$? Якщо так, то який цей напрям? Установіть його і обґрунтуйте моделью.

3-й спосіб розв'язання (рис. 1.40, в). Зараз знову вдамося до внутрішнього проєкціювання тієї ж прямої PQ на ту саму площину проєкцій $\Sigma(SAD)$. На відміну від попереднього – *паралельного*, це буде *центральне* проєкціювання, наприклад, із точки $Z \equiv Z_1$, яка є перетином пари протилежних сторін BA і CD чотирикутника $ABCD$. Очевидно, що тепер уже грань SBC проєкціюється строго у грань SAD ($S \rightarrow S, B \rightarrow A, C \rightarrow D$), а пряма PQ – у свою центральну проєкцію P^*Q^* , адже належність точок і прямих, як відомо, є інваріантом не лише паралельного проєкціювання, а й центрального. В перетині прямих PQ і P^*Q^* знаходимо шукану точку X .

На завершення операцій на проєкційному кресленні багатогранника в

елементарному графічному варіанті ОПЗ-1 доречно поставити (вже вкотре) принципове запитання: «В останніх двох простих конструктивних алгоритмах має місце метод посередників чи ні?» Так, звичайно має. Зокрема, на рис. 1.40, б) площина-посередник Ω однозначно визначена прямою PQ і напрямом проєкціювання $\vec{d}(\overline{BA})$, а на рис. 1.40, в – тією ж прямою PQ і точкою Z .

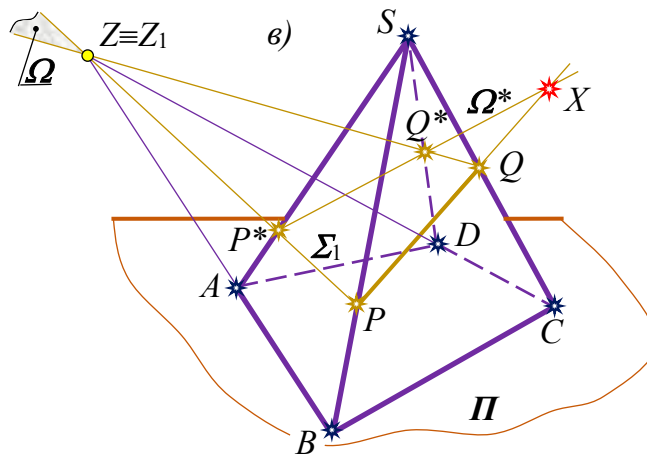


Рис. 1.40

Задача 6. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$. Через точку K на ребрі SA провести переріз піраміди, який мав би форму паралелограма.

Загострюємо увагу читача на нетрадиційному поданні умови задачі, де січна площина задається незвично і досить оригінально: точкою K на ребрі SA накресленого багатогранника та зарання встановленою формою шуканої фігури перерізу, однією з вершин якої є точка K .

Нехай чотирикутник $KLMN$ (рис. 1.41) задовольняє умову задачі, тобто перерізом піраміди справді є плоска фігура, в якій, як це прямо впливає з означення паралелограма, пари протилежних сторін попарно паралельні, а саме: $KL \parallel NM$ і $KN \parallel LM$. Далі, узагальнюючи в думці, виберемо спочатку для опрацювання такий варіант зображення піраміди, коли площина $\Pi(ABCD)$ основи віднесена необмежено вниз, а отже, вершини паралелограма є винятково точками бічних ребер. У такому разі, що очевидно, протилежні сторони фігури перерізу $KLMN$ належатимуть несуміжним бічним граням SAB і SCD , SBC і SDA відповідно. Отже, задана січна площина висікатиме на несуміжних бічних гранях відрізки паралельних прямих. Виникає запитання, за яких умов пару площин, що перетинаються, третя площина перетинає вздовж паралельних прямих? Тут, із елементарних уявлень, впливає єдино правильна відповідь – тоді, коли третя (січна) площина паралельна прямій перетину двох заданих (інших) площин.

На цьому етапі *аналізу* конструктивної задачі можна вважати завершеним, а в ситуації, що склалася, наступний етап – *побудову* чотирикутника $KLMN$ замовленої форми – визнати простим і майже очевидним.

1. Вже відомим прийомом змодельюємо спочатку зображенням прямих SP і SQ перетину площин двох пар несуміжних граней, як-от: $\Sigma(SAB)$ і $\Lambda(SCD)$; $\Delta(SBC)$ і $\Omega(SAD)$. Тепер, що безсумнівно, задана площина перерізу має більш зрозуміле позиційне розміщення у просторі – вона містить точку K і паралельна площині $\Theta(SPQ)$.

2. Через задану точку K проведемо пряму KL , паралельну SP , і пряму KN , паралельну SQ . Доречно нагадаємо, що пряма проведена через точку площини паралельно прямій цієї ж площини, теж належить заданій площині. Тому точки L на ребрі SB і N на ребрі SD – реальні, а трійка точок K, L і N однозначно визначатимуть на кресленні цю ж площину перерізу $\Gamma(KLN)$.

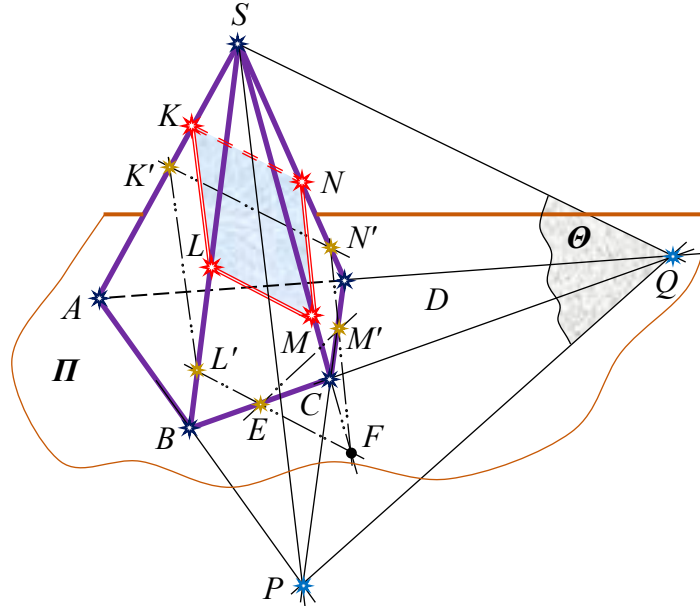


Рис. 1.41

3. Наприклад, через точку N проведемо пряму NM , паралельну SP , і з'єднаємо точки L та M . Стверджуємо, що чотирикутник $KLMN$ – шуканий паралелограм. Доведемо цей факт.

Оскільки, за властивістю транзитивності паралельних прямих, $KL \parallel NM$ ($KL \parallel SP$ і $NM \parallel SP$), то залишається довести, що $KN \parallel LM$. Працюватимемо методом від супротивного. Припустимо, що прямі KN і LM , які належать площині перерізу $\Gamma(KLN)$, перетинаються в деякій точці X . Але ж $KN \subset \Delta(SAD)$ і $LM \subset \Omega(SBC)$, а SQ є прямою перетину площин Δ і Ω , тому KN і LM перетинаються в точці X прямої SQ , а це – суперечність, оскільки $KN \parallel SQ$ за побудовою.

Заключний (третій) крок побудови можна було б подати й дещо по іншому, а саме: через точку N провести пряму, паралельну SP , до перетину з ребром SC у точці M , а через точку L – пряму, паралельну SQ , до перетину з тим самим ребром SC у точці M' . Спробуйте довести самостійно, що точки M і M' на ребрі SC зливаються, а це, у свою чергу, доводить той факт, що чотирикутник $KLMN$ – паралелограм.

Стосовно завершального етапу задачі на побудову, який ми називаємо дослідженням, то тут слід відзначити лише одне: форма фігури перерізу заданого на кресленні п'ятигранника $SABCD$ (див. рис. 1.41) площиною, паралельною площині $\Theta(SPQ)$, залежить виключно від місця розташування точки K на ребрі SA . Якщо слід площини перерізу $\Gamma(KLN)$ матиме дві спільні точки (E і F) із чотирикутником $ABCD$ в основі піраміди, то $KEFN$ буде паралелограмом лише за обставин, коли $ABCD$ – трапеція. Пропонуємо читачеві самостійно виконати рисунок до задачі в останньому варіанті умови (нехай, приміром $AD \parallel BC$).

§2. Пізнавально-візуальний підхід в опорядженні методів побудови перерізів тіл площиною

Наведені в попередньому параграфі викладки засвідчують, що природно узгоджена схема пошуку шляху розв'язання будь-якої стереометричної задачі на інциденції втілює в собі метод посередників, оскільки прямо чи побічно кожна з таких побудовних пропозицій передбачає наявність серед допоміжних геометричних об'єктів конструкції не менше однієї площини-посередника. Задля цілковитого порозуміння в цьому питанні, логічно було б погодитися, що тільки після наочно-образного обґрунтування струнких закономірностей універсального **методу посередників**, з'ясування рисункових аспектів у позиційних задачах загальногеометричного характеру стосовно точок, прямих і площин, варто розпочинати тісне знайомство з його похідними реалізаціями, робочими моделями, ретельне опрацювання яких виведе на стрункі, достовірно значимі правила-орієнтири дій в побудові простих, а також як завгодно складних стереометричних перерізів.

Сьогодні досить важко безпомилково назвати дату та прізвище особи, з чиєї «легкої руки» в часи формування методологічної системи поглядів у позиційній конструктивній стереометрії започатковано в обіг назви двох нібито різних прийомів побудови перерізів тіл площиною загального розташування, як-от: «Метод внутрішнього проєкціювання» та «Метод слідів». Очевидно, що така не зовсім логічно виважена ідіома диференціації методів була зумисне озвучена з єдиною метою, щоб в якості особливого елемента конструкції категорично вирізнити із загальногеометричної схеми закономірних побудовних дій слід січної площини на площині основи тіла, котрий деінде допомагає – пришвидшує та оптимізує процес вирішення важливої позиційної задачі. Прикро, але не всі поважні інтерпретатори й оповідачі можливих рисункових варіацій на цю тему змістовно строго сприйняли привнесений фразеологізм.

Не секрет, що в переважній більшості навчальних посібників і, навіть, підручників, адресованих учителям чи учням, де висвітлюються питання наочно-образного (рисункового) подання позиційних задач, немає належної уваги до їх геометричного тлумачення. Оцінюючи наявну педагогічну ситуацію словами вітчизняних геометрів-методистів В. Є. Михайленка та І. Ф. Тесленка, висловлених на адресу дещо інших конструктивних реалій (див. ч. I, р. III, §2), й тут ще раз із прикрістю доводиться констатувати: «В них часто переважає рецептура того «як робити?», а питання «чому?» залишається відкритим» ([8], с. 18).

Наприклад, у тому ж таки підручнику для ЗЗСО ([10], п. п. 41, 48) розглянуто лише метод слідів, й той у примітивному трактуванні, далекому від наукового. Чомусь без ґрунтовних пояснень, за принципом «роби як я» чи «як показано на малюнку»(?), коротко описується варіант відшукування перетинів із січною площиною граней багатогранника, й тільки. Ми певні, таке подання достатньо серйозної теми **не навчає!**

У класичній, загалом змістовній, якісній книзі «Методика викладання стереометрії», виданій колективом відомих освітян за редакцією О. М. Астряба і О.

С. Дубинчук, говориться таке: «Існує **два** способи розв'язання задачі на перерізи на проєкційному рисунку: 1) спосіб *відповідності*, 2) спосіб *слідів*». Щоб учень (учитель) міг глибше осягнути перший із способів, відразу ж додаються у книзі присутні пояснення: «Спосіб відповідності ґрунтується на взаємно однозначній відповідності точок шуканого перерізу і точок нижньої основи багатогранника» ([7], с. 208). Потім окремо виписано зауваження: «Цей метод краще називати методом внутрішнього проєкціювання, але в умовах шкільної роботи його краще називати методом відповідності, бо цей термін зрозуміліший учням» ([7], с. 209). У фахівця-геометра мимоволі з'являються небезпідставні сумніви стосовно еквівалентності назв методу, окрім того, варто посперечатися із приводу кращого чи гіршого розуміння кожного з названих термінів учнями.

Не оригінальні в зазначеному сенсі й навчальні посібники, видані на допомогу вчителю значно пізніше – в 90-ті рр. минулого століття. Той самий підхід, ті ж принципи, хоч і корисних прикладів для справи здобуття графічних навичок у побудові перерізів тіл площиною (навіть, циліндра і конуса) значно більше.

Ми глибоко переконані, що мовчазно-компромісний стан речей із дивними, як на наш погляд, недомовками в навчанні конструктивній стереометрії помилковий, а традиційні установки на подання учням підвалин позиційних перетворень на проєкційному кресленні недосконалі, місцями алогічні, й тому з позицій дидактики і психофізіології – неправильні.

Тож найперше не зашкодить нагадати, що походження терміну «внутрішнє проєкціювання за напрямом бічних ребер» та його природа чітко з'ясовані на початку розділу I (див. §1, п.1.1). Вчителю математики це конче потрібно знати, одного разу «побачити» в уявленнях й назавжди закарбувати в пам'яті логічно неспростовну лінію однойменного методу, оскільки справжні знання першопредмету приходять через серйозне осмислення і повне розуміння його підвалин, зокрема (і найперше), в позиційній стереометрії.

Таким чином, уявляючи процес формування якісного позиційно визначеного зображення стереометричного тіла в динаміці чітких просторових перетворень, учень пізнає природну сутність **методу внутрішнього проєкціювання** за напрямом бічних ребер. Тепер уже немає сумнівів, що метод внутрішнього проєкціювання в геометрії не є надуманим, тому його варто сприймати як органічно невід'ємну складову переважної більшості побудовних операцій. Зрозуміло, що конус (піраміда), циліндр (призма) і куля, зображені на дошці (в зошиті) звичним прийомом із дотриманням указаних вимог, повні й на них можна методом внутрішнього проєкціювання побудовно строго розв'язати будь-яку задачу на інциденції, зокрема – на перерізи стереометричних тіл площиною, що, як уже з наголосом зазначалося, досить часто трапляється в обчислювальних задачах ЗЗСО.

Натомість зараз підходимо до охарактеризування складових розглядуваного питання дещо з іншого боку, з інших теоретичних засад, вичерпно і чітко опрацьованих знаними геометрами. Із цим **нагадаємо** та в доречній, змістовній варіації якомога стисло і мітко подамо переказ основ ключового дійства в геометрії – **центрального** (паралельного) проєкціювання.

Нехай задано у площині Σ_1 (рис. 1.42, а) деяку плоску фігуру Φ_1 , наприклад трикутник $A_1B_1C_1$, і нехай його потрібно проєкціювати з точки S (центра проєкцій) на площину Σ (площину зображень). Це роблять наступним чином (див. також [6]). Вершини трикутника A_1, B_1, C_1 сполучають проєкціювальними променями SA_1, SB_1, SC_1 із центром S та знаходять їх точки перетину A, B, C із площиною зображень Σ . У випадку, коли проєкціювальний промінь паралельний площині Σ , вважатимемо, що він перетинає останню в нескінченно віддаленій точці. Трикутник ABC , як результат такої операції, називають **центральною проєкцією** або **перспективою** вже заданого трикутника в його оригінальному поданні $A_1B_1C_1$.

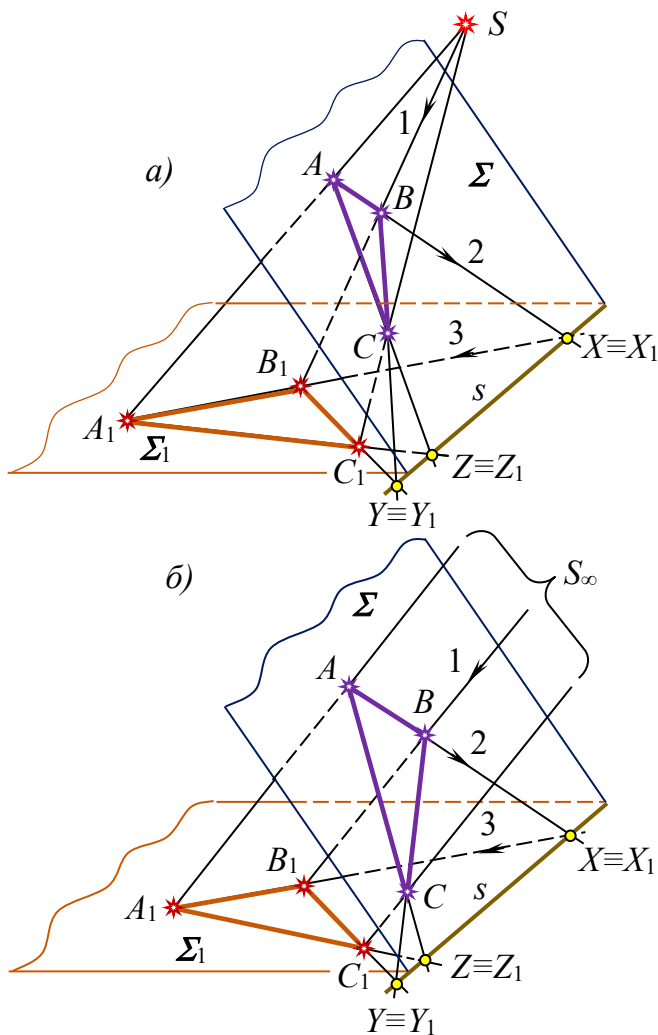


Рис. 1.42

Якраз так, власне, кожній точці площини Σ_1 можна поставити у відповідність цілком певну точку площини Σ і навпаки. Тому говорять, що таке центральне проєкціювання індукує **взаємно однозначну відповідність** між двома плоскими точковими полями Σ_1 і Σ : При цьому кожному задану фігуру площини Σ_1 рекомендується розглядати як деяке місце точок, якому відповідає перспективна фігура – місце точок на площині Σ . Істотною властивістю відповідності є те, що: *всякій прямій одного плоского поля відповідає єдина пряма іншого поля*. Справді, якщо взяти у площині Σ_1 , скажімо, будь-яку пряму A_1B_1 , то промені проєкціювання SA_1 і SB_1 утворюють проєкціювальну площину SA_1B_1 , яка перетинає площину зображень Σ вздовж відповідної A_1B_1 прямої AB . Наголосимо, що пряма перетину площин Σ_1 і Σ є особливою саме в такій перспективній відповідності:

кожна точка прямої s , що розглядається як оригінал, збігається зі своєю проєкцією, а отже вся пряма сама собі відповідає. Ця пряма називається **віссю** перспективної відповідності двох площин.

Коли ж точку S в уявленнях віднести в нескінченність, то проєкціювальні промені SA_1, SB_1, SC_1 (рис. 1.42, б) будуть паралельні деякому напрямку a , непаралельному жодній із площин Σ_1 і Σ . Тут між площинами Σ_1 і Σ встановлюється взаємно однозначна відповідність особливого виду, яку називають **перспективно-афінною** (або **спорідненою**). Як і в загальному випадку, в спорідненій відповідності *будь-якій прямій площини Σ_1 буде*

відповідати єдина пряма площини Σ , й ця відповідність має своєю віссю лінію перетину s площин Σ_1 і Σ , а всі точки прямої s подвійні. Крім цього, перспективно-афінна відповідність має дві особливі властивості: зберігається паралельність прямих і відношення відрізків на прямій. Дуже важливо, що виділені три базові властивості паралельного проєкціювання є також змістовною складовою теми стереометрії ЗЗСО «Зображення просторових фігур на площині», там вони строго доведені (див. [10], п.13, с.10). Ситуаційна ж відмінність підходів до висвітлення цих властивостей полягає лише в тому, що у шкільному варіанті точки і прямі, як оригінальні об'єкти проєкціювання, вибираються будь-де у просторі, а не в заздалегідь визначеній площині Σ_1 , проте це суті справи не змінює.

А тепер, задля вичерпного з'ясування геометричного змісту кожного з методів, посилаючись до уявлень та візуального супроводу міркувань якісними проєкційними кресленнями, будемо оперувати лише достовірними фактами та усталеними категоріями логіки.

До діла підкреслимо, що строго обґрунтовуючи об'єктивно природне походження терміну «внутрішнє проєкціювання» (р. I, §1, п.1.1) ми жодним словом не обмовилися щодо взаємно однозначної відповідності двох якихось площин. Й не дивно, адже *характеристичними пріоритетами цього уявно-динамічного дійства* в геометрії є вражаюче інші поняття та закономірності, а саме: **1).** *Усяке ребро піраміди чи призми (твірна конуса чи циліндра) належить проєкціювальному променю, який вироджується на площину основи тіла в точку.* **2).** *Бічна поверхня піраміди чи призми (конуса чи циліндра) теж є проєкціювальною й вироджується на площину основи у багатокутник (коло) основи.* Частково, кожна окремо взята бічна грань багатогранника вироджується у відрізок, який є відповідною стороною багатокутника основи. Таким чином, тут ми безапеляційно маємо справу виключно із проєкціювальними прямими, площинами і поверхнями, вироджені проєкції яких, як результат внутрішнього проєкціювання, володіють уже відомою нам **збиральною властивістю**, а саме: *будь-яка точка проєкціювальної прямої, а також, будь-яка точка, пряма чи інша фігура бічної поверхні тіла, зокрема проєкціювальної площини (грані багатогранника) має свою основу – проєкцію за напрямом бічних ребер, розташовану, відповідно, на виродженій (слід-) проєкції прямої або ж поверхні (площини).* Саме ця, напрочуд елементарна в уявленнях прописна істина, вкупі з поняттям «належності» точок, прямих і площин, складають достатню умову успішної графічної реалізації **методу внутрішнього проєкціювання** на всякому позиційно визначеному проєкційному кресленні. *Якраз у цьому, й винятково в цьому рисунково строго проявляється геометрична сутність методу.*

Задача 7. *Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Побудувати його переріз площиною Σ , яка проходить через точки X , Y і Z , задані відповідно на лівій, передній і нижній гранях паралелепіпеда.*

Аналізуючи умову задачі, спостерігаючи візуально за рисунком 1.43, робимо висновок, що ключем до її розв'язання може бути встановлення на

зображенні точки перетину з січною площиною Σ прямої BB_1 , яка вміщує однойменне ребро заданого багатогранника. Справді, точки $X(X_1)$ і $Y(Y_1)$, які є вершинами визначального для площини Σ трикутника XYZ , належать відповідно двом суміжним граням AA_1B_1B і BB_1C_1C , для яких BB_1 є спільним ребром. Отже, якщо уявити собі, що в перетині BB_1 і Σ буде знайдена їх спільна точка M , то провівши прямі MX і MY відповідно у вказаних гранях, відразу ж одержимо чотири вершини K, L, P і Q багатокутника перерізу. Далі, як відомо, протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, тому напевне матимуть місце наступні розташування решти сторін багатокутника перерізу: $KT \parallel PQ, QR \parallel LP$ і $LP \parallel TR$.

Нам залишається лише з'ясувати, з яких конкретно логічно виважених операцій складається правило-орієнтир побудови точки M ?

Оскільки пряма BB_1 проєкціювальна, то її слід-проєкція має збиральну властивість і основою точки M буде точка B_1 ($B_1 \equiv M_1$). Тож проведемо через шукану точку M у площині Σ деяку (загалом, яку завгодно) пряму MZ , розпочавши моделювання з основи паралелепіпеда: M_1Z_1 – основа MZ . Тепер посилаємося до поняття «належності» найпростіших геометричних фігур. Коли пряма належить площині? Звісно, коли дві точки прямої належать цій площині. Точку $Z \equiv Z_1$ завідомо обрано точкою площини перерізу; іншу із двох шуканих точок $1(1_1)$, за допомогою проєкціювального променя ($1_1 \rightarrow 1$), фіксуємо на прямій $XY(X_1Y_1)$, яка теж належить площині Σ . Нарешті, в перетині прямих BB_1 і $Z1$ знаходимо точку M .

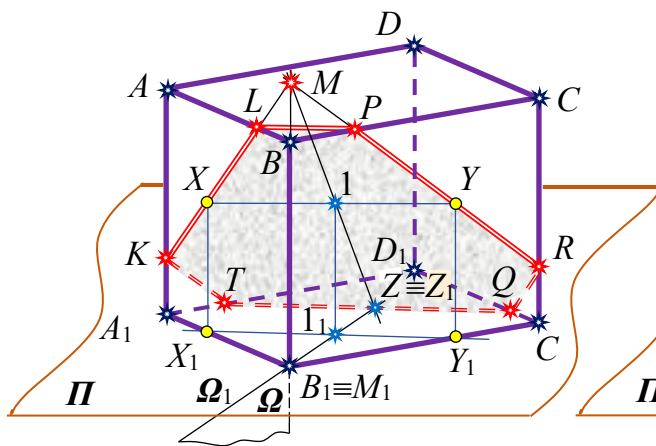


Рис. 1.43

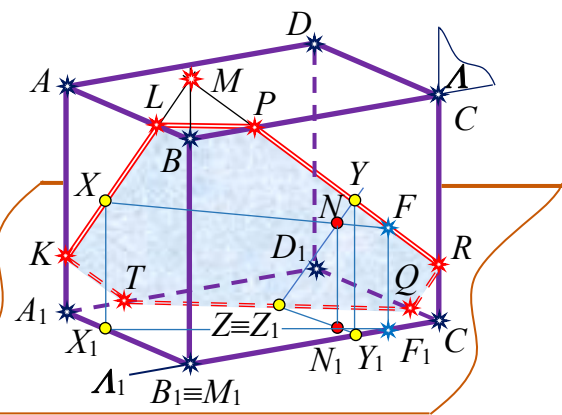


Рис. 1.44

Зауважимо, наведена логіка міркувань адекватна схемі розв'язування ОПЗ-1 за алгоритмом дій у три кроки (див. п. 1.2). Тут $\Omega(BB_1 \cap B_1Z_1)$ виконує роль площини-посередника, а $Z1$ – пряма перетину Ω із даною січною площиною.

Так само успішно можна було б розпочати побудову з відшукування лінії перетину січної площини Σ і, скажімо, грані BB_1C_1C , яка вже має з Σ одну спільну точку $Y(Y_1)$ за умовою (рис. 1.44). Тут площина грані $\Lambda(BB_1C_1C)$ – проєкціювальна, а збиральною властивістю володіє її вироджена проєкція $A_1 \equiv B_1C_1$. Тому, для побудови ще однієї спільної точки F площин Σ і Λ , зручно у площині Σ рисунково вдало обрати деяку пряму, наприклад $XN(X_1N_1)$, де $N(N_1) \in YZ(Y_1Z_1)$, і побудувати перетин останньої із проєкціювальною площиною Λ : $F(F_1) = XN(X_1N_1) \cap \Lambda(\Lambda_1)$. Пряма $YF(Y_1F_1)$ є висікає на прямій BB_1 знайому

нам точку $M(M_1)$. Завершувати побудову багатокутника перерізу $KLPQRT$ слушно за описаним вище сценарієм. Задачу розв'язано.

Тепер далі, щоб мислено досягнути ступінь ідентичності методів слідів та внутрішнього проєкціювання, вирізнити їх споріднені та розрізняльні риси і остаточно визначитися з термінологією, зумисне повернемося до рисунка 1.42. На ньому наочно проілюстровано січну площину Σ і площину основи багатогранника Σ_1 . Між цими площинами встановлено, як відомо, взаємно однозначну відповідність, яку у випадку **центрального** внутрішнього проєкціювання краще всього задавати центром S , парою відповідних точок A і A_1 та віссю s , а у випадку **паралельного** внутрішнього проєкціювання – парою відповідних точок A і A_1 та віссю s . Що ж започаткувало, спонукало з'яву такої взаємно однозначної відповідності двох площин? Звичайно ж, дія внутрішнього проєкціювання! В побудові інших пар відповідних елементів цієї справді чудової відповідності (напр., B і B_1 чи C і C_1), слід скористатися двома її характеристичними властивостями: 1) *всяка пара відповідних точок належить променю внутрішнього проєкціювання*; 2) *будь-яка пара відповідних прямих перетинається на осі відповідності s* (дивись покрокову побудову, навчч відображену на рисунку стрілками).

Отже, слід s площини Σ на площині Σ_1 є лише окремим допоміжним робочим інструментом конструктивних пошуків перерізу, й тому, швидше за все, саме **метод слідів** варто перейменувати в **метод відповідності**, що звучить переконливо й більш значимо, *але в жодному разі – не метод внутрішнього проєкціювання*, оскільки *останній охоплює, включає в себе метод слідів (відповідності), тобто точкова взаємно однозначна відповідність площини перерізу і площини основи тіла об'єктивно індукована природою, операцією внутрішнього проєкціювання за напрямом бічних ребер багатогранника*.

Задача 8. Побудувати переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, заданою точкою $P(P_1)$ на грані SAD та слідом XY на площині основи $ABCD$.

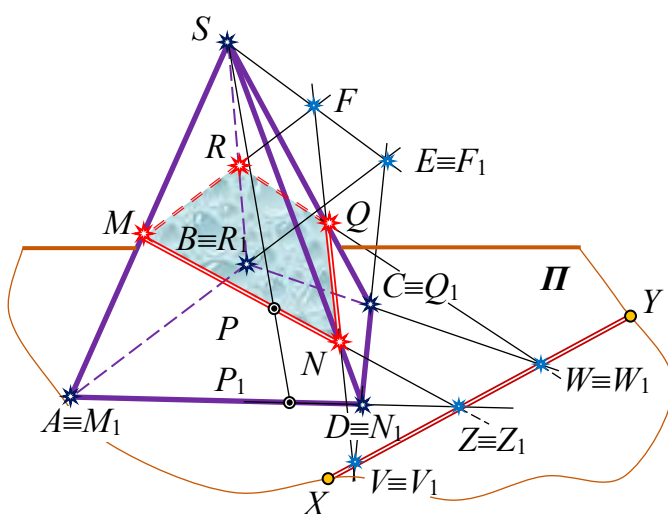


Рис. 1.45

Згідно з умовою задачі, точка $P(P_1)$ січної площини належить передній грані SAD даної піраміди (рис. 1.45), тому варто відразу й водночас знайти дві вершини $M(M_1)$ і $N(N_1)$ фігури перерізу чи, що теж саме, її сторону $MN(M_1N_1)$. Грань SAD проєкційовальна на площину основи піраміди за напрямом бічних ребер, як і ребра SA і SD , а їх вироджені проєкції вміщують основи відповідних елементів багатокутника перерізу: $M_1N_1 \equiv AD$ і $M_1 \equiv A$, $N_1 \equiv D$. Взаємно

однозначна відповідність площини перерізу і площини основи тіла задана вершиною піраміди S , парою відповідних точок P і P_1 та подвійною прямою –

віссю відповідності $XY \equiv X_1Y_1$. Шукані точки M і N та вже зображені на картинній площині відповідні їм точки M_1 і N_1 розташовуються на променях внутрішнього проєкціювання – ребрах SA та SD (**1-ша властивість**), а прямі MN і M_1N_1 , які також відповідні в цьому центральному проєкціюванні, перетинаються на осі $XY \equiv X_1Y_1$ (**2-га властивість**). Тому провівши почергово пряму M_1N_1 до перетину зі слідом – віссю відповідності – в точці $Z \equiv Z_1$, та пряму PZ до перетину з ребрами SA і SD , ми й одержимо бажаний результат. Аналогічні міркування та їх рисункові втілення, виконані за участю бічних граней SDC і SCB , призведуть до остаточної побудови багатокутника перерізу $MNQR$.

Цікаво і, певною мірою, навіть важливо, що зміст завершальних побудов дещо видозмінює промінь внутрішнього проєкціювання $SE = (SAB) \cap (SCD)$ (див. рис. 1.45).

Чи можна було обґрунтувати цю ж саму побудову, спираючись винятково на природу внутрішнього проєкціювання та властивості належності точок, прямих і площин? Так, звичайно. Ми шукаємо точки M і N перетину ребер SA і SD із січною площиною $\Sigma(P(P_1), XY)$. Але ж основи цих точок M_1 і N_1 уже задані на проєкційному кресленні, а трійка точок M_1, P_1, N_1 розташовується на одній прямій – точки колінеарні. Тому досить провести у площині Σ через точку $P(P_1)$ пряму $MN(M_1N_1)$, розпочавши, як звичайно, з накреслення основи прямої $M_1 - P_1 - N_1$. Оскільки слід площини Σ є гарантовано подвійною прямою ($XY \equiv X_1Y_1$), а $Z(Z_1) = M_1N_1 \cap X_1Y_1$, то пряма ZP зливається із прямою MN , що й дозволяє чітко зафіксувати на відповідних ребрах піраміди точки M і N .

Як бачимо, *окремо взятий метод слідів*, у логічно незаперечних умовиводах і апробаціях, *не має права на існування поза його природним вмотивуванням уявно-динамічними категоріями методу внутрішнього проєкціювання*.

2.1. Побудовна оптимізація методу внутрішнього проєкціювання

З поняттям «внутрішнє проєкціювання за напрямом бічних ребер» учні знайомі вже досить близько, а досвідчені вчителі математики достеменно знають, що базовою в методі, який ми обґрунтовано пропагуємо як єдино можливий, основоположний прийом конструктивних випробовувань на повних проєкційних кресленнях, виявилася та ж сама ОПЗ-1 – на точку перетину прямої із площиною. Однак у цьому випадку пряма може займати у просторі не будь-яке, а виключно частинне розташування, а саме, – бути з поважних причин, які деталізовано розкрито вище, проєкціювальною на кмітливо обрану площину основи стереометричного тіла.

Отже, метод в його класичному поданні обов'язково передбачає наявність скінченного числа прямих k , що належать пучку променів (чи то шпичь) внутрішнього проєкціювання, визначеному на площині зображень або вершиною піраміди (конуса), або напрямом бічних ребер (твірних) призми (циліндра), та січної площини. Реалізовується метод шляхом багатократного розв'язування ОПЗ-1, де роль прямих k у більшості випадків виконують бічні ребра чи твірні заданого стереометричного тіла.

Таким чином, нехай *площина загального розташування Λ зображена на*

проекційному кресленні трьома точками $A(A_1)$, $B(B_1)$ і $C(C_1)$. Проекціювальна пряма k , як відомо, цілком визначається своєю виродженою проекцією k_1 . Потрібно побудувати точку $K(K_1)$ перетину прямої $k(k_1)$ із площиною $\Lambda(ABC(A_1B_1C_1))$ (рис. 1.46).

Шлях до розв'язання цієї простої задачі, вже неодноразово описаної нами раніше (див., напр., задачу б), має варіації в поясненнях. Зокрема, оскільки основа K_1 шуканої точки K відома (накреслена) – вона, завдяки збиральній властивості слід-проекції k_1 заданої проекціювальної прямої, збігається зі слід-проекцією прямої ($K_1 \equiv k_1$), то зваживши, що три задані (A , B і C) та одна шукана (K) точки належать одній і тій самій площині $\Lambda(ABC)$, зведемо задачу до відшукування точки M перетину, скажімо, прямих BC і AK . Основа M_1 узятої точки легко будується: $M_1 = B_1C_1 \cap A_1K_1$. За цим дійством, провівши проекціювальний промінь (шпицю) $M_1M \parallel A_1A$ (рис. 1.46, а) чи SM_1 (рис. 1.46, б), знаходимо точку M : $M = BC \cap M_1M$ ($M = BC \cap SM_1$). Нарешті, точку K фіксуємо у перетині прямої k із прямою AM : $K = k \cap AM$.

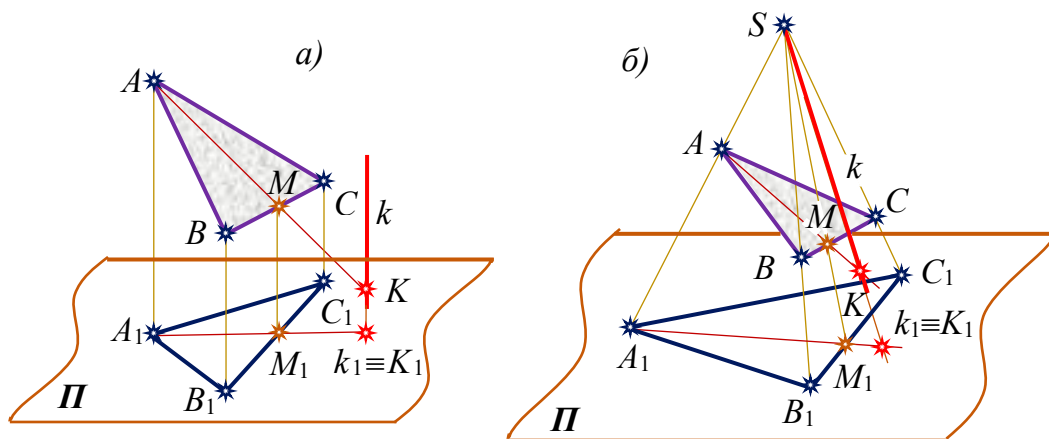


Рис. 1.46

Та все ж таки, в живому, практичному застосуванні до конкретного стереометричного тіла вже в цьому параграфі ми користувалися дещо по іншому сформульованим (помітно простішим у розумінні учнями) правилом-орієнтиром достовірної, строго обґрунтованої побудови точки K : **1**) через шукану точку $K(K_1)$ у заданій січній площині проводимо будь-яку, але розсудливо, вдало обрану щоразу, раціонально розташовану на проекційному кресленні пряму лінію (наприклад AM); **2**) як результат, знаходимо точку перетину задіяної прямої з визначеним в умові ребром k : $K = k \cap AM$. Здавалося б, як можна провести яку завгодно пряму через ще не побудовану (і тому не накреслену) точку K у площині Λ ? Виявляється, що можна, оскільки зображення і площини, і проекціювальної прямої на картинній площині позиційно визначені: площина Λ визначається трійкою неколінеарних точок $A(A_1)$, $B(B_1)$ і $C(C_1)$, а ребро k – своєю виродженою проекцією k_1 , яка містить основу K_1 шуканої точки K . Тому A_1K_1 – основу прямої, про яку йдеться в першому пункті, провести нескладно, а AK будується за умови, що пряма належить площині тоді, коли дві її точки належать цій площині.

Так елементарно, не апелюючи явно до методу посередників, трактується й подається ОПЗ-1 в частинному задаванні прямої k і, на цій основі, – **геометрична**

суть методу внутрішнього проєкціювання в цілому.

Проте, як з'ясувалося, в реальній практичній ситуації лише одного вміння будувати точку перетину бічного ребра (твірної) стереометричного тіла із площиною перерізу недостатньо для *конструктивно мало затратного, ефективного* виконання графічних операцій в комплексі, тому ми спробуємо суттєво *скоригувати і систематизувати процес роботи над кресленням*, прискорити, оптимізувати його у випадку, коли дійсно для досягнення кінцевого результату потрібно чималенько раз розв'язувати розглядувану зараз базову задачу.

З тим, щоб краще змодельовати задумку і оформити її у вигляді простого за змістом правила-орієнтиру дій, свідомо вдамося до **узагальнюючого** методу посередників, яким він, звісно, є не тільки для методу внутрішнього проєкціювання, а й для методу слідів. Адже, наразі, два останні методи ми не просто так подаємо як частинні випадки методу посередників.

Усі площини-посередники вибірково названих в аналізі проєкціювальних бічних ребер, які братимуть активну участь у планових побудовах вершин багатокутника перерізу, обов'язково будемо задавати в кожному окремому випадку однією і тією ж самою точкою площини перерізу і, почергово, відповідним фіксованим бічним ребром багатогранника. Таким чином, на другому етапі реалізації алгоритму дій «у три кроки», в побудові прямої перетину двох площин, одна спільна точка даної січної площини і площини-посередника, що вводиться, відразу дотепно вибирається виконавцем. Іншу (другу) – потрібно знайти. Тепер уже, цю останню шукатимемо в перетині деякої раціонально обраної прямої із площини перерізу з кожною із площин-посередників. Тут щоразу будимо розв'язувати задачу на перетин прямої загального розташування із площиною, яка завідомо є проєкціювальною, тобто графічне вирішення останньої очевидне в розумінні, а також просте на моделі – в її рисунковій реалізації.

Отже, **суть реконструйованого методу внутрішнього проєкціювання в нашому наочно-образному вираженні** полягає в тому, що відшукування вершин багатокутника перерізу зводиться до розв'язання певного числа раз задачі на побудову точки перетину однієї і тієї ж (як правило) прямої заданої площини перерізу з кожною із площин-посередників, які послідовно перебирають усі визначені («активні») бічні ребра, обертаючись навколо проєкціювальної прямої (шпиці), яка містить фіксовану точку заданої площини.

Підсумовуючи висловлене, констатуємо: сформований і відпрацьований комплексний, системний підхід у вирішенні важливої технологічної проблеми оптимізації в побудові багатокутника перерізу стереометричного тіла площиною стає можливим у реалізації завдяки наступним двом чітко змодельованим і зримо контрольованим чинникам: **1) перетином січної площини з визначеною сукупністю (пучком) площин-посередників є пучок прямих, які виходять з одного центра – точки площини перерізу, визначеної виконавцем; 2) сукупність «других» точок ліній перетину заданої площини і площин-посередників належить одній і тій самій прямій січної площини, яка, знову ж таки, вибирається виконавцем.**

Це у значній мірі звільняє метод внутрішнього проєкціювання від одного з найбільш помітних його недоліків, а саме – кардинально зменшує на рисунку-моделі число ліній побудови, а отже оптимізує метод.

Переконалися в істинності такого висновку, додати певності у використанні методу внутрішнього проєкціювання до задач на перерізи, глибше усвідомити зміст запропонованої оптимізаційної схеми конструктивних дій потрібно лише шляхом вирішення реальних стереометричних пропозицій.

Задача 9. Побудувати багатокутник перерізу заданої шестикутної призми $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ площиною $\Sigma(KLM)$, якщо точка K належить ребру AA_1 , точка L – грані $CC_1 D_1 D$, а точка M – ребру EF .

Уважно аналізуючи умову задачі, спостерігаючи за рисунком 1.47 до неї, здійснюючи при цьому в уявленнях у певному обраному напрямі (скажімо, за годинниковою стрілкою) обхід бічної поверхні стереометричного тіла, розпочинаючи від ребра AA_1 , на якому розташована одна з вершин (K) фігури перерізу, помічаємо, що для досягнення кінцевої мети досить знайти точки перетину з січною площиною (Σ) лише трьох бічних ребер FF_1 , DD_1 і BB_1 . Потім решту вершин шуканого багатокутника в перетині Σ із двома іншими («пасивними») бічними ребрами (EE_1 і CC_1), що залишилися, одержимо в результаті послідовного проведення його сторін, які вже будуть визначені у гранях $FF_1 E_1 E$ і $DD_1 C_1 C$ відповідно двома своїми точками (враховуючи ті, що вже задані умовою).

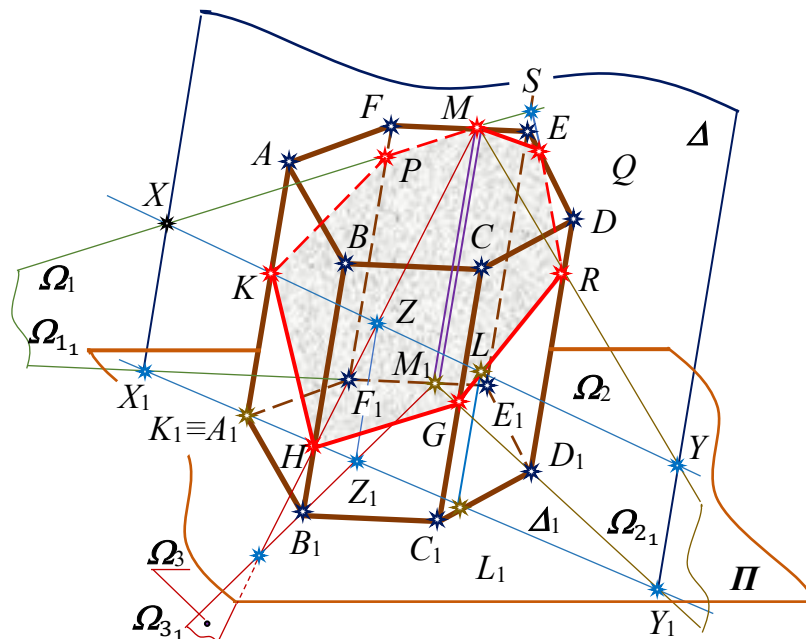


Рис. 1.47

Точку P на ребрі FF_1 , як одну з вершин багатокутника перерізу, краще всього шукати в перетині січної площини $\Sigma(KLM)$ із площиною-посередником Ω_1 грані багатогранника $FF_1 E_1 E$, оскільки на спільній прямій цих двох площин буде знайдено по ходу справи ще одну вершину S , яка лежить на ребрі EE_1 . Річ у тому, що за умовою точка $M(M_1)$ уже належить цим двом площинам. Іншу, ще одну їх спільну точку $X(X_1)$, шукаємо за відомим алгоритмом як точку перетину прямої $KL(K_1 L_1)$ площини Σ із проєкціовальною площиною $\Omega_1(\Omega_{1_1})$. Очевидно, що при

цьому $P = MX \cap FF_1$, $S = MX \cap EE_1$.

Того ж самого результату можна досягти, спираючись на інше словесне оформлення базової задачі методу посередників (ОПЗ-1). Так, щоб побудувати точку $P(P_1 \equiv F_1)$ перетину проєкціювального ребра FF_1 із площиною загального розташування $\Sigma(KLM)$, потрібно: **1)** провести через шукану точку P у площині Σ пряму $MX(M_1X_1)$ (тут точка $M(M_1)$ – одна з визначальних точок площини Σ , а $(X(X_1) = KL(K_1L_1) \cap MP(M_1F_1))$); **2)** знайти точку P перетину прямої MX і ребра FF_1 , яка буде вершиною багатокутника перерізу. Променями внутрішнього проєкціювання, задіяними в цій операції, є $FF_1 \equiv PP_1$, MM_1 і XX_1 . Побудову точки $S(S_1 \equiv E_1)$ обґрунтовуємо аналогічно. Таким же прийомом моделюємо решту вершин шуканого багатокутника: $R(R_1 \equiv D_1)$ на ребрі DD_1 і $H(H_1 \equiv B_1)$ на ребрі BB_1 .

Зараз, порівнюючи, з наголосом привертаємо увагу до сконструйованого нами оптимізаційного правила-орієнтира дій, який забезпечить **обґрунтованість, упорядкованість і системність** графічних операцій в розв'язанні задачі в цілому (дивись «незабруднений» рисунок 1. 47, на якому дивовижно мало ліній побудови). Практичні апробування засвідчують, що в такий спосіб, у процесі комплексної алгоритмізованої роботи над моделлю, фактично відсутні хаотичні, випадкові дії виконавця, а все, що зображується за допомогою олівця і лінійки, строго програмовано і передбачено зараня в чітко визначеній послідовності кроків. Пояснення таким принциповим пріоритетам у результативній діяльності учня слід давати перефразувавши щойно описаний алгоритм на мову пучка площин-посередників. При цьому, узагальнюючи, матимемо таку структуру перетворень: **1)** через бічні ребра FF_1 і EE_1 проведемо проєкціювальну площину-посередник $\Omega_1(FF_1M_1M)$, через ребро DD_1 – $\Omega_2(DD_1M_1M)$, а через ребро BB_1 – $\Omega_3(BB_1M_1M)$; **2)** за допомогою ще однієї проєкціювальної площини $\Delta(KK_1L_1L)$, яка містить пряму $KL(K_1L_1)$ із площини $\Sigma(KLM)$, шукаємо точки зустрічі $X(X_1)$, $Y(Y_1)$ і $Z(Z_1)$ обраної прямої із площинами Ω_1 , Ω_2 і Ω_3 відповідно та проводимо прямі MX , MY і MZ перетину площини Σ з кожною із площин-посередників; **3)** фіксуємо точки перетину побудованих прямих із відповідними бічними ребрами даної призми: $(P, S) = MX \cap (FF_1, EE_1)$, $R = MY \cap DD_1$ і $H = MZ \cap BB_1$. Багатокутник $KPMQRGH$ – шуканий.

Зримо констатуємо, що площина $\Delta(\Delta_1)$ висікає в перетині з уявно рухомим у просторі пучком площин-посередників $\Omega_1(\Omega_{1_1})$, $\Omega_2(\Omega_{2_1})$, ... відповідно пучок (паралельних) променів внутрішнього проєкціювання, оскільки всі ці площини проєкціювальні на площину основи стереометричного тіла.

Особливо наголошуємо, що нібито різні в поясненнях побудовні схеми, компактно подані вище з метою практичної реалізації методу внутрішнього проєкціювання, індукують одну й ту саму графічну конструкцію. Це категорично підтверджує думку, що розглядуваний метод є лише спрощеною, зручною у словесному оформленні та реальному користуванні інтерпретацією методу посередників, як, до речі, і його частинний випадок – метод слідів. У свою чергу, ці ж самі об'єктивні міркування переконливо свідчать, що без введення поняття

дії «внутрішнє проєкціювання» всередині стереометричного тіла і без його зримого уявлення та належного, свідомого геометричного тлумачення метод посередників на позиційно визначених кресленнях просто немислимий.

Задача 10. Правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ зрізати площиною $\Sigma(KLM)$, якщо точки K і L лежать на суміжних бічних ребрах SD і SC , а точка M – поза пірамідою.

Аналізуючи ситуацію (рис. 1.48) неважко здогадатися, що для побудови багатокутника перерізу потрібно знайти точки перетину із площиною Σ двох інших бічних ребер піраміди SA і SB . Зображення точки $X(X_1 \equiv A)$ на ребрі SA одержимо, скористаємося променем внутрішнього проєкціювання $SN(SN_1)$, де $N(N_1) = ML(M_1L_1) \cap (SAC)$, і прямою $KN(K_1N_1)$, яка у площині Σ проходить через поки що відсутню точку $X(X_1)$. А для відшукування точки $Y(Y_1 \equiv B)$ на ребрі SB – променем внутрішнього проєкціювання $SR(SR_1)$, де $R(R_1) = ML(M_1L_1) \cap (SDB)$ і прямою $KR(K_1R_1)$ ($Y(Y_1) \in KR(K_1R_1)$). Решта графічних операцій добре зрозумілі з рисунка, на якому п'ятикутник $XKLPQ$ – шуканий.

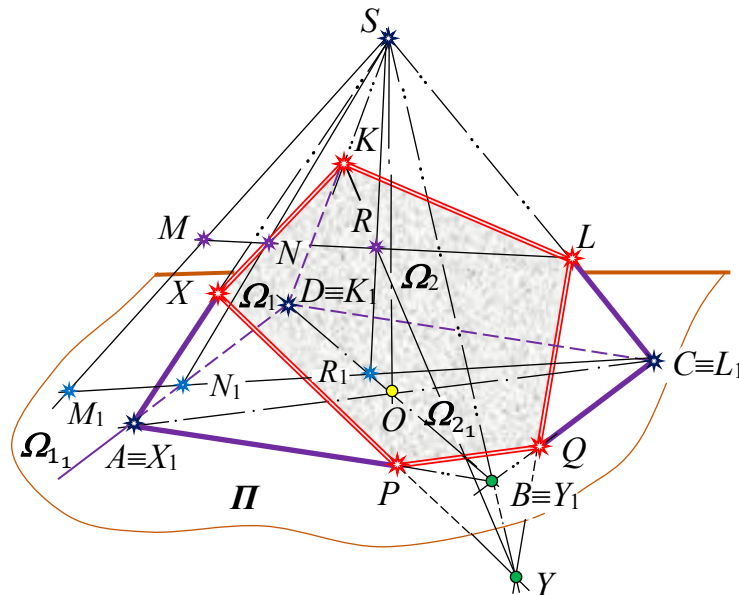


Рис. 1.48

Наведений алгоритм дій, як уже відомо, має на увазі удавану наявність скінченного числа площин-посередників $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ із спільною віссю, роль якої на рисунку 1.48 виконує ребро SD , що містить точку $K(K_1)$ заданої площини перерізу Σ . Роль фіксованої прямої площини Σ , яка в перетині з кожною площиною-посередником висікає іншу (другу) точку, спільну для двох площин Σ і Ω_i ($i=1, 2, \dots, n$), виконує пряма $ML(M_1L_1)$. У нашому простому випадку, що також добре видно на кресленні, пучок площин-посередників із віссю SD нараховує всього лише дві площини $\Omega_1(\Omega_{1_1})$ і $\Omega_2(\Omega_{2_1})$.

Завершуючи розглядуване питання, ще в одній задачі, яку за умовою і висновком варто віднести до класу порівняно складніших задач на обчислення, фігуру перерізу багатогранника площиною буде зручно будувати методом у чомусь відмінним від «чистого» методу внутрішнього проєкціювання (за напрямом бічних ребер). Однак, із метою оптимізації алгоритму пошуку

розв'язку, апаратом і дією **внутрішнього проєкціювання** ми все ж таки скористаємося і на етапі побудови, і на етапі обчислення. В такій ситуації понад усе важливо вдало ввести в розгляд (обрати) площину проєкцій, напрям або ж центр внутрішнього проєкціювання та педагогічно виважено залучити до справи позиційні і метричні результати дії проєкціювання.

Задача 11. Піраміда $SABC$ об'ємом 5 дм^3 перетнута площиною Σ , що задана трійкою точок K, M і P . Знайти площу фігури перерізу, якщо точка K належить ребру AS і $AK = 0,5AS$, точка M – ребру AC і $AM = 0,4AC$, точка P – ребру BC і $BP = 0,5BC$, а відстань від точки A до площини $\Sigma(KMP)$ рівна 1 дм .

Напевне, що виконати побудову чотирикутника $KMPL$ (рис. 1.49, а) в якості перерізу піраміди заданою площиною можна досить швидко і гарантовано точно, якщо скористатися деякою раціонально вибраною у площині Σ прямою $MN(M_1N_1)$ ($N(N_1) \in KP(K_1P_1)$) та внутрішнім *центрально* проєкціюванням із точки A на грань SBC (променем $AN(AN_1)$). У цьому варіанті дій все зводиться до вміння будувати на площині основи слід $H \equiv H_1$ прямої $MN(M_1N_1)$. За умовою точка $P \equiv P_1$ уже належить площині основи, тому слід площини перерізу $HP(H_1P_1)$ перетне ребро SB у шуканій точці $L(L_1)$.

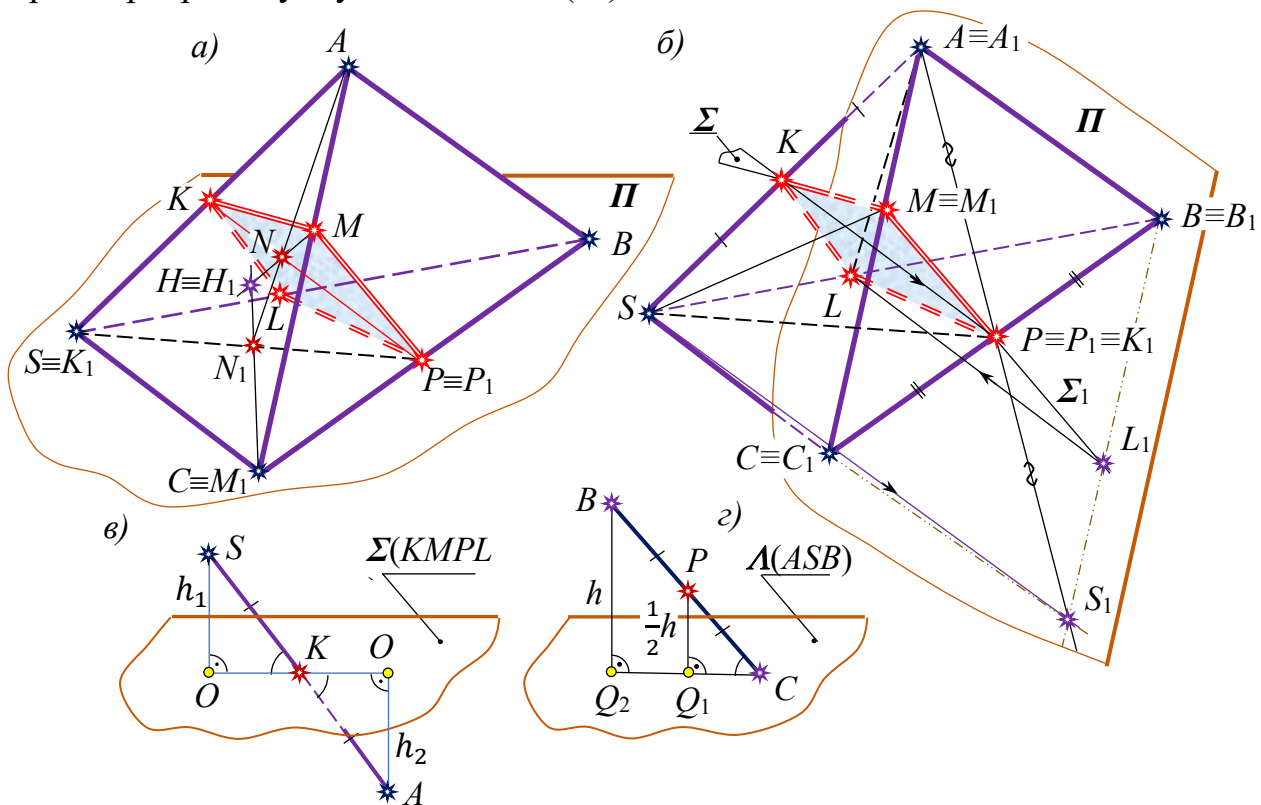


Рис. 1.49

Із тим, щоб визначитися ще й **метрично** з розташуванням точки L на ребрі SB , виберемо за площину основи (Π) піраміди площину грані ABC (рис. 1.49, б) і будемо проєкціювати піраміду $SABC$ на площину Π , тепер уже, за напрямом $K \rightarrow P$ внутрішнього *паралельного* проєкціювання. Неважко зрозуміти, що за таких обставин площина Σ буде проєкціювальною на площину основи Π ($\Sigma_1 \equiv (M_1P_1L_1)$), точка S – вершина піраміди – матиме проєкцію в точці S_1 , а чотирикутник $S_1B_1A_1C_1$ буде паралелограмом. Останнє твердження справді істинне, оскільки точки $S, K,$

A – колінеарні, $SK = KA$, а відношення відрізків на прямій є інваріантом паралельних проєкцій, $K_1 \equiv P \equiv P_1$ і $CP \equiv PB$. Отже, в чотирикутнику $S_1B_1A_1C_1$ діагоналі перетинаються і точкою перетину (P) діляться навпіл, а це, як відомо, є умовою однієї з ознак паралелограма. Враховуючи, що точка P – центр симетрії цього паралелограма, а точки $M \equiv M_1$ і L_1 є центральносиметричними відносно точки P , без зусиль знаходимо: $S_1L_1 = 0,4S_1B_1$ ($AM = 0,4AC$ за умовою), тому $SL = 0,4SB$ і, отже, $BL = 0,6BS$. Тут, врешті-решт, точка L на ребрі SB знайдена **графічно – оберненим проєкціюванням** (див. рис.: $L_1 \rightarrow L, L_1L \parallel S_1S$).

Таким чином, цим ще раз підкреслюємо, що у випадку піраміди можна скористатися принагідно не лише внутрішнім центральним, а й внутрішнім паралельним проєкціюванням, що за певних умов призводить до бажаних як графічних, так і метричних (обчислювальних) результатів. Важливо, щоб аналізуючи умову задачі та рисунок до неї, а деінде й висовуючи гіпотези помітити цю можливість і правильно зорієнтуватися у виборі центра (напряму) внутрішнього проєкціювання та відповідної йому вдало розташованої в конкретній просторовій конструкції площини проєкцій (див. також §1, задача 5, другий спосіб розв’язання, і далі – п. 2.2, задача 13).

Відомо, що площа плоскої фігури може бути аналітично (обчислювально) визначеною, якщо така фігура, зокрема, є основою деякого стандартного стереометричного тіла із уже заданими об’ємом і висотою. Віднесемо чотирикутник $KMPL$ до піраміди $AKMPL$, висота якої (h) рівна 1 дм (за умовою). Чи можна якимось чином обчислити об’єм цієї піраміди? Так, звичайно ж можна. Для цього розіб’ємо задану піраміду $SABC$ на чотири складові $SKMPL$, $AKMPL$, $ALPB$ і $MSCP$. Цікаво і важливо, що піраміди $SKMPL$ і $AKMPL$, $ALPB$ і $MSCP$ – попарно рівновеликі (їх об’єми рівні). Доведемо це твердження.

З першою парою все просто. Піраміди $SKMPL$ і $AKMPL$ мають спільну основу $KMPL$ і рівні висоти $h = h_1 = h_2$, оскільки $SK = AK$ (рис. 1.49, в), тому очевидно, що їх об’єми рівні: $V_1 = V_2$.

Щоб довести рівність об’ємів V_3 і V_4 пірамід $ALPB$ і $MSCP$, покажемо, що кожен із цих об’ємів складає одну і ту ж саму частку від об’єму V вихідної піраміди $SABC$. Справді, $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ASC} \cdot H$, де H – висота піраміди, проведена з вершини B на основу ACS , а $S_{PMSC} = \frac{1}{3}S_{\Delta MSC} \cdot \frac{H}{2}$ ($BP = PC$ за умовою, рис. 1.49, г). У свою чергу, $S_{\Delta MSC} = \frac{3}{5}S_{\Delta ASC}$ тому, що в цих трикутників висота спільна, а їх основи CM і CA задовольняють умові $CM : CA = 3 : 5$. Отже, отримаємо таке: $V_{PMSC} : V = 3 : 10 \Rightarrow V_{PMSC} = 0,3V$. Тепер виконаємо аналогічні розрахунки стосовно піраміди $ALPB$. А саме, $V = \frac{1}{3}S_{\Delta BSC} \cdot H$, де H – висота заданої піраміди, проведена з вершини A на площину основи BSC ; до того ж, $V_{ALPB} = \frac{1}{3}S_{\Delta LPB} \cdot H$, оскільки висота піраміди $ABSC$ і висота піраміди $ALPB$ – один і той самий відрізок (вершиною пірамід є точка A , а трикутник LPB належить трикутнику BSC). Відомо також, що $S_{\Delta LPB} = \frac{1}{2}BP \cdot BL \cdot \sin \angle B$ (*), де $BP = \frac{1}{2}BC$, $BL = \frac{3}{5}BS$, а $S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2}BS \cdot BC \cdot \sin \angle B$ (**). Отож бо, поділивши рівності (*) і (**) одну на

іншу, одержимо: $S_{\Delta LPB} : S_{\Delta BSC} = 3 : 10$. З останнього відношення матимемо, що $S_{\Delta LPB} = 0,3S_{\Delta BSC}$, а отже, $V_{ALPB} = 0,3V$. Із наведених викладок, в цілому, якраз і впливає, що $V_{PMSC} = V_{ALPB} = 0,3V$.

Остаточнo одержимо таке: $V_{PMSC} + V_{ALPB} = 0,6V$. Тому на кожну з іншої (першої) пари рівновеликих пірамід випадає по $0,2V$, адже $V_{SKMPL} = V_{AKMPL}$ і $V_{SKMPL} + V_{AKMPL} = 0,4V$. З іншого боку, отримаємо таке: $V_{SKMPL} = \frac{1}{3}S_{KMPL} \cdot h$ або $\frac{1}{5}V = \frac{1}{3}S_{KMPL} \cdot h$. Але $h = 1$ дм, а $V = 5$ дм³, тому $S_{KMPL} = 3$ дм². Олімпіадного типу задачу, яка вміщує серйозний конструктивний компонент, розв'язано.

Алгоритмічна схема

$$S = \frac{3V_1}{h} \leftrightarrow \left\{ V_1 = \frac{V_1 + V_2}{2} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 1, \\ V_1 + V_2 = \frac{2}{5}V \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V = 5, \\ V_1 + V_2 = V - (V_3 + V_4) \leftrightarrow (1). \end{array} \right\} \\ V_1 = V_2 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_{SKMPL}; V_2 = V_{AKMPL}; \\ \left(\begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{3}S_{KMPL} \cdot h_1; \\ V_2 = \frac{1}{3}S_{KMPL} \cdot h_2 \end{array} \right) \leftrightarrow (2). \end{array} \right\} \end{array} \right\} \right\}$$

$$(1) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4; \\ V_3 + V_4 = \frac{3}{5}V \leftrightarrow V_3 = V_4 \leftrightarrow (3). \end{array} \right\}$$

$$(2) \leftrightarrow \left\{ h_1 = h_2 = h \leftrightarrow \Delta SO_1K = \Delta AO_2K \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} K = SA \cap \Sigma(KMPL), \\ SK = SA(\text{за умовою}), \\ h_1 = SO_1 \perp \Sigma, h_2 = AO_2 \perp \Sigma; \\ KMPL - \text{основа, спільна} \\ \text{для обох пірамід.} \end{array} \right\} \right\}$$

$$(3) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_3 = V_{ALPB}, V_4 = V_{MSCP}, V = V_{SABC}, \\ V_3 = \frac{3}{10}V \leftrightarrow \left(V_3 = \frac{1}{3}S_{\Delta LPB} \cdot H_2; V = \frac{1}{3}S_{\Delta BSC} \cdot H \right) \leftrightarrow (4), \\ V_4 = \frac{3}{10}V \leftrightarrow \left(V_4 = \frac{1}{3}S_{\Delta MSC} \cdot H_1, V = \frac{1}{3}S_{\Delta ASC} \cdot H \right) \leftrightarrow (5). \end{array} \right\}$$

$$(4) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} H = H_2 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{т. } A - \text{спільна вершина,} \\ (\Delta LPB \text{ і } \Delta SCB - \text{компланарні;} \end{array} \right\} \\ S_{\Delta LPB} = \frac{3}{10}S_{\Delta BSC} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_{\Delta LPB} = \frac{1}{2}BL \cdot BP \cdot \sin \angle B \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BL = \frac{3}{5}BS \\ \text{(за побудовою),} \\ BP = \frac{1}{2}BC \\ \text{(за умовою);} \end{array} \right\} \\ S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2}BS \cdot BC \cdot \sin \angle B. \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \leftrightarrow & \left\{ \begin{aligned}
 H_1 = \frac{H}{2} \left(\begin{aligned} H_1 = PQ_2, \\ H = BQ_1 \end{aligned} \right) \leftrightarrow \frac{PQ_2}{BQ_1} = \frac{CP}{CB} \leftrightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \Delta CPQ_2 \infty \Delta CBQ_1 \leftrightarrow (6). \\
 \frac{CP}{BP} = \frac{1}{2} \text{ (за умовою); }
 \end{aligned} \right\} \\
 \Delta CSM \text{ i } \Delta CSA - \text{ компланарні;} \\
 S_{\Delta CSM} = \frac{3}{5} S_{\Delta CSA} \leftrightarrow \left(S_{\Delta CSA} = \frac{1}{2} AC \cdot h', S_{\Delta CSM} = \frac{1}{2} MC \cdot h'' \right) \leftrightarrow (7).
 \end{aligned} \right\} \\
 (6) \leftrightarrow & \{ (BQ_1, PQ_2) \perp \Lambda(ASC), \angle C - \text{ спільний (за побудовою).} \} \\
 (7) \leftrightarrow & \left\{ \begin{aligned}
 h' = h'' \leftrightarrow \{ \text{т. } S - \text{ спільна вершина, тт. } C, M, A - \text{ колінеарні;} \} \\
 MC = \frac{3}{5} AC \text{ (за умовою).}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

На останок ще раз наголосимо, що в розв'язаній щойно задачі метод внутрішнього *паралельного* проєкціювання свідомо залучено не лише з метою побудови фігури перерізу даної трикутної піраміди, а й для встановлення визначальних метричних співвідношень всередині тіла. Це вельми сприяло порозумінню у створенні геометрично привабливого алгоритму обчислення площі чотирикутника *KMPL*. Отже, метод внутрішнього проєкціювання в цій конкретній ситуації є, водночас, методом розв'язання метричної задачі на обчислення. Очевидно, що принципово важливим, творчим моментом на етапі аналізу її умови слід вважати поміркований, вдалий вибір площини проєкцій і напряму проєкціювання всередині піраміди (який, до речі, не завжди асоціюється з напрямом бічних ребер тіла).

2.2. Умоглядна та змістова функції сліду площини на повному проєкційному кресленні стереометричного тіла

Уже в цьому параграфі наголошувалося, що в методі слідів знайшла своє пряме втілення перспективна (перспективно-афінна) відповідність двох площин, породжена виключно дією внутрішнього проєкціювання. Це, у свою чергу, засвідчує, що подвійна пряма (вісь) відповідності є де-факто лише зручним у використанні елементом конструкції, який зазвичай типізує графічні операції на повних зображеннях, пришвидшує їх виконання в часі та, за сприятливих вихідних умов, дещо мінімізує число допоміжних ліній у побудові. Загалом же, в основу задачі, в якій вимагається геометрично строго змодельювати переріз тіла площиною (з використанням сліду чи без нього), покладено, як з'ясувалося, винятково метод внутрішнього проєкціювання. Адже повнота зображення у стереометрії, а отже перша та друга ОПЗ є розв'язуваними в достовірних реалізаціях на картинній площині тільки завдячуючи цьому об'єктивно незалежному від нас дійству. Тепер уже варто погодитися, що *метод внутрішнього проєкціювання є потужним природним засобом конструктивної стереометрії, беззаперечно узагальнюючим й не настільки складним, як його інколи намагаються подати.*

Ми вважаємо, що недостатня увага в умовах навчального процесу до задач із суто геометричним змістом і, як наслідок, майже тотальна відсутність *стереометричних* побудов, є стратегічним прорахунком освітянських ідеологів, провідних методистів країни, усталеною вадою програм і підручників із геометрії

для школи. Традиційно переважають задачі на обчислення, в яких формальна складова розв'язання займає особливе, привілейоване місце. Але ж і в цих задачах досить часто випадає осмислено строго будувати переріз того чи іншого тіла площиною, оскільки в переважній більшості ситуацій чіткі уявлення місця положення фігури перерізу, її форми та, навіть, розмірів окремих елементів є визначальними факторами у правильному формуванні правила-орієнтуру алгебричних (тригонометричних) перетворень і виражень та, врешті, замовлених умовою обчислень.

Очевидно, що коли йдеться персонально про метод слідів, то першим у порядку слідування, обов'язковим і змістовим компонентом дій у графічному моделюванні фігури перерізу потрібно вважати побудову сліду – прямої перетину січної площини із площиною основи тіла, якщо, звичайно, слід не є на зображенні одним із визначальних елементів у задаванні площини перерізу, тобто коли слід ще не накреслено відповідно до умови задачі. Хоч, між іншим, пряму перетину січної площини з будь-якою гранню багатогранника теж називають слідом на площині цієї конкретної грані.

Слід площини на грані тривимірного тіла переважно будують шляхом відшукування слідів двох різних прямих, що лежать у січній площині, а за тим, з'єднавши знайдені точки, одержують слід самої площини (задача на перетин прямої із площиною чи двох площин у частинному випадку розташування).

Навмисна, взагалі кажучи, додаткова й непередбачувана загальною схемою дій побудова сліду площини перерізу на основній площині може (за певної ситуації) допомогти зримо відкинути ребра і грані тіла, які не мають реальних перетинів із січною площиною, й цим спростити рисункове розв'язання позиційної задачі на проєкційному кресленні. Особливо це доречно робити у випадках, коли є нагальна потреба багаторазового звертання до першої чи другої ОПЗ, наприклад, у побудові фігури перерізу тіла обертання площиною загального розташування (що також демонструвалося вище).

Щоб остаточно сформулювати професійно зрілий, довершений алгоритм використання методу слідів на повному проєкційному кресленні, ще раз повернемося до обґрунтованого в розділі I задавання площини загального розташування, приміром, трикутником. Відомо, що сам трикутник ABC і його основа $A_1B_1C_1$ (рис. 1.50) позиційно цілком визначають площину Σ , а слід площини XU будується елементарно в кілька кроків. У нашій ситуації, коли слід XU уже побудовано учнем чи задано умовою, суттєво вміти розумно скористатися ним для накреслення в заданій площині довільної точки $F(F_1)$. Тут потрібно: **1)** через точку F площини Σ , розташовану всередині, на стороні чи зовні трикутника $ABC(A_1B_1C_1)$, провести будь-яку пряму, окрім паралельної основній площині Π (прямій XU), наприклад, нехай це буде пряма, інцидентна точці A ; **2)** у перетині останньої зі слідом XU зафіксувати ще одну спільну для прямої і площини трикутника точку $Z \equiv Z_1$ і провести основу прямої A_1Z_1 ; **3)** з точки F за напрямом внутрішнього проєкціювання провести на площину основи шпигу, чим визначитися на A_1Z_1 із точкою F_1 . Цікаво і поцінно, що слід XU площини $\Sigma(ABC)$ можна залучити як проміжну ланку в побудові не лише основи F_1 деякої накресленої точки F цієї площини, а й навпаки, – у відшуванні точки F за її

накресленою основою F_1 , чим й користуються насправді в реальних задачах.

З позицій повноти зображення, суть справи обґрунтовується дуже просто. Адже відомо, що *пряма XU у ролі сліду заданої площини Σ на площині основи Π є одночасно*, що завжди варто пам'ятати, *ще й носієм подвійних точок цих двох площин у внутрішньому проєкціюванні* (напр. $Z \equiv Z_1$). Отже, пряма XU – суть всі без винятку перетини нескінченної множини прямих площини Σ із площиною Π в точках, які є також власними внутрішніми проєкціями (основами) на основній площині. Іншими словами, якщо на позиційно визначеному кресленні вже задано площину $\Sigma(ABC(A_1B_1C_1))$ і побудовано її слід XU на площині основи Π , то між точками цих площин встановлено *взаємно однозначну відповідність*, яка й називається *перспективною* у випадку піраміди (конуса, рис. 1.50, а) і *перспективно-афінною* у випадку призми (циліндра, рис. 1.50, б). Тут слід площини XU виконує роль осі відповідності, а напрям останньої зливається з напрямом внутрішнього проєкціювання.

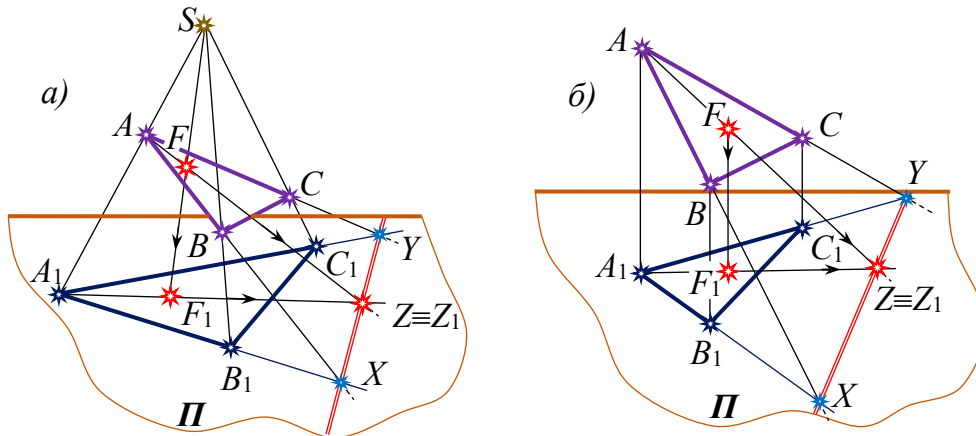


Рис. 1.50

У побудові пар відповідних точок площин Σ і Π (F і F_1) особливо важливо виділити дві відомі характеристичні властивості цієї класичної в афінній геометрії відповідності: **1)** *будь-яка пара відповідних точок розташовується на прямій, яка має напрям відповідності, тобто належить променю внутрішнього проєкціювання* (шпиці); **2)** *яка завгодно пара відповідних прямих перетинаються на осі відповідності, тобто на лежать сліду XU* . Саме ці дві позиції є найважливішими у графічному відтворенні схеми розв'язання методом слідів будь-якої задачі на переріз стереометричного тіла площиною, в них концентрується суть методу **слідів** (чи *взаємно однозначної відповідності*).

А тепер наведемо кілька типових прикладів, демонструючи застосування методу слідів у вирішенні чи то виключно побудовних, чи то, в тому ж числі, й обчислювальних пропозицій евклідової стереометрії.

Задача 12. *Трійка точок P , Q і R задані на поверхні паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ так, що точка P лежить на діагоналі верхньої грані AC , точка R – на ребрі BB_1 , а точка Q – на грані $CDD_1 C_1$. Змодельовати переріз паралелепіпеда площиною $\Sigma(PQR)$.*

Побудуємо на самому початку пряму XU перетину двох площин $\Sigma(PQR)$ і $\Pi(A_1 B_1 C_1 D_1)$ (рис. 1.51), тобто знайдемо відомим способом слід січної площини на площині основи багатогранника. Відтак ретельно проаналізуємо рисунок із

тим, щоб визначитися з активними бічними ребрами паралелепіпеда, точки перетину яких із даною площиною Σ потрібно побудувати. Очевидно, що якби точка $M(M_1)$ перетину ребра CC_1 із площиною перерізу була знайдена, то сторона шуканого багатокутника $MQ(M_1Q_1)$ визначала б на ребрі DD_1 у грані DD_1C_1C ще одну його вершину $N(N_1)$. Оскільки передня і задня, ліва і права грані паралелепіпеда попарно паралельні, то провівши у гранях AA_1D_1D і AA_1B_1B прямі, відповідно паралельні прямим RM і MN , одержимо на ребрах AD і AB ще дві вершини E і F фігури перерізу. Отже, перерізом паралелепіпеда площиною $\Sigma(PQR)$ буде п'ятикутник $EFRMN$. Моделювання точка $M(M_1)$ у цій схемі строго обґрунтовується через посилення на дві відомі властивості взаємно однозначної відповідності між площинами Σ і Π , яка вже визначена напрямом **внутрішнього проєкціювання** (парою відповідних точок R і R_1) і слідом XY січної площини на площині основи: **1)** через точку $M_1 \equiv C_1$ проведемо пряму R_1M_1 до перетину в точці $Z \equiv Z_1$ зі слідом XY ; **2)** з'єднаємо точки R і Z прямою та зафіксуємо точку M її перетину з ребром CC_1 .

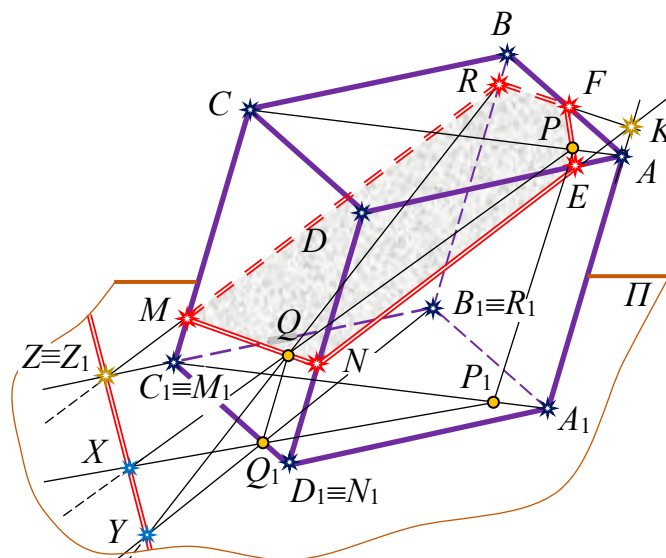


Рис. 2.51

Не повинно в учня залишитися сумнівів, що й у даному конкретному випадку метод слідів є виключно окремим (частинним) випадком методу посередників, який базується тільки на операції внутрішнього проєкціювання. Щоб переконатися в цьому, досить ще раз уважно проаналізувати можливі варіанти трактування алгоритму побудови точки $M(M_1)$ перетину ребра тіла CC_1 із площиною перерізу $\Sigma(PQR)$. Це потрібно зробити, скажімо, за схемою ОПЗ-1: **1)** через ребро CC_1 проведемо проєкціювальну площину-посередник $\Omega(BB_1C_1C)$; **2)** побудуємо пряму $RZ(R_1Z_1)$ перетину січної площини Σ із площиною-посередником Ω ; **3)** знайдемо точку перетину ребра CC_1 із прямою RZ . Це й буде шукана точка $M(M_1)$. Тут слід площини перерізу, що очевидно, дещо спрощує технічне відтворення на проєкційному кресленні звичного алгоритму дій «у три кроки».

Пропонуємо читачеві самостійно поміркувати над рисунком до задачі стосовно цікавого і вартого уваги варіанту її розв'язання методом слідів, який виключає побудову вказаним чином точки $M(M_1)$. Підказ: $EF \parallel XY$. Зробіть

адекватний такій рисунковій ситуації висновок.

Задача 13. Змодельювати переріз правильної чотирикутної піраміди площиною Σ , що задається на зображенні трьома точками $M(M_1)$, $N(N_1)$, $P \equiv P_1$, жодна з яких не належить поверхні піраміди.

З наголосом зауважимо: тут проєкційний рисунок 1.52 піраміди $SABCD$ і січної площини $\Sigma(MNP(M_1N_1P_1))$ позиційно визначений у внутрішньому паралельному проєкціюванні за напрямом висоти піраміди SO_1 ($S_1 \equiv O_1$).

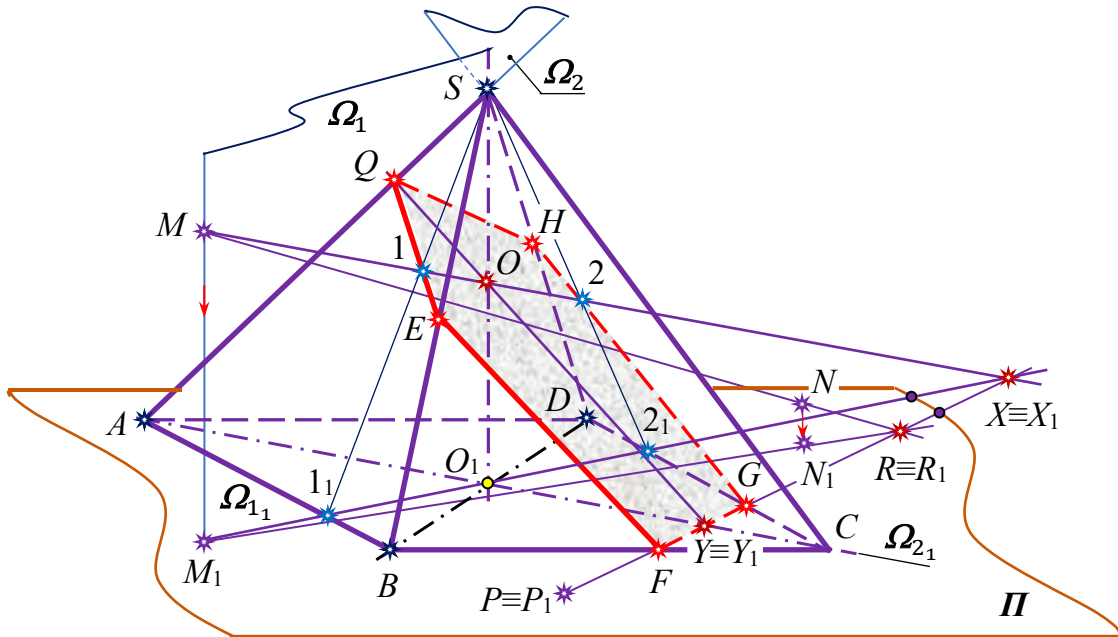


Рис. 1.52

Оскільки точка $P \equiv P_1$ завідомо лежить на площині основи піраміди (згідно з умовою), слідом січної площини буде пряма $PR(P_1R_1)$, яка легко будується шляхом відшукування ще однієї його точки $R(R_1) = MN(M_1N_1) \cap \Pi$ – сліду прямої $MN(M_1N_1)$ на площині $\Pi(ABCD)$. Зримо фіксуємо точки F і G перетину прямої $PR(P_1R_1)$ із ребрами в основі піраміди BC і CD відповідно – це дві вершини багатокутника перерізу; звідси прямо випливає, що в межах зображення піраміди ребро SC немає перетину із площиною Σ . Далі, в реалізації схеми методу внутрішнього проєкціювання із залученням сліду і пучка площин-посередників Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$), найбільш зручно за вісь пучка взяти пряму SO_1 , оскільки кожна з указаних допоміжних площин матиме в перетині з пірамідою власний трикутник, який в уявленнях учня обертається навколо осі піраміди – спільної висоти цих трикутників. Перша із площин $\Omega_1(\Omega_{11})$, що визначена точкою $M(M_1)$ і прямою SO_1 , через доречне графічне залучення точки $X \equiv X_1$, яка належить сліду $PR(P_1R_1)$, дозволяє водночас побудувати на прямій $MX(M_1X_1)$ не лише контурні точки фігури перерізу $1(1_1)$, $2(2_1)$, що лежать у гранях SAB і SCD відповідно, але й точку $O(O_1) = SO_1 \cap \Sigma$, яка є, загалом, фіксованою – однією із двох кардинальних точок у перетині площин Ω_i із площиною Σ (незалежно від числа бічних ребер піраміди). Іншу з них теж потрібно вибирати належною сліду. Наприклад, точку Q на ребрі SA знаходимо в перетині цього ребра із прямою $Y(Y_1)O$: $Q = Y(Y_1)O \cap SA$, де $Y \equiv Y_1$ – спільна точка площини посередника $\Omega_2(\Omega_{21})$

та сліду $PR(P_1R_1)$. Із проєкційного рисунка вочевидь випливає, що шуканий багатокутник перерізу піраміди $EFGHQ$ так знайденими точками визначається однозначно. Задачу розв'язано.

Немає особливої потреби продовжувати демонструвати застосування методу слідів до побудови будь-яких перерізів багатогранників площиною, оскільки тематичні викладки в тексті вище були досить вичерпними, а предметні літературні джерела [13, 16, 19], що ґрунтовно висвітлюють цей метод, написані переважно у прикладах і задачах. Проте аматору геометрії не варто забувати, що завжди площина перерізу має спільну пряму із площиною кожної грані багатогранника, якій вона не паралельна, тобто січна площина має стільки слідів, скільки граней вона перетинає. Все ж, у більшості випадків, на практиці знаходять той слід, який лежить у площині нижньої основи багатогранника. Тому й користуватися цим методом доцільно та безперечно зручно тоді, коли січна площина не паралельна площині основи і перетинає її вздовж прямої, розташованої виключно в межах картинної площини, на якій здійснюються відповідні конструктивні дії, та до того ж тоді, коли площина перерізу в умові задачі визначена так, що цей варіант задавання припускає доречне й удале залучення її сліду з метою оптимізації процесу візуальних графічних побудов.

Предметно резюмуючи й узагальнюючи матеріал цього важливого для учня параграфа, виділимо наступне. Всім відомо, що будь-яка руйнація стереотипів – поранка з розряду невдячних. Можливо й нам не варто було ревізувати усталені, традиційні підходи висвітлення такого, як здавалося, несуперечливого й простого в конструктивній стереометрії питання: «Перерізи тіл площиною». Однак, за тезою старовічних – *«істина дорожча»!* Особливо, коли справа стосується педагогічних аспектів методики подання геометрії вчителем учням.

Як з'ясувалося, реально **існує єдиний природний метод** побудовного подання популярної в геометрії позиційної задачі – **метод внутрішнього проєкціювання за напрямом бічних ребер**, назва якого відображає єство однойменного динамічного перетворення всередині стереометричного тіла та, безсумнівно, геометричну сутність уявних і рисункових дій учня. Взаємно однозначна відповідність між точками січної площини та площини основи тіла навіч проглядається в методі, однак лише «між рядками» логіки міркувань, в якості цікавого результативного компоненту операції внутрішнього проєкціювання, а слід січної площини, у свою чергу, є одним із визначальних елементів такої перспективної (перспективно-афінної) відповідності двох площин, котрій у багатьох випадках просто нереально зобразити на моделі, оскільки цілком можливо, що він за даними умови задачі розташовується поза межами формату дошки чи аркуша паперу.

Потрібно розуміти, що логічний ланцюжок проєкційно-закономірного представлення вказаної відповідності припускає варіації, як-от: два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, кожен з яких, власне, визначає одну із площин Σ і Σ_1 , розташовують у просторі будь-як, але з безперечним дотриманням вимоги, щоб прямі AA_1 , BB_1 і CC_1 перетиналися в одній-єдиній точці S , зокрема, – у віднесеній в нескінченність. Однак така обставина гарантовано забезпечує одноосібне внутрішнє проєкціювання однієї площини на іншу, а подвійна пряма s цього

дійства (слід) лише **навіпісля** строго встановлюється перетином прямих, які вміщують відповідні сторони трикутників.

Таким чином, *метод слідів принципово немислимий у графічній реалізації без свідомого залучення методу внутрішнього проєкціювання*, й навпаки, **метод внутрішнього проєкціювання цілком автономний і самодостатній**, для його застосування слід категорично не обов'язковий. Іншими словами, *метод слідів (чи відповідності) є лише частинним випадком методу внутрішнього проєкціювання*, хоч інколи вже заданий (або ж, просто побудований) слід на проєкційному рисунку виявляється дуже ефективним посередником у графічному вирішенні серйозних питань теорії і практики конструктивної стереометрії.

§ 3. Моделювання одно-картинним зображенням перерізу кулі площиною

Уважно читаючи, аналізуючи загалом глибоко змістовні, дуже корисні навчальні та методичні посібники вже неодноразово згадуваних раніше шанованих авторів, в яких пріоритетно чільне місце посідають позиційні задачі, неважко помітити привнесену благими намірами певну удаваність, дріб'язкове, недостатнє опрацювання, спрощення та, як наслідок, фальш у трактуванні правил-орієнтирів графічного виконання на проєкційних кресленнях перерізів круглих тіл (чи їх поверхонь) площиною. Складається враження, що деінде в поясненнях переслідувалися лише вузько практичні інтереси – навчити моделювати як такі (і тільки!) окремі точки закономірної кривої лінії, розташованої на заданій (накресленій) поверхні.

Так, у тій чи іншій мірі строгості, констатують факт, що перерізом кривої поверхні обертання, крім випадків, коли січна площина вміщує її прямолінійні твірні, буде плоска закономірна крива лінія: еліпс (коло), гіпербола або ж парабола. Категорично наголошують на неодмінному відшуканні точок перетину з січною площиною обрисових твірних поверхні, оскільки ці точки розмежовують креслення шуканої кривої на видиму та невидиму частини. Далі, методом внутрішнього проєкціювання, зокрема з використанням сліду площини знаходять деяке число головним чином випадкових точок лінії перерізу в кількості, достатній для їх з'єднання так званою «лекальною» кривою. По-іншому, задачу на переріз певного (визначеного в геометрії ЗЗСО) «кривого» стереометричного тіла площиною зводять до задачі на переріз багатогранної поверхні, вписаної попередньо в поверхню обертання. Це – своєрідне узагальнення відомих методів (ребер, граней) у використанні останніх до трохи складніших геометричних тіл. Проте такий підхід у розв'язуванні досить серйозної математичної задачі є дещо примітивним, мовчазно компромісним, навіть байдушким, з чим важко погодитися хоча б з огляду на те, що виховання творчої мислячої особистості, справжніх майстрів конструктивних перетворень на проєкційних кресленнях, які свідомо опановують технології виконання істинно геометричних операцій, вимагає від них більш глибокої графіко-математичної культури.

Одним із нетипових прикладів ефективного комбінованого використання у стереометричному моделюванні методу посередників і специфічного методу

перетворення паралельних проєкцій – методу суміщення – може бути задача на побудову перерізу кулі площиною загального розташування.

Застосувавши в найпростішому зображенні кулі строго ортогональне проєкціювання, завжди матимемо її обрис у вигляді кола великого діаметра. Для певності приймемо за площину зображень Π площину великого кола кулі; іншими словами – площину дошки (зошита), яка «проходить» через центр тіла (рис. 1.53, а). Задаємо січну площину Θ' трьома точками A' , B' і C' на поверхні тіла (штрихами позначаємо точки, прямі і площини в оригіналі), які не лежать на одній прямій. З метою уявлюваної та рисункової визначеності задачі, будемо вважати, що точка C' , наприклад, невидима на площині зображень, тобто розташована за картинною площиною.

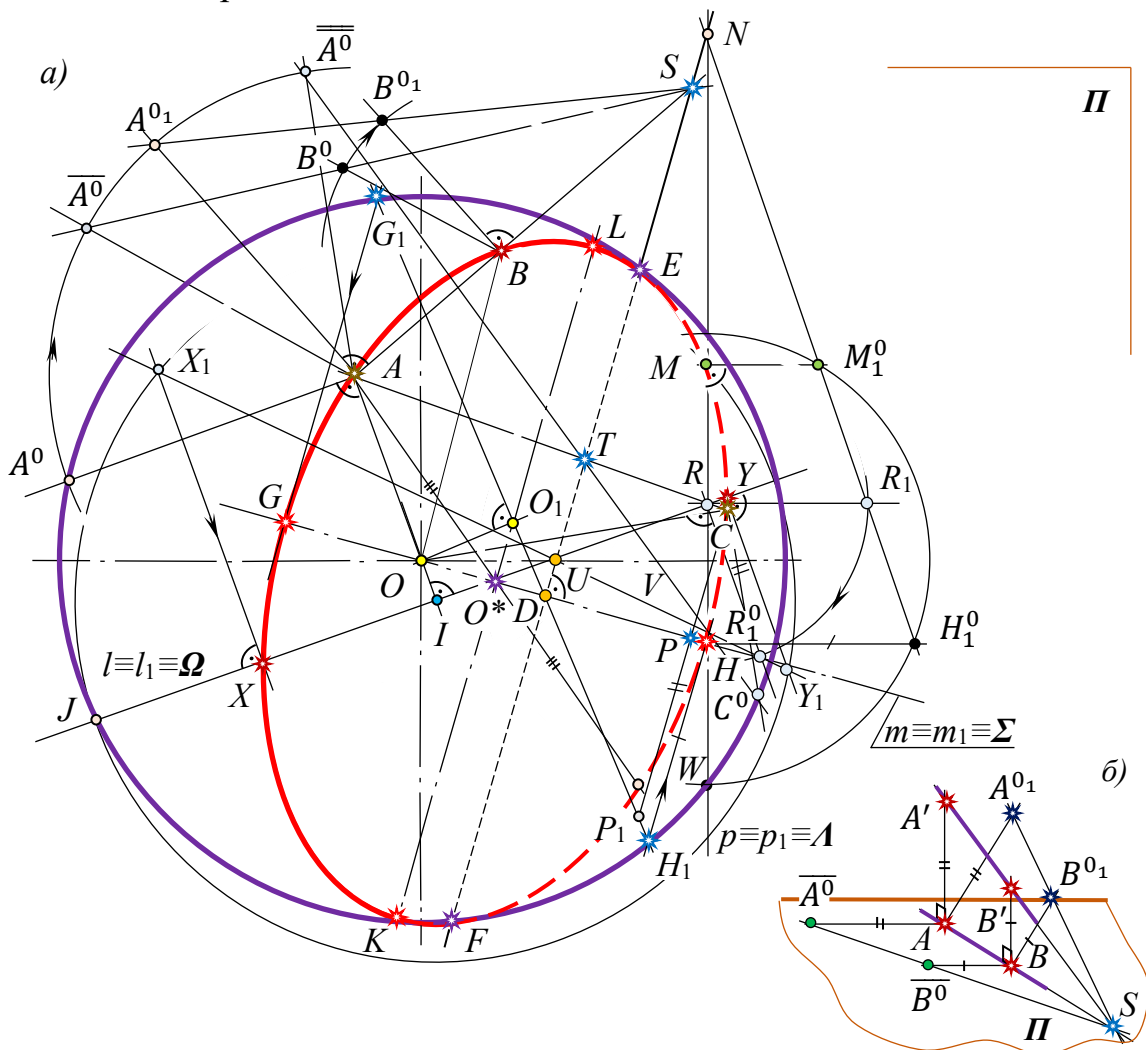


Рис. 1.53

Важливо, що при цьому, як відомо, зображення сфери у вигляді її обрису *позиційно* і *метрично* визначене. Крім того, що так задано справжній діаметр кулі, зафіксовано її розташування у просторі та безпосередньо на моделі, ще й можна прямо з рисунка заміряти дві координати будь-якої точки її поверхні – сфери (широту (абсцису) і висоту (аплікату)) і легко відшукується також третя координата – глибина (ордината в системі $Oxyz$) за умови, що вісь $Oy \perp \Pi$. Для цього досить, наприклад, через точку A' на поверхні сфери провести фронтально проєкціовальну площину Δ' , яка містить центр кулі O' , і поворотом на 90°

навколо сліду OA сумістити її із площиною зображень Π . Велике коло, яке є перетином площини Δ' і сфери, суміститься з обрисом, а точка A' суміститься з точкою A^0 на обрисі. При цьому $AA^0 \perp OA$. Отже, відрізок AA^0 є глибиною точки A' відносно площини зображень. Аналогічно можна знайти глибину всякої іншої точки сфери.

Будь-яка площина перетинає сферу по колу, ортогональною проєкцією якого, в загальному випадку, є еліпс. Звичайно, еліпс цілком визначається своїми великою та малою осями (як і якою завгодно іншою парою спряжених діаметрів), а для його побудови досить знайти на зображенні кінці цих осей. Крім таких визначальних точок, еліпс має безліч випадкових (довільних або проміжних точок), кожна з яких будують за допомогою одного і того ж прийому (алгоритму). До випадкових, зокрема, відносяться точки A , B і C , що задають на зображенні площину перерізу. Проте на еліпсі є кілька точок, які займають особливе місце. Це так звані опорні точки, їх будують у першу чергу, причому побудова кожної з них вимагає спеціального прийому. До таких належать найближча і найдалша точки відносно тієї чи іншої площини проєкцій – екстремальні точки; точки, розташовані на обрисі зображення, – точки видимості; точки найбільшої ширини кривої і т. ін.

Тож розпочинаємо строго обґрунтоване, закономірне моделювання перерізу кулі площиною за таким правилом-орієнтиром дій.

1. Виконаємо спочатку допоміжну графічну операцію, а саме, *знайдемо слід січної площини Θ' на площині зображень Π* , чим прискоримо, в певній мірі, процес розв'язання задачі: а) шукаємо точку S перетину із площиною Π прямої $A'B'$. Для цього знаходимо глибини $h_A = AA^0$ точки A' , $h_B = BB^0$ точки B' і відкладаємо їх від точок A та B на напрямках, перпендикулярних AB , що призведе до суміщення $A^{0_1}B^{0_1}$ прямої $A'B'$ із площиною Π (рис. 1.53 а, б). Тоді точка S перетину суміщеної прямої з її проєкцією AB буде шуканою.

Зауважимо, що просторову модель указанного побудовного дійства можна інтерпретувати наступним чином. Усяка пряма, яка не паралельна площині зображень, перетинає її в деякій точці, яку називають слідом прямої. Уявимо собі задану пряму $A'B'$ твірною прямого кругового конуса, вершиною якого буде точка $S = A'B' \cap \Pi$, а віссю обертання – пряма AB , що є ортогональною проєкцією $A'B'$ на площину Π (рис. 1.53, б). Дві задані точки A' і B' , обертаючись навколо осі AB , описують кола (паралелі), радіуси яких відповідно рівні їх глибинам: $r_{A'} = h_A$, $r_{B'} = h_B$. Точка A^0 і B^0 вочевидь визначають ще одну твірну цього ж конуса у площині зображень Π , які є, водночас, суміщенням точок A' і B' у повороті останніх на кут 90° .

Окремо відмітимо, що місце розташування точки S не залежить від напрямку відкладання глибин точок A' і B' , аби тільки ці напрями були паралельні між собою. Цим побудова дещо спрощується: відкладаємо глибину $h_A = AA^0$ ($\overline{AA^0}$) паралельно висоті BB^0 і знаходимо перетин прямих AB і $\overline{A^0B^0}$ в точці S ; б) аналогічно будуємо слід T прямої $A'C'$ на площині зображень Π ($h_A = \overline{AA^0}$; $h_C = \overline{CC^0}$); в) з'єднуємо точки S і T прямою.

2. *Побудова точок видимості*: шукаємо точки E і F на фронтальній площині

як перетин прямої ST з обрисом сфери. Якщо слід площини Θ' не перетинає обрису (що буде у випадку однакової видимості всіх трьох точок A' , B' і C' , жодна з яких не належить головному меридіану), то лінія перетину даної площини зі сферою або цілком видима (всі точки розташовані перед меридіональною площиною), або цілком невидима (всі її точки належать іншій півсфері, розташованій за площиною головного меридіана).

3. Побудова кінців великої та малої осей еліпса: а) через точку O перпендикулярно сліду ST проводимо пряму m ($D = m \cap ST$), чим визначимо в даній площині перерізу Θ' зображення лінії найбільшого нахилу m' до картинної площини. Два взаємно перпендикулярні діаметри кола в перетині сфери площиною Θ' , один з яких належить щойно побудованій лінії, зображають на проєкційному кресленні велику та малу осі еліпса; б) через пряму m' проведемо фронтально проєкціювальну площину-посередник Σ' і поворотом навколо лінії рівня m_1 із нульовою глибиною (навколо сліду площини Σ') сумістимо площину Σ' із площиною зображень Π . Для цього у площині Θ' на лінії найбільшого нахилу m' виберемо будь-яку точку P' (P' не належить поверхні кулі). Нехай, для визначеності, P' має ту саму глибину, що і точка C' , тобто $P'C'$ – фронтальна пряма в січній площині Θ' . Нове розташування на зображенні точки P після повороту знаходимо так: у точці P будемо перпендикуляр до OD і відкладаємо на ньому відрізок $PP_1 = CC^0$; сполучивши точку D із точкою P_1 , одержимо суміщення P_1D лінії найбільшого нахилу. Нове розташування великого кола в перетині Σ' із поверхнею кулі збігається з її обрисом на площині зображень. Тому спільними для обрису і прямої P_1D матимемо точки G_1 і H_1 , що є кінцями суміщеного діаметра кола перерізу, який ще й зображується в натуральну величину. Тут точка $O_1(G_1O_1 = O_1H_1)$ буде суміщенням центра перерізу. За суміщенням O_1 шукаємо центр еліпса O^* , а ортогональна проєкція діаметра G_1H_1 на лінію OD (на рис. вказано стрілками) дасть малу вісь GH еліпса; в) велику вісь еліпса одержимо, відклавши від точки O^* на прямій, паралельній ST (перпендикулярній GH), відрізки O^*L і O^*K , рівні половині діаметра G_1H_1 . Точки G' і H' , окрім цього, будуть найбільш віддаленими точками шуканої лінії перерізу відносно площини зображень Π із різних боків від неї, а K' і L' – найбільш віддаленими точками від центра кривої на зображенні.

Зауважимо далі, що важливими опорними точками перерізу слід вважати також найбільш ліву і найбільш праву, найнижчу і найвищу точки на його зображенні (точки дотику всіх чотирьох сторін вертикально розташованого габаритного прямокутника, описаного навколо еліпса). Оскільки тут мова йде саме про точки зображення, а не оригіналу (на відміну від точок G , H , K , L), дотичні до кривої в точках, скажімо, першої пари, мають розташовуватися вертикально. Отже, шукати їх потрібно на діаметрі еліпса, спряженому до його довільної вертикальної хорди.

4. Побудова крайньої лівої і крайньої правої точок еліпса: а) візьмемо будь-яку з раніше побудованих точок перерізу, наприклад $H'(H)$; б) через точку H' у площині Θ' проведемо пряму p' так, щоб її проєкція p на площині рисунка була вертикальною прямою; в) вводимо в розгляд допоміжну фронтально

проекціювальну площину Λ' , що містить пряму p' і перетинає сферу по колу, радіус якого визначається відрізком VW ; г) обертанням навколо нуля-фронталі p_1 суміщаємо площину Λ' із площиною рисунка. Положення прямої p' після операції суміщення визначають точки H_1^0 і N , де $HH_1^0 \perp p$, $HH_1^0 = HH_1 = h_H$ і $N(N^0)$ є точка перетину прямої p' зі слідом ST площини Θ' . Коло з центром у точці V і радіусом VW буде суміщенням кола перетину площини Λ' і сфери. Проекціюванням на пряму p точки M_1^0 , яку знайдемо в перетині згаданого кола і прямої H_1^0N , одержимо точку M – інший, відмінний від H кінець хорди еліпса; д) точкою R ділимо хорду HM навпіл і проводимо через цю точку спряжений до хорди діаметр еліпса $RO^* = l$, як зображення прямої l' у площині Θ ; е) аналогічно попереднім випадкам, методом обертання навколо нуля-фронталі l_1 (див. рис. 1.53, а) знаходимо точки X і Y , що є шуканими – відповідно найбільш лівою і найбільш правою на еліпсі. Тут місце прямої l' після суміщення визначають точка R_1^0 , де $RR_1^0 \perp l$, $RR_1^0 = RR_1 = h_R$, і точка $U = l \cap ST$, а коло, що є спільним для площини-посередника Ω' і сфери, визначається центром у точці I ($OI \perp l$) і має радіус IJ .

5. Аналогічно здійснюємо побудову на зображенні найвищої та найнижчої точок еліпса (на рисунку не показано).

6. Для відшукування потрібної кількості випадкових точок (за розсудом виконавця), що розташовуються на зображенні перерізу більш-менш рівномірно між опорними точками, варто, перш за все, скористатися тим, що еліпс – фігура симетрична відносно своїх осей і центра. Якщо ж і цього буде не досить, що малоймовірно в даній задачі, то найпростіше застосувати прийом побудови точок еліпса за його великою KL і малою GH осями.

7. Скориставшись лекалом, наводимо змодельовану лінію перетину даних сфери та площини загального розташування. Останнім дійством рисункові випробовування цілком завершуються.

Напевне неважко помітити, що у процесі розв'язування такої специфічної задачі на переріз певною мірою порушені нами ж вироблені і прийняті раніше принципи термінології в поясненнях. Ми знову категорично підкреслюємо, що працюємо з визначеними просторовими об'єктами, зображеними за відповідними правилами ортогонального проєкціювання на фронтальній площині проєкцій. І відразу ж, із метою відшукування тієї чи іншої інцидентії, обґрунтовуємо відповідні дії циркулем і лінійкою із проєкціями цих об'єктів на кресленні. Тобто, з одного боку, відбувається удаване моделювання всіх графічних операцій в уявленнях, а з іншого, – графічна площинна демонстрація просторових пошуків їх результатів на поверхні кулі (у проєкції). Це, загалом, справа суб'єктивна в кожному окремому випадку, однак слід знати, що чітке розмежування оригіналу і його проєкції здійснюється не для задоволення якоїсь забаганки, а з єдиною метою, щоб краще, більш зрозуміло провести аргументацію всіх без винятку побудов, щоб кожна графічна операція обов'язково відображалася на кресленні лише після її просторового уявлення у свідомості учня. Адже тут всяка точка, якою випадає оперувати на моделі, не настільки явно, не так візуально чітко визначена, як, скажімо, у випадку багатогранника. Для нас звичною є картина, коли пара «точка

– основа точки» лежить на шпиці незалежно від того, яким саме внутрішнім проєкціюванням це забезпечено – центральним чи паралельним. У випадку кулі та її поверхні (сфери) якщо й можна уявити внутрішнє проєкціювання, то воно, по суті, є глибинним, перпендикулярним до площини зображень, тобто на такому «виді спереду» зовнішнє і внутрішнє проєкціювання ототожені, зливаються, а зображення кожної точки збігається із зображенням її основи (шпиця – вироджується в точку), хоч сама точка не обов'язково належить основній площині. Позиційна ж визначеність конструкції в цій ситуації забезпечується і підкреслюється єдино доречним відношенням: «належності» точки і поверхні. А саме, нам достеменно відомо, що **точка належить площині, якщо вона лежить на прямій цієї площини**; аналогічно, узагальнюючи (адже площина є частинним випадком поверхні), матимемо істинним таке твердження: **точка належить поверхні (сфері), якщо вона лежить на колі цієї сфери**.

Окрім цього, що суть важливо, в досягненні побудовного результату задачі на однокартинному кресленні кулі діяльнісно, ефективно «працює» перетворення **суміщення** проєкціювальної площини із площиною зображень або, по іншому, **метод обертання** площини навколо її нульової фронталі. Це ще одне з низки цікавих перетворень простору, яким з успіхом можна користуватися на позиційно і, до речі, – на метрично визначених кресленнях, що зображуються методом вільного виконання рисунків (див. далі р. III).

§ 4. Установлення типу та побудова опорних точок кінчних перерізів

Педагог-математик чи інженер-педагог певний, що одним із значущих, найбільш важливих завдань, які розв'язуються у процесі навчання геометрії в ЗЗСО та ЗВО, метою курсу геометрії є системне формування та інтенсивний розвиток в учнів (студентів) просторових уявлень і уяви, здібностей творчого мислення просторовими образами, а також прищеплення навичок і вмінь виконувати за чіткими правилами найрізноманітніші закономірні рисункові та обчислювальні операції над реально відсутніми об'єктами, зображуваними на картинній площині.

Існує чимало розділів і тем цілісного курсу, методик і засобів їх учіння та викладання, котрі спомагають результативному проявленню та становленню позитивних якостей особистості учня. Проте одним із найбільш ефективних прийомів у досягненні мети є регулярне наочно-образне, логічно виважене розв'язування стереометричних задач на побудову. За таких обставин, зацікавленій особі досить часто випадає мати справу з конусами, циліндрами чи їх комбінаціями, що пов'язано, як відомо, з перерізами тіл площинами, а отже, з **кінчними перерізами**. Мається на увазі не формальний підхід до графічного вирішення зазначеного питання шляхом формулювання методу побудови кількох випадкових точок кінчного перерізу, а створення і відпрацювання чіткої математично обґрунтованої конструктивної моделі системного пошуку шляху розв'язання задачі, а саме: **1) встановлення за чіткими ознаками типу кінчного перерізу**, який вже позиційно визначений у просторі та на проєкційному кресленні заданими конусом і січною площиною; **2) побудова конкретними методами**, відповідно до з'ясованого типу закономірної кривої, її так званих

опорних точок; 3) побудова, з урахуванням властивостей уже уявлюваного конічного перерізу, **достатньої кількості** його **проміжних точок**, розташованих рівномірно між опорними; 4) ретельне й акуратне **наведення** фігури перерізу та проекційного креслення конуса в цілому.

Попередньо, як це узаконено в аналітичній геометрії, строго й лаконічно розкриємо один із формально-логічних прийомів висвітлення теми «Конічні перерізи та їх класифікація».

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ (рис. 1.54) задано пряму лінію d ($x = kz, y = 0$), яка проходить через початок координат O , належить координатній площині xOz і нахилена до осі Oz під гострим кутом φ , де $k = \operatorname{tg} \varphi$ – кутовий коефіцієнт указаної прямої. Обертаючи пряму d навколо осі координат Oz , одержимо поверхню Φ , яка й називається **прямим круговим конусом** (конусом обертання).

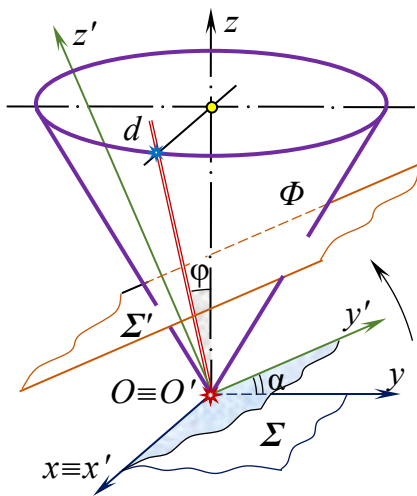


Рис. 1.54

Загалом рівняння будь-якої поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oz плоскої лінії, яка у просторі задається системою рівнянь ($x = f(z), y = 0$), має вигляд: $x^2 + y^2 = f^2(z)$. Отже, поверхня конуса, твірною якого є пряма d , а віссю обертання – координатна вісь Oz , буде описуватися рівнянням: $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ (1).

Тепер перейдемо до перерізів поверхні (1) різними площинами. Візьмемо пучок площин Σ , які вміщують вісь Ox , і з'ясуємо форму перерізів даної поверхні площинами Σ і всіма площинами Σ' , паралельними Σ . Для цього введемо в розгляд нову прямокутну декартову систему координат

так, щоб $O' \equiv O$, $O'x' \equiv Ox$, а вісь $O'y'$ – була паралельна (належала) площині Σ . Якщо кут між площинами (xOy) і ($x'O'y'$) в обертальному русі останньої навколо осі Ox рівний α ($\angle(y, y') = \alpha$), то формули перетворення простору – переходу від старої системи координат до нової – подаються у відомому нам вигляді: ($x = x'$, $y = y' \cos \alpha - z' \sin \alpha$, $z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha$), а конічна поверхня в новій системі координат $Oxy'z'$ матиме аналітичне представлення: $(x')^2 + (y' \cos \alpha - z' \sin \alpha)^2 - k^2 (y' \sin \alpha + z' \cos \alpha)^2 = 0$ чи $(x')^2 + (\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha)(y')^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + k^2) y' z' + (\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha)(z')^2 = 0$. (2).

Розглянемо перерізи конічної поверхні, описаної рівнянням (2), площиною Σ' : $z' = h$.

Відомо, що проекція шуканого перерізу на координатну площину (xOy'), тобто на площину Σ у двовимірному просторі, має рівняння: $(x')^2 + (\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha)(y')^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + k^2) h y' + (\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha) \cdot h^2 = 0$ (3). Візуально переконаємося, що це – рівняння кривої другого порядку. Потрібно його дослідити.

Нехай спочатку $h = 0$, тобто площини Σ' і Σ зливаються ($\Sigma' \equiv \Sigma$). Тоді рівняння (3) прийме вигляд: $(x')^2 + (\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha)(y')^2 = 0$ (4). Ним уже визначається лінія перетину площини Σ із поверхнею (1). Можливі три випадки,

які надто прості в уявленнях та умовиводами й тому не потребують ретельних пояснень.

1). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha > 0$ – пара уявних прямих, які перетинаються в дійсній точці O ($0; 0$). Тут площина Σ не містить твірних конуса і перетинає поверхню Φ в одній-єдиній точці O (рис. 1.55, а).

2). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha = 0$ – пара прямих, які зливаються. Площина Σ є дотичною до поверхні конуса вздовж його твірної (рис. 1.55, б).

3). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha < 0$ – поверхня Φ і площина Σ мають спільними *пару дійсних прямих*, які перетинаються в точці O ; по іншому, площина Σ перетинає поверхню вздовж двох твірних конуса (рис. 1.55, в).

Якщо $h \neq 0$, то рівняння (3), як зазначалося, є проєкцією лінії перерізу поверхні площиною Σ' , паралельною площині Σ , на координатну площину $\Sigma \equiv (xOy')$. Знову ж таки, можливі виключно три випадки:

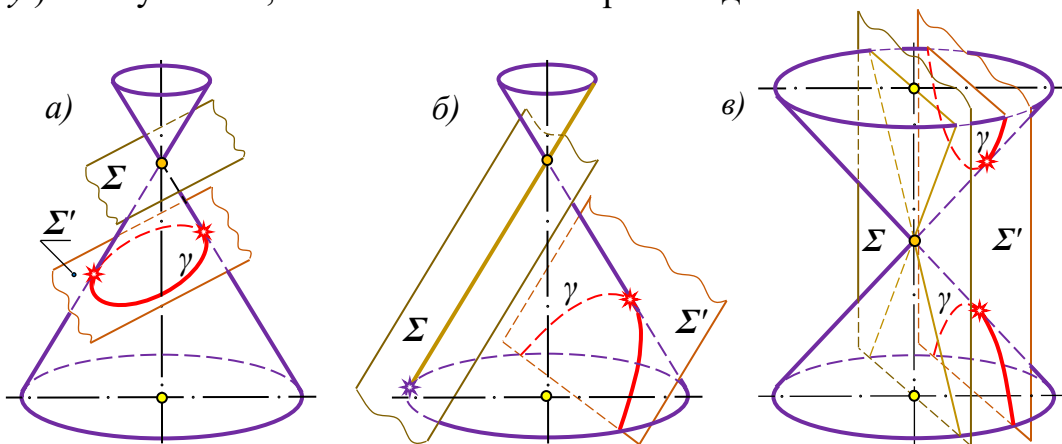


Рис. 1.55

1). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha > 0$. Вже відомо, що площина Σ не містить твірних конуса, а площина $\Sigma' \parallel \Sigma$ перетинає його поверхню по **еліпсу**, тобто рівняння (3) описує еліпс, оскільки коефіцієнти при $(x')^2$ і $(y')^2$ ненульові й мають однакові знаки (рис. 1.55, а).

2). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha = 0$. Площина Σ дотична до заданої поверхні вздовж твірної, а площина $\Sigma' \parallel \Sigma$ перетинає поверхню Φ по **параболі**, адже рівняння (3) описує параболу – один із коефіцієнтів біля змінних у другому степені рівний нулю, а інший (при $(x')^2$) – одиниці (рис. 1.55, б).

3). $\cos^2 \alpha - k^2 \sin^2 \alpha < 0$. Площина Σ перетинає поверхню вздовж двох твірних, а площина $\Sigma' \parallel \Sigma$ висікає на конічній поверхні **гіперболу**; рівняння (3) описує гіперболу, оскільки обидва коефіцієнти при $(x')^2$ і $(y')^2$ ненульові й різні за знаком (рис. 1.55, в).

Таким чином, будь-яка площина, що проходить через вершину конуса другого порядку, перетинає його поверхню вздовж пари прямих: уявних, які перетинаються в одній точці; дійсних, які зливаються або перетинаються. Всяка ж площина, яка не проходить через вершину конуса, перетинає його поверхню по еліпсу (колу, якщо $\Sigma' \perp Oz$), параболі або гіперболі, відповідно.

Такі 6 (шість) ліній на поверхні Φ називають **конічними перерізами**.

Узявши до уваги наведені факти теорії конічних перерізів, розглянемо це питання з позицій конструктивної стереометрії – суто побудовно.

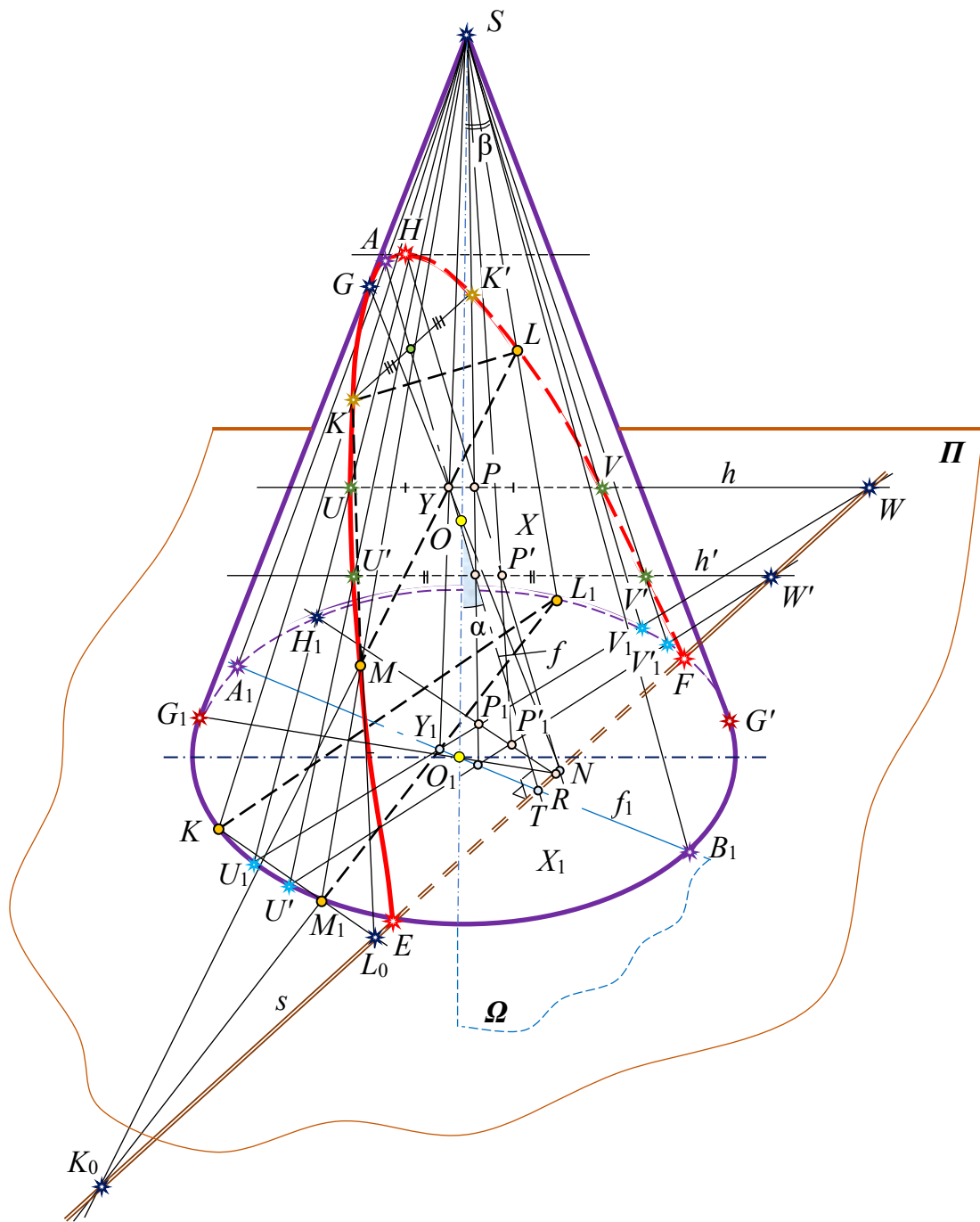


Рис. 1.56

На самому початку перерахуємо точки, віднесені до класу опорних. Нехай на проєкційному кресленні (рис. 1.56, 1.57) задано прямий круговий конус з основою в горизонтальній площині Π і січну площину Σ , яка проходить через деякі (загалом випадкові) точки K, L, M на поверхні. Для визначеності, задаємо ці точки між вершиною S конуса і площиною Π його основи. Отже, площина Σ визначає на поверхні конуса переріз, частину якого між S і Π ми й будемо розглядати. Опорними точками перерізу є, перш за все, найвища і найнижча його точки по відношенню до площини основи Π . Щоб краще зорієнтуватися в їх пошуку, введемо до розгляду допоміжну січну площину Ω (площину-посередник), яка містить вісь конуса і розташовується перпендикулярно до площини Σ . Очевидно, що Ω є площиною симетрії конструкції і перерізу. Точки

перерізу, найбільш віддалені від площини Ω , будуть його *найбільш лівою* і *найбільш правою* точками. Це друга пара опорних точок перерізу в оригіналі. Наголосимо, що на зображенні ці точки не обов'язково будуть найвищою (чи найнижчою) і відповідно крайньою лівою (правою). У зв'язку з цим, слід розглянути ще *найвищу* (-*нижчу*) і *крайню ліву* (*праву*) опорні точки перерізу-зображення. Нарешті, на перерізі-зображенні є ще одна пара опорних точок – *точки видимості*. Вони лежать на обрисових твірних конуса й іноді називаються точками дотику.

Визначеними точками ми і будемо перейматися, враховуючи при цьому, що побудова кожної з них (на відміну від випадкових точок) потребує, взагалі кажучи, власного (індивідуального) підходу.

Сформульована задача з наукової точки зору цілком обґрунтовано розв'язана в курсах аналітичної та нарисної геометрії, певною мірою, – в теорії аксонометричних проєкцій та на проєкційних кресленнях у випадку їх вільного виконання. Оскільки в педагогічній практиці останній метод покладено в основу стереометричних зображень, то з нього ми й будемо виходити.

Таким чином, за якими ознаками на зображенні конуса і січної площини встановити тип оригінальної фігури перерізу і як побудувати її опорні точки?

Точка S – центр внутрішнього проєкціювання, всі твірні кругового конуса – проєкціювальні прямі (промені); точки K_1, L_1, M_1 – основи (проєкції) заданих точок K, L, M відповідно; трикутник $K_1L_1M_1$ – основа трикутника KLM . Згідно із першою теоремою Дезарга, відповідні сторони цих трикутників перетинаються у трьох точках $K_0 = LM \cap L_1M_1, L_0 = KM \cap K_1M_1, M_0 = KL \cap K_1L_1$, які належать одній і тій самій прямій s – осі перспективної колінеації плоских полів Π і Σ (сліду площини Σ на площині Π ; на кресленні ця пряма визначається будь-якою парою з точок K_0, L_0, M_0).

Нехай α – кут між віссю конуса і площиною Σ , яка не проходить через його вершину, β – кут між віссю і твірною. Нам уже з попередніх викладок відомо: коли $\alpha > \beta$ (див. також рис. 1.55), то в перерізі одержуємо еліпс (зокрема – коло); якщо $\alpha = \beta$, то в перерізі буде парабола; якщо ж $\alpha < \beta$, то січна площина Σ у перетині з поверхнею конуса матиме криву, яка зветься гіперболою. Зауважимо, що від типу конічного перерізу залежить, у певній мірі, набір обов'язкових у побудові опорних точок.

Розглянемо взаємне розташування слід-проєкції січної площини (сліду) s і кола в основі конуса (еліпса e на проєкційному кресленні). Якщо s лежить зовні еліпса e або дотикається до нього, то площина Σ перетинає всі твірні конуса, і ми однозначно матимемо в перерізі еліпс (причому повний). Якщо ж s перетинає e (в точках E і F), то для встановлення типу перерізу потрібно побудувати фокальну вісь кривої другого порядку, яка у перетині з віссю конуса утворює кут α . Для цього скористаємося введеною раніше площиною-посередником Ω , яка, очевидно, перпендикулярна до будь-якої горизонталі площини Σ , зокрема до сліду s . На кресленні площина Ω задана віссю SO_1 і діаметром A_1B_1 в основі, спряженим із хордою EF (напрямом s). Фокальна вісь f перерізу визначиться як лінія найбільшого схилу площини Σ і може бути побудована комбінованим

методом за допомогою прямої $LM: f = \Sigma \cap \Omega$. Для наочного порівняння кутів α і β ($\angle O_1OT = \alpha$, $\angle O_1SB_1 = \beta$) достатньо через точку $O = SO_1 \cap f$ провести пряму, паралельну твірній SB_1 , або ж через точку S – пряму, паралельну f .

Одночасно із з'ясуванням типу конічного перерізу ми одержали на зображенні пару його опорних точок $A = SA_1 \cap f$ і $B = SB_1 \cap f$ (у випадку повного еліпса). Із попереднього випливає, що ці точки є кінцями фокальної осі еліпса, а тому саме вони визначають найбільший діаметр (велику вісь) кривої-оригіналу. Крім цього, A – найвища, а B – найнижча точки перерізу в оригіналі по відношенню до площини Π основи конуса (зауважимо, що точки A та B можуть не визначати найбільший діаметр перерізу-зображення). У випадку неповного еліпса, гіперболи чи параболи на зображенні залишається лише найвища точка A кривої (вершина); найнижчими точками кривої-оригіналу будуть точки E і F .

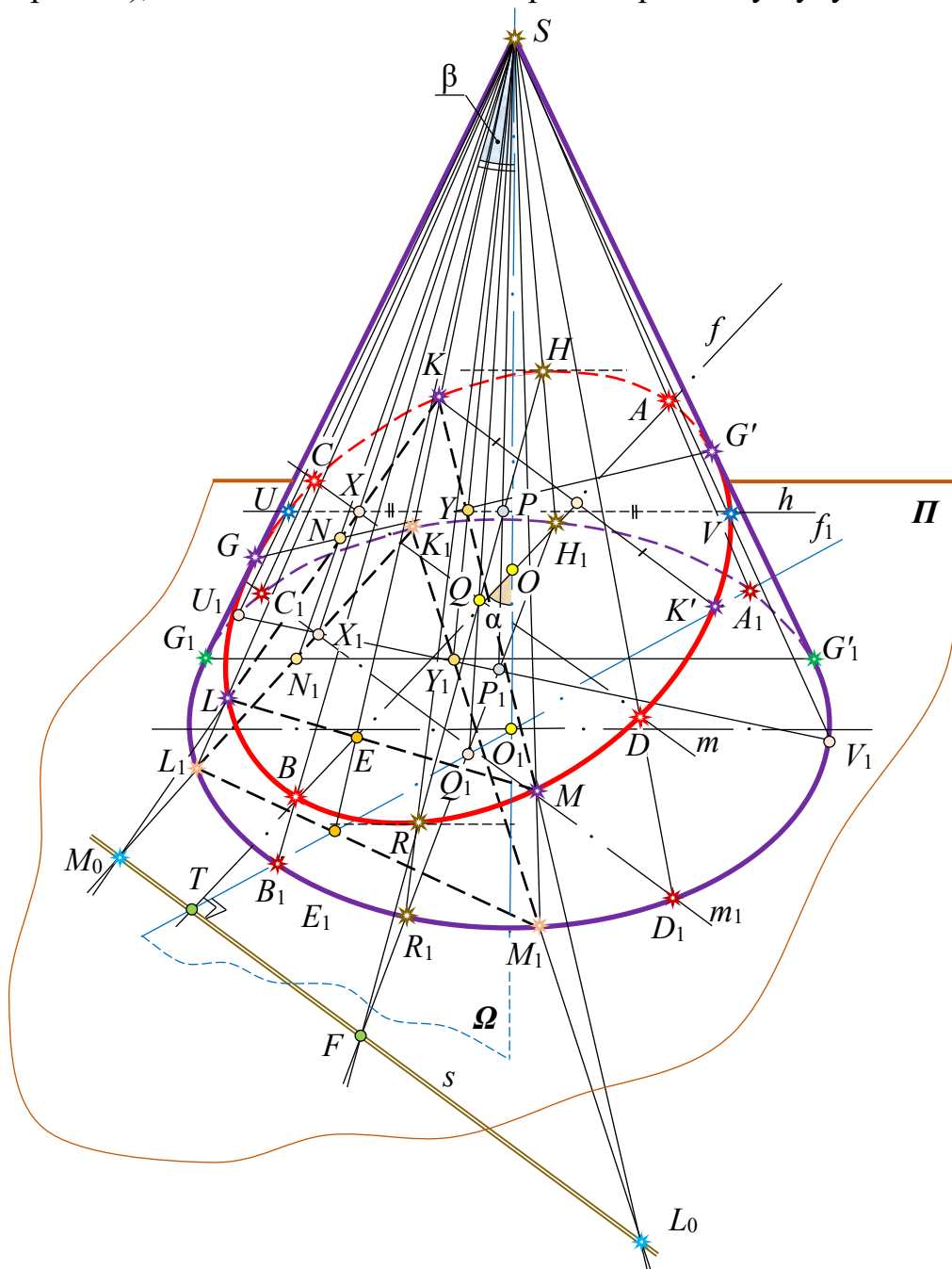


Рис. 1.57

Тепер про найбільш ліву і найбільш праву точки. У випадку повного еліпса ними будуть кінці C і D малої осі. Якщо еліпс неповний і його центр лежить не нижче площини Π , то згаданими опорними точками залишаться C і D . Якщо ж центр лежить нижче площини основи конуса Π , то найбільш лівою і найбільш правою точками будуть, очевидно, точки E і F . Ними ж будуть E і F у випадку гіперболи або параболи. Зауважимо, що у відповідних випадках CD або EF виражають найбільшу за довжиною хорду, перпендикулярну до фокальної осі перерізу. Побудова точок C і D виконується таким чином. Знаходимо центр Q еліпса (середину відрізка AB) і його основу Q_1 . Оскільки мала вісь m еліпса ($Q \in m$) є горизонталлю площини Σ , то і вона сама, і її основа m_1 ($Q_1 \in m_1$) паралельні сліду s , тому їх можна побудувати з урахуванням того, що паралельність прямих є інваріантом паралельного проєкціювання. Визначена ними площина перетинає зрізану (площиною Π) поверхню конуса по трикутнику C_1SD_1 (рис. 1.57). Звідси випливає, що $C = SC_1 \cap m$, $D = SD_1 \cap m$.

Кількість точок видимості перерізу, очевидно, не перевищує двох (це число уможливно легко встановити після побудови розглянутих вище опорних точок). Спосіб побудови точок видимості зручно пов'язати з їх числом. Нехай спочатку їх дві (рис. 1.57). Розглянемо площину-посередник $\Lambda(G_1SG'_1)$ і методом слідів знайдемо її лінію перетину із площиною Σ . Побудована пряма у перетині з обрисовими твірними SG_1 і SG'_1 конуса дасть шукані точки видимості G і G' , відповідно. Якщо ж точка видимості всього одна (рис. 1.56), то зручно скористатися осьовим перерізом конуса $\Delta(SG_1O_1)$, оскільки одна спільна точка площин Δ і Σ (точка O) побудована вже раніше, а друга точка (точка N) є перетином прямих G_1O_1 і s . Тепер очевидно, що $G = SG_1 \cap ON$. Відзначимо нарешті, що у випадках, коли зображувана частина перерізу цілком видима або ж зовсім невидима, потреба будувати точки видимості відпадає, оскільки останні на зображенні просто відсутні.

Перейдемо тепер до побудови найвищої і найнижчої точок на зображенні кінцевого перерізу. Розглянемо спочатку повний еліпс (рис. 1.57). Очевидно, дотичні до перерізу в шуканих точках H і R будуть розташовуватися горизонтально. Таким чином, ці точки мають бути кінцями діаметра, спряженого горизонтальному напрямку. Тому для їх відшукування на проєкційному кресленні досить провести у площині Σ будь-яку горизонтальну пряму h (доцільно через раціонально вибрану вже відому точку цієї площини, наприклад через точку Y на фокальній осі) і знайти на поверхні конуса її точки входу U і виходу V . Шуканий діаметр буде належати прямій QP , де P – середина хорди UV . Після цього процес побудови точок H і R методом слідів зрозумілий із рисунків. Якщо еліпс неповний, то найвищою чи найнижчою точкою на зображенні може залишитися одна з розглянутих раніше точок E і F (або обидві). У випадку параболи потрібним нам спряженим діаметром буде очевидно $PR \parallel f$. Коли ж у перерізі буде гіпербола чи менше половини еліпса (рис. 1.56), то, окрім цього, потрібно знайти середину P' ще однієї горизонтальної хорди $U'V'$ і провести діаметр PP' . Побудова найвищої (або ж найнижчої) точки в цих випадках ведеться аналогічно попередньому. При цьому до розглядуваних опорних точок

обов'язково входять точки E або F (або ж обидві разом).

Щоб аналогічно побудувати найбільш ліву і найбільш праву точки на зображенні перерізу, потрібно врахувати, що дотичні до перерізу в цих точках розташовуються на площині рисунка вертикально.

З метою побудови необхідної кількості випадкових точок слід скористатися відповідними симетріями конічних перерізів, враховуючи при цьому, що хорди, спряжені фокальній осі f , є горизонталями площини Σ . Якщо ж використання і цих властивостей виявиться недостатнім, то проміжні точки доцільно шукати на прямих січної площини Σ , що проходять через точку Q у випадку еліпса та через точку O у випадку параболи чи гіперболи (основи таких прямих будуть визначатися, відповідно, точками Q_1 і O_1 , а також подвійними точками осі s).

Все, про що говорилося щойно в тексті, можна подати в формі **правила-орієнтиру** строго узаконених побудов.

1. *Встановлюємо тип конічного перерізу:*

а) будуємо слід s січної площини Σ на площині основи Π конуса;

б) якщо s лежить зовні контурних твірних основи або ж дотикається до нього, то конічний переріз – повний еліпс; в іншому випадку вводимо в розгляд точки E і F перетину s з контуром основи;

в) будуємо діаметр A_1B_1 основи конуса, спряжений з напрямом s ; трикутник SA_1B_1 визначає площину-посередник Ω ;

г) шукаємо на зображенні фокальну вісь f конічного перерізу, як лінію перетину площин Ω і Σ ;

д) фіксуємо кут α між віссю поверхні обертання і фокальною віссю f та кут β між тією ж віссю конуса і його твірною, що лежить в площині Ω ;

е) зримо (чи транспортиром) порівнюємо градусну міру кутів α і β : якщо $\alpha > \beta$, то в перерізі буде неповний еліпс; $\alpha = \beta$ – парабола і $\alpha < \beta$ – гіпербола;

2. *Будуємо опорні точки конічного перерізу:*

а) найвищу A і найнижчу B (кінці великої осі) у випадку повного і неповного еліпса; ділимо відрізок AB навпіл, чим визначаємо точку Q – центр еліпса; встановлюємо розташування точки Q відносно Π : якщо Q лежить не нижче Π , то будуємо точки C і D – кінці малої осі еліпса; якщо ж Q лежить нижче Π , то переходимо до пункту б). У випадку параболи чи гіперболи будуємо точку A ; тут найнижчими (на оригіналі) будуть точки E і F ;

б) точки видимості шуканої кривої на зображенні: G і G' (або ж тільки G); можливі випадки, коли ця дія виключається;

в) найвищу H і найнижчу R на зображенні у випадку повного еліпса. У всіх останніх випадках – тільки точку H .

г) найбільш ліву і найбільш праву точки.

3. *Будуємо потрібну кількість випадкових точок, уможливно розташовуючи їх рівномірно між побудованими опорними точками кривої.*

4. *Із допомогою лекал наводимо конічний переріз.*

5. *Встановлюємо видимість і здійснюємо наведення проєкційного креслення за правилами ДЗСТ 2.303-68 (див. [18]).*

Цей самий алгоритм (у дещо спрощеному вигляді) придатний для

розв'язання аналогічної задачі у випадку прямого кругового циліндра (рис. 1.58). Тут тип лінії перерізу поверхні площиною, не паралельною її осі, визначається однозначно: це завжди буде **еліпс**. Опрацюйте самостійно, будь-ласка, останній

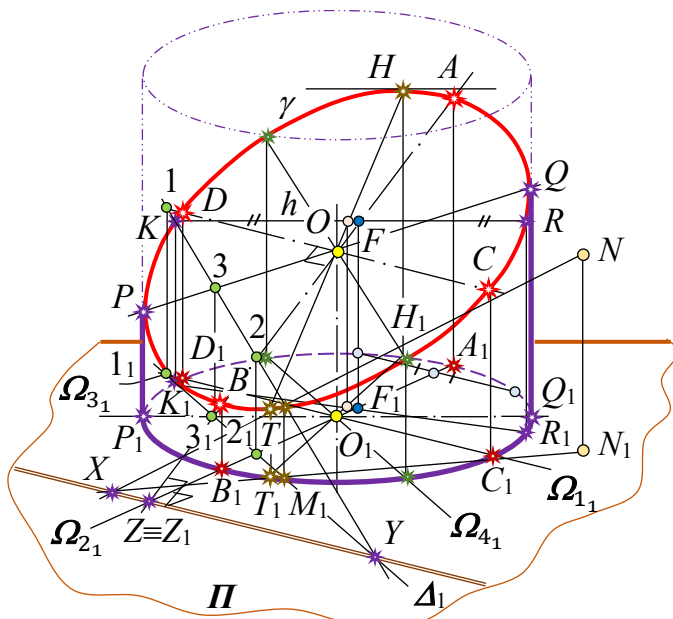


Рис. 1.58

рисунок; з'ясуйте способи моделювання як опорних, так і проміжних точок перерізу – кривої лінії γ .

Завершуючи зауважимо таке. Наведені в тексті цього розділу приклади далеко не вичерпують всього розмаїття задач, які можна розв'язувати методом посередників на повному кресленні. Цікавими й корисними у творчому розвитку уявляються, зокрема, задачі на побудову точок перетину прямої з поверхнею, ліній перетину двох багатогранників, багатогранника із кривою поверхнею і таке інше.

Важливо, що метод посередників у такому класі задач є по своїй суті універсальним, а професійне, вміле користування ним за чіткими і однозначними алгоритмами покрокових операцій гарантує свідоме досягнення кінцевого результату в кожному окремому випадку.

Вправи виконання таких і схожих до них побудов у курсі стереометрії не лише сприяють розвитку просторових уявлень і уяви, але й виробляють навички та вміння міркувати алгоритмічно, викликають потяг, бажання до покрокового моделювання розв'язань задач, вихідні дані для яких можна подати у графічному вигляді – на екранах потужних ПК. Це, у свою чергу, спонукає до педагогічно зваженого, доречного впровадження в ЗЗСО і ЗВО нових ІКТ, інноваційних методик використання сучасних ППЗ навчання, напрацьованих як вітчизняними, так і зарубіжними вченими.

Науково обґрунтований підхід до кожного етапу задачі в її візуальній реалізації вчить чіткості та строгості виконання операцій із просторовими об'єктами, переконує студента (учня) в серйозних розвивальних можливостях конструктивних методів. Системність у викладанні та учінні, інтерес до зримо закономірного моделювання індукують прояви і становлення поцінованих рис характеру особистості: заповзяття, ретельність й акуратність у роботі; формують відчуття естетичної гармонії та краси у природі та в диво-науці. Адже й сьогодні залишається актуальною з цього приводу думка знаменитого вченого, творця астрономії нової пори Й. Кеплера (1571-1630 рр.): *«Геометрія є прообразом краси Всесвіту»*.

Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації

Різні перерізи просторових об'єктів площиною широко використовуються як при вивченні теоретичних питань, так і при розв'язуванні численних задач, зокрема, в науці

і техніці. Під перерізом розуміють плоску лінію, яка утворюється від перетину площиною даної поверхні. Перерізом кривої поверхні, узагалі-то кажучи, є крива лінія, крім тих частинних випадків, коли січна площина проходить через прямолінійні твірні поверхні. У випадку багатогранника (піраміди, призми) перерізом є багатокутник, число вершин (сторін) якого залежить від кількості ребер (граней), що мають спільні точки (вершини) із площиною перерізу.

Варто мати на увазі, що універсальним методом побудови перерізу просторової фігури площиною є метод посередників. Однак, перш ніж скористатися ним чи його рисунковою моделлю – методом внутрішнього проєкціювання (з використанням сліду чи без нього), приступити до безпосередньої реалізації графічного алгоритму покрокового розв'язання задачі, потрібно ретельно проаналізувати зображення, встановити опорні (характерні) точки перерізу, визначитися на яких саме лініях (прямих, колах) поверхні вони розташовані, визначитися (у випадку кривої поверхні) з числом і місцем розміщення проміжних (допоміжних) точок між опорними.

Виконавці рисунків до більш-менш складних задач на перерізи користуються, як правило, змішаним методом із тим, щоб побудовних ліній на зображенні було якомога менше, а результату можна було досягти якнайшвидше. Якщо ж ви маєте справу із багатогранником, то оптимізуйте кількість ребер, точки зустрічі яких із січною площиною потрібно шукати, і обов'язково ефективно скористайтеся геометричними елементами, якими визначена на картинній площині площина перерізу, застосуйте **оптимізаційний підхід** до розв'язування задачі.

Тепер уже не може бути сумнівів, що придатність до системної рисункової оптимізації слід вважати вагомим, безперечним пріоритетом методу внутрішнього проєкціювання. Притім позитивний результат обумовлюється такими чітко означеними трьома домінантами.

1. У побудові точок фігури перерізу, спільних для поверхні стереометричного тіла і січної площини, потрібно посилаючись виключно на метод посередників, зокрема кваліфіковано оперувати алгоритмом дій «у три кроки», розв'язуючи будь-яку із двох основних позиційних задач.

2. Оскільки всяка площина необхідно вміщує щонайменше три неколінеарні точки, шпичю однієї з них варто помірковано взяти вісью пучка площин-посередників Ω_i ($i = 1, 2, \dots$), які вибірково вводяться для «активних» твірних (ребер) поверхні, точки перетину яких із січною площиною де-факто потрібно побудувати (інколи, як для правильної піраміди (призми) чи поверхні обертання (див. рис. 1.52, 1.58), в якості такої може слугувати вісь SO_1 чи OO_1 відповідно). Ще інші дві точки заданої площини, які теж виважено обираються тим, хто розв'язує задачу, визначатимуть пряму, яка завдячуючи власній проєкціювальній площині-посереднику Δ , щоразу в перетині з кожною вже введеною проєкціювальною площиною-посередником Ω_i , в уявлюваному обертанні останньої, по чергово висікатиме другу спільну точку, обов'язкову в реалізації другого пункту першої основної позиційної задачі (як, наприклад, пряма LM на рис. 1.48).

3. Відразу, задля кращої орієнтації, певності й визначеності у проведенні побудов, скористайтеся слідом січної площини на площині основи тіла, якщо це технічно узгоджено з форматом зображення і умовою задачі. Так, на рисунку 1.58 слід XU площини $\Sigma(KMN)$ посприяв оперативному й побудовно точному відшукуванню кінців великої AB та малої CD осей еліпса γ .

Таке розсудливе, осмислене ставлення до вирішення серйозної позиційної пропозиції дисциплінує учня, структурує й упорядковує графічні операції, формує

евристичну схему моделювання перерізу методом внутрішнього проєкціювання, гарантовано мінімізує завантаженість й забрудненість проєкційного креслення, а отже, поліпшує динаміку його виконання та результуючу якість, сприяє прочитанню, «баченню» динаміки дій стороннім спостерігачем.

Принагідно варто мати на увазі, що між точками будь-якої площини, яка має загальне розташування відносно основної площини, і точками основної площини існує, у внутрішньому проєкціюванні, взаємно однозначна перспективна або перспективно-афінна відповідність. Це означає, що на повному зображенні для кожної точки січної площини за допомогою променів із апарату внутрішнього проєкціювання і сліду можна побудувати її проєкцію і, навпаки, знаючи проєкцію точки даної площини, можна побудувати саму точку. Слід площини перерізу на площині основи – це множина подвійних точок указаної відповідності, тобто кожна точка площини на цій прямій збігається зі своєю проєкцією (основою).

Щоб тісніше, глибше познайомитися з більш складними позиційними ситуаціями в конструктивній геометрії, розв'яжемо в якості прикладу задачу на моделювання зображенням лінії перетину двох багатогранників.

Задача 14. Побудувати лінію перетину трикутних піраміди і призми загального розташування.

Нехитрі уявлення, логіка «бачення розумом» даних багатогранників спонукають до таких найперших умовиводів. У випадку врізання одного тіла в інше, їх поверхні будуть перетинатися вздовж однієї-єдиної просторової лінії – по замкненому ламаному багатокутнику. Якщо ж тільки якийсь із багатогранників проникає крізь інший, то ця лінія розпадається на два багатокутники. Вони обидва можуть бути просторовими чи плоскими, або ж один із них буде просторовим, а другий – плоским.

Сторони (ланки) ламаної представляють собою відрізки прямих перетину граней обох багатогранників. Вершинами ламаної є точки перетину ребер кожного з даних багатогранників із гранями іншого. Звідси випливають два методи моделювання лінії перетину таких багатогранників: 1) відшукування на зображенні *вершин* ламаної (ОПЗ-1); 2) відшукування на зображенні *ланок* ламаної (ОПЗ-2).

На практиці перевага надається методу ребер. При цьому з'єднувати ланками можна лише ті вершини ламаної, котрі лежать в одній грані як першого, так і другого багатогранників. Якщо грані обох багатогранників видимі, то їх перетин зображується видимим відрізком. У протилежному випадку, коли хоча б одна із двох розглядуваних граней невидима, належна їм ланка лінії перетину теж буде невидима.

Найперше, аналізуючи візуально рисунок 1.59, доходимо висновку, що ребра в основах кожного багатогранника не мають спільних точок із гранями іншого тіла.

Отже, на *першому етапі* будуюмо спільні точки перетину бічних ребер піраміди із гранями призми. З цією метою введемо в розгляд пучок площин-посередників із віссю SS_1 , які в обертанні поступово вибиратимуть ребра SD ($S_1D_1 \equiv \Sigma_1$), SE ($S_1E_1 \equiv \Lambda_1$) та SF ($S_1F_1 \equiv \Delta_1$). Площини Σ , Λ і Δ висікають у перетині з бічною поверхнею призми трикутники, які, у свою чергу, перетинаються з ребрами SD , SE і SF в шести точках (1, 2), (3, 4) і (5, 6) відповідно, які є вершинами шуканої лінії перетину.

На *другому етапі* моделюємо точки-інциденції бічних ребер призми і граней піраміди. Провівши через ребро AK (A_1K_1) призми проєкціовальну площину-посередник Ω ($A_1K_1 \equiv \Omega_1$) і побудувавши (чи уявивши розумом) трикутник її перерізу з пірамідою, переконуємося, що дане ребро не перетинається із гранями піраміди. Аналогічно діємо з ребрами BL (B_1L_1) і CM (C_1M_1). Врешті, як з'ясувалося, лише ребро CM (див. рис.) має дві спільні точки (7, 8) із поверхнею піраміди.

Вершини лінії перетину	Грані, в яких лежать вершини лінії перетину багатогранників	
	Піраміда	Призма
1	SDE, SDF	$ABLK$
2	SDE, SDF	$ACMK$
3	SDE, SEF	$ABLK$
4	SDE, SEF	$BCML$
5	SEF, SDF	$ABLK$
6	SEF, SDF	$ACMK$
7	SDE	$BCML, ACMK$
8	SEF	$BCML, ACMK$

На третьому етапі залишається лише з'єднати у певній послідовності одержані точки – вершини просторового багатокутника. Звернувшись до таблиці належності вершин шуканої ламаної граням багатогранників, помічаємо, що можна з'єднати, наприклад, точки 1 і 5, які лежать у спільній для них грані SDF піраміди і спільній для них грані $ABLK$ призми, проте з'єднати точки 1 і 2 неможна, оскільки, хоч вони й мають спільну грань SDE чи SDF піраміди, але лежать у різних гранях призми.

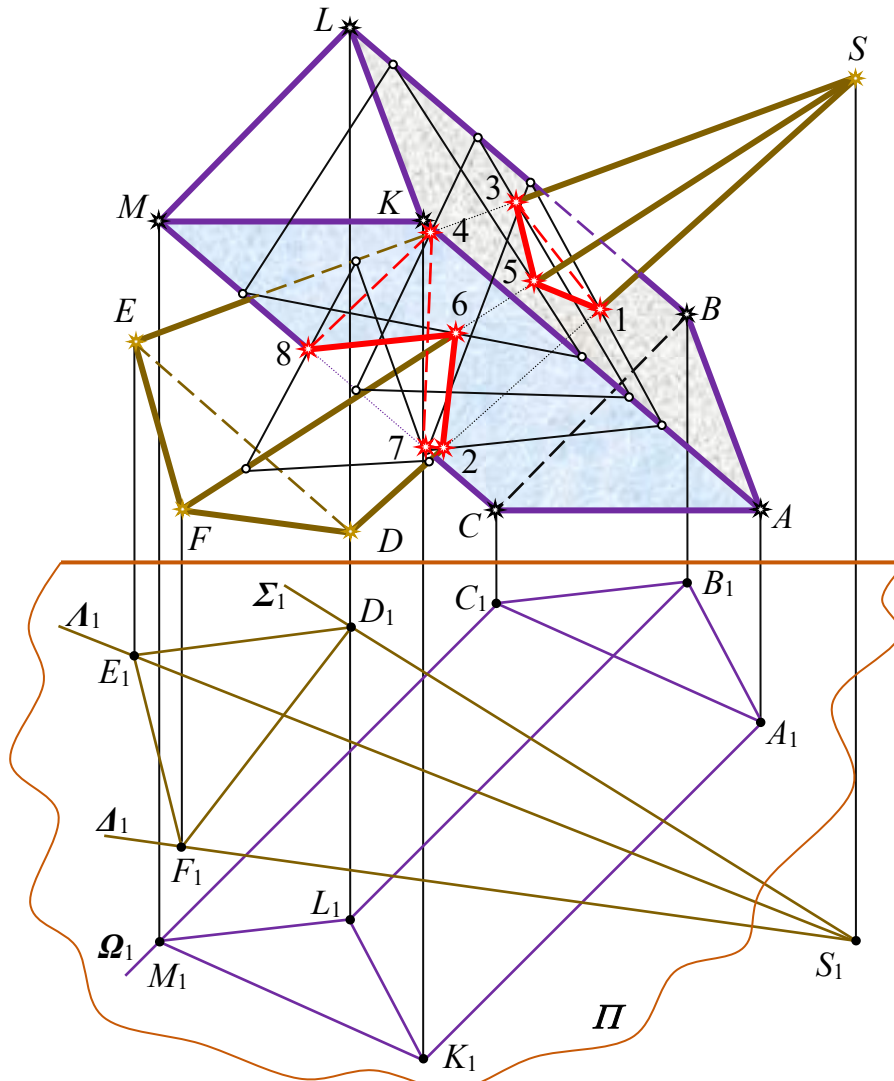


Рис. 1.59

Отож, дякуючи таблиці, встановлюємо такий порядок з'єднання точок: 1–3–5–1 та 2–7–4–8–6–2 (обидві лінії замкнулися). Констатуємо: в даному конкретному випадку ми маємо справу із внутрішнім проникненням піраміди крізь призму. Лінія перетину

поверхонь двох тіл розпадається на плоский і просторовий багатокутники.

Як уже відмічалось, видимими на моделі будуть ті ланки ламаної лінії, які розташовані одночасно у видимих гранях як першого, так і другого багатогранника. Наприклад, ланка 6–8 є видимою, адже грань SEF піраміди і грань $ACMK$ призми, в перетині яких лежить розглядувана сторона шуканого багатокутника, видимі. А от ланка 1–3 ламаної невидима, оскільки, хоч грань призми $ABLK$, якій вона належить, й видима, однак грань піраміди SDE , якій також належить цей відрізок, невидима.

Задля кращого «бачення» просторової ситуації, якісного прочитання проєкційного рисунка стороннім спостерігачем шпичі, задіяні в побудові перерізів піраміди і призми проєкціювальними площинами Σ , Λ , Δ і Ω , на зображенні не показані.

Задачу розв'язано повністю.

В якості додатку не зашкодить також продемонструвати ще один цікавий метод моделювання зображенням лінії перетину поверхні кулі площиною, тепер уже – на двох картинному комплексному кресленні Г. Монжа. Певні, такий прийом візуальної діяльності учня, по-перше, гарантуватиме краще розуміння суті питання і, по-друге, помітно спростить логіку міркувань у виконанні незвичних рисункових операцій. Крім того, це додасть мотивацій педагогічно виваженого, доречного залучення одного із ключових способів конструктивізму до грамотного унаочнення різнохарактерних геометричних пропозицій.

Якщо куля і січна площина $\Sigma(A, B, C)$ задаються в ортогональному проєкціюванні на фронтальному екрані Π_2 одно картинним кресленням (§3), то неважко перетворити його у двох картинне – добудувавши горизонтальну проєкцію кулі та площини. Адже куля на вигляді зверху зобразиться своїм екватором (з радіусом великого кола), а проєкція будь-якої точки фігури перерізу належить певній паралелі поверхні. При тому паралель сфери на площині проєкцій Π_2 вироджується в горизонтальний відрізок прямої, обмежений меридіаном, а на площині проєкцій Π_1 – зображується колом із радіусом у натуральну величину, довжина якого легко замірюється на Π_2 .

Щоб трохи урізноманітнити ситуацію в умові задачі, задаємо січну площину двома прямими, які перетинаються. Нехай, із метою спрощення процесу моделювання, одна із визначальних прямих площини Σ розташовується горизонтально ($h(h_1, h_2) \parallel \Pi_1$), а друга – фронтально ($f(f_1, f_2) \parallel \Pi_2$) (рис. 1.60).

Відразу наголосимо, в основу розв'язання поставленої задачі покладемо **метод посередників**. У цій ситуації, переважно, посередниками зручно обирати площини рівня, які в перетині зі сферою на відповідній площині проєкцій дають оригінальні кола. Інколи, в побудові особливих точок шуканої лінії, доведеться скористатися проєкціювальними площинами. В будь-якому випадку схема відшукання точок лінії перетину звична: **1)** дані поверхню і січну площину перетинаємо допоміжною вдало вибраною площиною; **2)** будуємо перетини посередника окремо з січною площиною та зі сферою; **3)** знаходимо пару точок перетину побудованих ліній.

Усяка площина, як відомо, перетинає сферу по колу. Проте, площина $\Sigma(h \cap f)$ займає загальне розташування відносно площин проєкцій Π_1 і Π_2 , тому коло перерізу на кожному з виглядів зображуватиметься еліпсом.

Спочатку побудуємо проєкції опорних точок, кожна з яких є характеристичною для еліпса і має специфічне розміщення на моделі.

1. На екваторі сфери будуємо точки $M(M_1, M_2)$ і $N(N_1, N_2)$, а на її головному меридіані – $P(P_1, P_2)$ і $Q(Q_1, Q_2)$. У першому випадку, здійснюючи за щойно означеною схемою дій покрокові операції, в якості посередника обираємо горизонтальну площину $\Lambda(\Lambda_2)$, а у другому – фронтальну $\Delta(\Delta_2)$. Знайдені точки розділяють, відповідно,

горизонтальну і фронтальну проєкції кривої на видимі та невидимі частини.

2. Найвища і найнижча точки $E(E_1, E_2)$ і $F(F_1, F_2)$ шуканої кривої належать, по-перше, прямій найбільшого нахилу січної площини Σ до Π_1 і, по-друге, – меридіану, що є осьовим перерізом сфери горизонтально проєкціовальною площиною-посередником $\Omega(\Omega_1)$. Отже, через вісь кулі $i(i_1 \equiv O_1)$ перпендикулярно горизонталі площини $\Sigma(h \cap f)$ проводимо допоміжну площину $\Omega(\Omega_1)$. Площини Σ і Ω перетнуться вздовж прямої $12(1_1 2_1, 1_2 2_2)$, а меридіан (велике коло) у площині Ω зобразиться своєю виродженою проєкцією – відрізком, що обмежений екватором на Ω_1 . Щоб установити їх перетин, виконаємо операцію суміщення, віссю якого буде пряма нульового рівня $p_1 \equiv \Omega_1$ у площині екватора. Після повороту на кут 90° меридіан «ляже» на Π_1 і зобразиться великим колом екватора, а екватор, у свою чергу, виродиться відрізком прямої на Ω_1 . Суть важливо в уявленнях «бачити», що це просторове перетворення зберігає висоти точок, тому неважко встановити нове розташування прямої 12 . На перпендикулярних до p_1 напрямках у проєкційному зв'язку відкладаємо висоти точок 1 і 2 , заміряні на Π_2 . Одержимо точки 1_3 і 2_3 , які однозначно визначають місце положення прямої 12 після суміщення. Залишається зафіксувати точки E_3 і F_3 перетину меридіана із прямою та оберненим перетворенням змоделювати їх проєкції (E_1, E_2) і (F_1, F_2) .

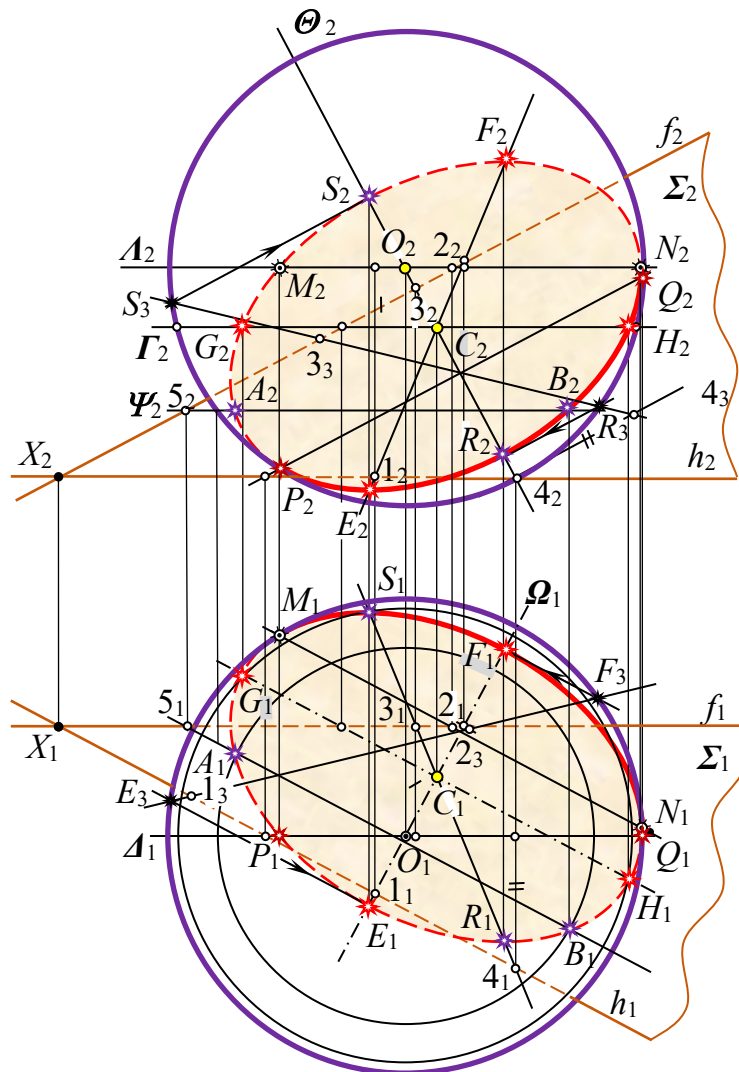


Рис. 1.60

Додамо, що ці точки є водночас кінцями одного із двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола – оригінального перерізу кулі січною площиною. Зображення діаметрів на Π_1 слугують осями еліпса, який моделюється, а на Π_2 – спряженими діаметрами

фронтальної проєкції того ж таки еліпса.

3. Оскільки одна з осей еліпса EF належить лінії найбільшого нахилу січної площини Σ до Π_1 , то інша його вісь GH ділить навпіл EF і займає горизонтальне розташування ($E_1F_1 \perp G_1H_1$, теорема про проєкціювання прямого кута, ч. I, р. I, §3). Тож провівши через точку $C(C_1, C_2)$ – середину відрізка EF – горизонтальну пряму лінію і скориставшись однойменною площиною-посередником $\Gamma(\Gamma_2)$, що вміщує цю пряму, просто знаходимо точки $G(G_1, G_2)$ і $H(H_1, H_2)$ – кінці ще однієї осі кривої, яка є зображенням кола.

4. Міркуваннями, аналогічними тим, що були проведені в пункті 2, засвідчуємо таке. Найближча і найдалша точки (за мірою їх глибини) розташовуватимуться, по-перше, на лінії найбільшого нахилу січної площини до площини проєкцій Π_2 і, по-друге, – на великому колі сфери у фронтально проєкціювальній площині-посереднику перпендикулярній фронталі площини Σ . Закономірну побудову опорних точок $R(R_1, R_2)$ і $S(S_1, S_2)$ потрібно здійснювати за схожою схемою, розпочинаючи дію на Π_2 . Вони є водночас кінцями малої осі еліпса на вигляді спереду. До того ж, у площині головного меридіану кулі (див. як у пункті 3) можна, за потреби, легко побудувати зображення кінців фронтально розташованої великої осі еліпса.

5. Найбільш ліва і найбільш права точки моделюються як кінці діаметра еліпса, спряженого його профільному діаметру. З цією метою не зашкодить пригадати означення спряжених діаметрів і, в найпростішому варіанті реалізації алгоритму закономірних операцій, скористатися профільною проєкцією даних кулі та січної площини Σ (на рисунку 1.48 не показано).

6. Достатню кількість проміжних точок проєкцій кола-перерізу в їх компактному розташуванні, що встановлюється візуально, знаходимо з допомогою горизонтальних і фронтальних площин-посередників, помірковано введених учнем між побудованими опорними точками (див., напр., (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , ...).

Завершуємо конструктивні дії на двох картинному кресленні акуратним наведенням змодельованої лінії перерізу та естетично привабливим оформленням зображення сфери і площини в цілому (з урахуванням їх видимості).

Контрольні запитання

1. Перерахуйте відомі методи бінарного моделювання перерізів багатогранників площиною (з використанням ОПЗ-1 чи ОПЗ-2). Обґрунтуйте їх назви.

2. Якими наявними фактами, додатковими побудовами можна скористатися з метою спрощення процесу моделювання перерізів тіл площиною?

3. Поясніть, чому не варто категорично стверджувати, що задача на переріз тіла площиною розв'язана чи то методом ребер, чи то методом граней?

4. У чому полягає етап аналізу задачі на переріз багатогранника площиною? Які складові цього етапу варто вирізняти?

5. Чому «внутрішнє проєкціювання» як дія, як уявлювана перетворювальна операція так важлива в теорії і практиці геометрії тіл?

6. Обґрунтуйте суто геометричний зміст методу внутрішнього проєкціювання в побудові перерізів тіл площиною.

7. Чи є коректним ототожнювання методів внутрішнього проєкціювання і взаємно однозначної відповідності?

8. Обґрунтуйте суто геометричний зміст методу слідів у побудові перерізів тіл площиною.

9. Чим відрізняються методи внутрішнього проєкціювання, взаємно-однозначної відповідності та слідів? Що їх об'єднує?

10. Назвіть дві визначальні властивості взаємно однозначної відповідності січної площини і площини основи тіла, покладені в основу побудови в цих площинах пар відповідних елементів.

11. Перерахуйте можливі варіанти обґрунтування шляху побудови точки перетину проєкціювальної прямої із площиною загального розташування.

12. У чому полягає сутність оптимізаційного методу моделювання перерізу тіла площиною? Які його переваги?

13. Чи можна розв'язати задачу на перетин тіла площиною методом слідів без залучення до справи дії внутрішнього проєкціювання? Яка роль сліду січної площини в цій задачі?

14. Одно-картинне креслення кулі. Чому ми вважаємо його позиційно визначеним?

15. Яка крива є інциденцією сфери і площини? За яких умов лінія перетину сфери і площини зображується еліпсом (колом)?

16. Чому деякі точки сферичного перерізу називають опорними? Назвіть кожен з цих точок. Обґрунтуйте їх побудову.

17. Яка технологія побудови проміжних точок перерізу кулі площиною?

18. Перерахуйте перерізи конуса січною площиною. Які позиційні ознаки кожного з перерізів? Як на зображенні встановити тип перерізу конуса площиною?

19. Перерахуйте опорні точки гіперболи і параболи. Як їх будувати на зображенні?

20. Назвіть усі можливі перерізи циліндра площиною.

21. Сформулюйте (для прикладу) одну-дві помітно складніші задачі позиційної геометрії. Як у схемах розв'язання таких задач залучаються до справи ОПЗ й уже відомі прийоми і способи уявлюваної та візуально-рисункової діяльності?

Тренувальні вправи і завдання

1. Через вершину основи і середини двох бічних ребер правильної трикутної призми проведено площину. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі її основи, якщо відомо, що січна площина перпендикулярна бічній грані.

2. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через середини двох його мимобіжних ребер і точку перетину діагоналей грані, яка не вміщує цих ребер.

3. У правильній п'ятикутній призмі бічні грані – квадрати. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і протилежну їй вершину верхньої основи. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи рівна a .

4. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2, а сторона основи 1. Через середину бічного ребра і мимобіжну з ним сторону основи проведено переріз. Знайти відстань від вершини піраміди до площини цього перерізу.

5. Куб, ребро якого дорівнює a , зрізано площинами від його вершин так, що від кожної грані залишився правильний восьмикутник. Знайти об'єм багатогранника, який утворився.

6. Основою піраміди служить ромб зі стороною a і гострим кутом 30° . Висота піраміди проєкціюється у вершину гострого кута ромба. Через середину висоти і протилежну їй вершину основи, паралельно діагоналі ромба, проведено переріз, нахилений до площини основи під кутом 45° . Знайти площу фігури перерізу та відстань від центра ромба до січної площини.

7. Зрізати п'ятикутну піраміду $SABCDE$ площиною $\Sigma(KLM)$. Точка $K(K_1)$ належить

ребру SA , точка $L(L_1)$ – грані SCD , а точка $M(M_1)$ розташована поза межами піраміди.

8. Побудувати лінію перетину чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною $\Sigma(KLM)$, якщо точка $K(K_1)$ лежить на ребрі AC , а дві інші точки розташовані поза межами призми.

9. Січна площина проходить через точку M_1 , яка лежить на продовженні ребра $A_1 B_1$ правильної трикутної призми $ABCA_1 B_1 C_1$, через вершину B і середину N_1 ребра $A_1 C_1$. Знайти відношення об'ємів тіл, одержаних у результаті перерізу призми площиною $\Sigma(M_1 B N_1)$, якщо $A_1 M_1 : B_1 M_1 = 2 : 1$.

10. Побудувати переріз прямої шестикутної призми площиною, що задана слідом a на площині її нижньої основи і точкою $M(M_1)$, яка розміщена: а) на ребрі верхньої основи; б) на бічній грані призми.

11. Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, що задана слідом a на площині її нижньої основи і точкою $M(M_1)$, яка розміщена: а) на бічному ребрі піраміди; б) на бічній грані піраміди.

12. Побудувати переріз циліндра площиною $\Sigma(KLM)$, якщо точка $K(K_1)$ лежить на видимій частині поверхні, точка $L(L_1)$ – на невидимій, а точка $M(M_1)$ розташована поза циліндром.

13. Побудувати переріз конуса площиною, заданою слідом a і точкою $M(M_1)$ на невидимій частині конічної поверхні.

14. Прямокутна трапеція, в якій більша з паралельних сторін дорівнює 12, а гострий кут α такий, що $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, лежить в основі піраміди. Всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, а площа її бічної поверхні дорівнює 192. Знайти площу паралелограма, що є фігурою перерізу піраміди площиною, проведеною через точку K на ребрі SA , якщо $SK : SA = 1 : 2$.

15. Побудувати окремо методом внутрішнього проєкціювання і методом слідів переріз чотирикутної піраміди площиною $\Sigma(PQR)$, якщо точка $P(P_1)$ належить ребру SB , точка $Q(Q_1)$ – площині основи піраміди, а точка $R(R_1)$ лежить за межами цього багатогранника.

16. На діагоналі $B_1 D_1$ основи чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взято точку P_1 . Побудувати фігуру перерізу призми площиною, яка проходить через пряму $C_1 P_1$ паралельно прямій AB_1 .

17. На ребрах AA_1 і DD_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взято відповідно точки P і Q . Побудувати переріз паралелепіпеда площиною, паралельною прямим BP і AQ й таких, що проходять через точку K , яка належить: а) CC_1 ; б) DD_1 ; в) AB ; г) $A_1 B_1$.

18. На ребрах SA і SC чотирикутної піраміди $SABCD$ взято відповідно точки P і Q . Побудувати переріз піраміди площиною, паралельною прямим BP і AQ і таку, що проходить через точку K , яка належить ребру а) SA ; б) AD ; в) DC ; г) BC .

19. Бічна поверхня правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ у два рази більша площі її основи. У гранях SAD і SDC проведені медіани AQ і DP . Зобразити і знайти кут між медіанами; побудувати переріз піраміди площиною, яка паралельна цим медіанам і проходить через центр ваги грані SDC .

20. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює із площиною основи кут 45° . Змодельовати і знайти кут, утворений цією діагоналлю з діагоналлю бічної грані, яка її не перетинає; побудувати переріз призми площиною, яка містить центр призми і паралельна обраним учнем діагоналям.

21. Точка $M(M_1)$ належить ребру п'ятикутної піраміди, точки $N(N_1)$ і $P(P_1)$ лежать зовні багатогранника. Змодельовати переріз тіла площиною $\Sigma(MNP)$, скориставшись для цього оптимізаційним методом внутрішнього проєкціювання.

Приклади міркувань у покроковому моделюванні пропозицій

4. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2, а сторона основи 1. Через середину бічного ребра і мимобіжну з ним сторону основи проведено переріз. Знайти відстань від вершини піраміди до площини цього перерізу.

Найперше констатуємо, що зараз сформульовано звичну зі шкільного курсу стереометрії задачу на обчислення, хоч її й можна (умовно) віднести до вищої категорії складності. Неважко здогадатися, що для цілковитого усвідомлення внутрішніх взаємних залежностей у піраміді, які наштовхнули б на правильний шлях до бажаного обчислювального результату, потрібне кваліфіковане виконання перерізу піраміди визначеною площиною, тобто переконливо обґрунтоване графічне розв'язання досить простої позиційної задачі. Отже, **задача на обчислення включає в себе графічну задачу на інциденції**.

Нехай, для визначеності (рис. 1.61), площина Σ перерізу піраміди задана на проєкційному кресленні точкою K , яка ділить відрізок (бічне ребро) SB навпіл, та прямою (ребром в основі) CD . Щоб правильно побудувати фігуру, яка є похідною заданого умовою задачі перерізу, можна запропонувати кілька алгоритмічних схем, які спиратимуться на беззаперечну логіку усталених закономірних міркувань.

З одного боку, скориставшись відомим правилом-орієнтиром дій у три кроки, можна дуже швидко знайти точку $F(F_1)$ перетину висоти піраміди SO з січною площиною і, прийнявши цю точку до уваги, відразу побудувати фігуру перерізу. Отож: 1) вводимо в розгляд площину-посередник Ω , визначену точкою K і прямою SO ; 2) площини Σ і Ω мають задані на кресленні умовою дві спільні точки K і D , отже їх перетином є пряма KD ; 3) інциденцією SO і KD буде точка $F(F_1)$; 4) оскільки точки C , F і ребро SA лежать в одній і тій самій площині осьового перерізу піраміди SAC , а $C \in \Sigma$, то точка L у перетині прямих CF і SA також належить фігурі перерізу. Чотирикутник $LKCD$ – шуканий.

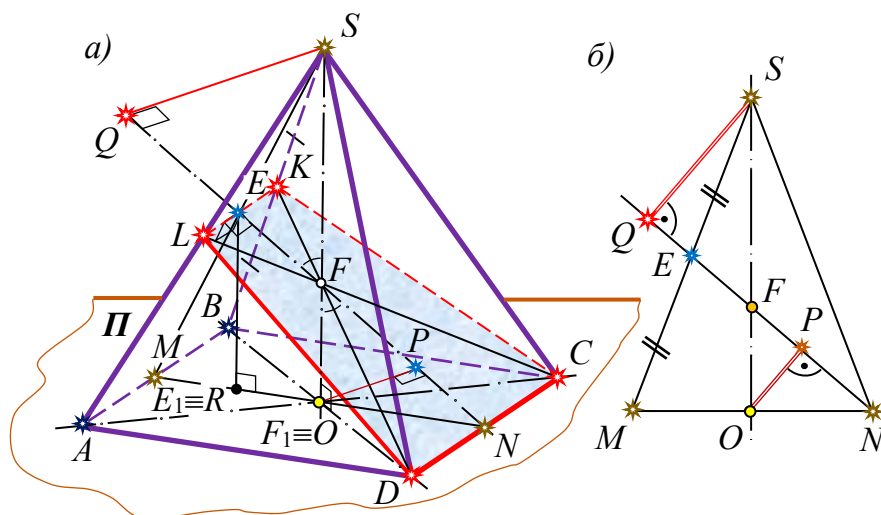


Рис. 1.61

З іншого боку, можна міркувати ще й так¹. Проведемо у грані SAB відрізок KL , паралельний стороні основи AB . Оскільки $AB \parallel CD$, KL теж буде паралельним CD та, із зрозумілих причин, належатиме площині $\Sigma(K, DC)$. Отже, KL є відрізком перетину грані SAB із площиною Σ . Чотирикутник $LKCD$ – рівнобічна трапеція, тому що $LK \parallel DC$ і

¹ Для учнів ЗЗСО це більш звичний спосіб міркування, хоч він й потребує знань, навичок і досвіду в розв'язуванні схожих стереометричних задач.

$LD = KC$ ($\Delta LAD = \Delta KBC$, що очевидно випливає з умови і побудови).

Нарешті, скориставшись задачею 9 із частини I, пункту 1.2, можна просто у три кроки побудувати точку L перетину ребра SA з січною площиною $\Sigma(KDC(BDC))$: 1) $SA \subset \Delta(SAC)$; 2) $FC(F_1C) = \Delta \cap \Sigma$; 3) $L = FC \cap SA$.

Не обов'язково фахово володіти розвиненими уявленнями, щоб на рисунку інтуїтивно підмітити визначальний факт: шуканий відрізок SQ перпендикуляра, опущеного з точки S на площину Σ , розташовується у площині симетрії (SNM) заданих піраміди $SABCD$ та її перерізу $LKCD$; основа Q цього перпендикуляра належить прямій NE , яка є віссю симетрії трапеції. Це, до речі, випливає із взаємної перпендикулярності згаданої площини симетрії (SNM) і площини Σ . Справді, відрізок LK , який належить площині перерізу Σ , перпендикулярний одночасно двом прямим EN і SM , що перетинаються і лежать у площині симетрії піраміди (SNM). Тут $LK \perp EN$ саме тому, що EN – вісь симетрії трапеції $LKCD$, і $LK \perp SM$ тому, що $LK \parallel AB$ за побудовою, а $AB \perp SM$, оскільки SM є апофемою бічної грані SAB правильної чотирикутної піраміди.

Такий детальний аналіз умови задачі і рисунка до неї (через закономірну побудову останнього) дозволяє чітко сформулювати правило-орієнтир наступних аналітичних виражень і числових розрахунків.

Отже, тимчасово призупинивши виконання точних побудов, знайдемо такі внутрішні взаємозв'язки між елементами піраміди у визначеній площині її симетрії (SNM), які призведуть до обчислення довжини відрізка SQ . Нехай точка Q , взята будь-де на промені NE , разом із точкою S і визначають цей відрізок. Помічаємо, що SQ є катетом прямокутного трикутника SQF , гіпотенуза якого SF належить висоті піраміди. Якби довжину відрізка SF вдалося знайти ($SO = 2$ за умовою) і можна було ввести в розгляд ще й деякий метрично розмірний трикутник, подібний трикутнику SQF , то задача була б розв'язана.

У зв'язку з цим привертає до себе увагу прямокутний трикутник FON , в якого один із катетів відомий ($ON = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}$), а інший FO є доповненням відрізка SF до висоти піраміди SO , що принципово важливо. Опустимо з вершини прямого кута O цього трикутника перпендикуляр OP на його гіпотенузу FN . Очевидно, що прямокутні трикутники SFQ і OFP подібні ($\angle SFQ = \angle OFP$, як вертикальні). Складаємо пропорцію: $\frac{SF}{FO} = \frac{SQ}{OP}$. Звідки $SQ = \frac{SF \cdot OP}{FO}$ (*). Чи не можна виразити через відомі елементи піраміди відрізки FO і OP ? Виявляється, що можна, та ще й дуже просто, якщо ортогональним проєкціюванням точку E (знайти основу в тій самій площині (SNM)) на площину основи піраміди у точку $R \equiv E_1$ ($R \in MN$) і розглянути тепер ще дві пари подібних трикутників: $\Delta ERN \sim \Delta FON$ ($\angle ERN = 90^\circ$ за побудовою; $\angle FON = 90^\circ$ за умовою; $\angle N$ – спільний) і $\Delta OPN \sim \Delta ERN$ ($\angle ERN = \angle OPN$ за побудовою; $\angle N$ – спільний). Відповідні пропорції та вирази для шуканих відрізків FO і OP , як належить, матимуть вигляд: $\frac{ER}{FO} = \frac{RN}{ON} \Leftrightarrow FO = \frac{ER \cdot ON}{RN}$; $\frac{ON}{NE} = \frac{OP}{ER} \Leftrightarrow OP = \frac{ON \cdot ER}{NE}$. Тут $ER = \frac{1}{2}SO = 1$ (адже ER , за умовою і побудовою, є середньою лінією трикутника SMO), $ON = \frac{1}{2}$; $RN = RO + ON = \frac{3}{4}MN = \frac{3}{4}$ і $NE = \sqrt{ER^2 + RN^2} = \frac{5}{4}$, що очевидно. Отже $FO = \frac{2}{3}$, $OP = \frac{2}{5}$, а $SF = SO - FO = \frac{4}{3}$. Нарешті, повернувшись до рівності (*), матимемо $SO = \frac{4}{5}$. Задачу розв'язано.

Суттєво бачити, що поданий шлях до числового результату не варто вважати найпростішим, проте – цілком можливим. Пропонуємо читачеві самотійно ще раз

уважно проаналізувати взаємне розташування у трикутнику SMN його кардинально важливих елементів і знайти майже усний, елементарний варіант розв'язання задачі (підказ: скористайтеся відомою властивістю медіан трикутника SNM). Спробуйте також відразу ж (не вникаючи в наступні пояснення за текстом) здогадатися про роль точки P в авторській конструкції. Ще в іншому варіанті дій скористайтеся також подібністю трикутників SQF і NOF (SQF і ERN).

Таким чином, обчислювальний етап задачі за якісно виконаним проєкційним кресленням (рис. 1.61, а) проведено як за кресленням-картиною, оскільки точка Q , яка належить променю NE , вибиралася нами довільно. Все ж таки, це креслення можна легко зробити кресленням-моделлю, адже точка Q може бути побудована, причому, досить просто як графічним, так і графоаналітичним методами.

У першому випадку достатньо виконати таке: 1) побудувати на вільному місці поля зображень виносне креслення – будь-який рівнобедрений трикутник SMN (рис. 1.61, б), основа якого MN у два рази менша його висоти SO ; 2) на бічному ребрі SM знайти точку E таку, що $SE = EM$, і провести промінь NE ; 3) опустити з точки O перпендикуляр OP на промінь NE ; 4) розділити на рисунку 1.61, а відрізок FN точкою P у відношенні, в якому однойменна точка розділяє однойменний відрізок на рисунку 1.61, б; 5) через точку S паралельно OP провести шуканий перпендикуляр SQ .

Алгоритмічна схема

$$SQ = \frac{SF \cdot OP}{FO} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{SF}{FO} = \frac{SQ}{OP} \leftrightarrow \Delta SFQ \sim \Delta OFP \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle SQF = \angle OPF = 90^\circ \text{ (за побудовою),} \\ \angle SFQ = \angle OFP \text{ (як вертикальні);} \end{array} \right\} \\ SF = SO - FO \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} SO = 2, \\ FP \leftrightarrow (1); \end{array} \right\} \\ OP \leftrightarrow (2); FO \leftrightarrow (1). \end{array} \right\}$$

$$(1) \leftrightarrow FO = \frac{ER \cdot ON}{RN} \leftrightarrow \frac{ER}{FO} = \frac{RN}{ON} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta ERN \sim \Delta FON \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle ERN = 90^\circ \\ \text{(за побудовою),} \\ \angle FON = 90^\circ \\ \text{(за умовою),} \\ \angle N - \text{спільний;} \end{array} \right\} \\ ER \leftrightarrow (3); RN \leftrightarrow (4); ON \leftrightarrow (5). \end{array} \right\}$$

$$(2) \leftrightarrow OP = \frac{ON \cdot ER}{NE} \leftrightarrow \frac{ON}{NE} = \frac{OP}{ER} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} NE = \sqrt{ER^2 + RN^2} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ER \leftrightarrow (3), \\ RN \leftrightarrow (4); \end{array} \right\} \\ \Delta OPN \sim \Delta ERN \leftrightarrow \angle ERN = \angle OPN = 90^\circ \\ \text{(за побудовою), } \angle N - \text{спільний;} \\ ON \leftrightarrow (5). \end{array} \right\}$$

$$(3) \leftrightarrow ER = \frac{1}{2}SO \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ER - \text{середня лінія } \Delta SMO \text{ (за побудовою),} \\ SO = 2. \end{array} \right\}$$

$$(4) \leftrightarrow RN = \frac{3}{4}MN \leftrightarrow RN = RO + ON \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} RO = \frac{1}{2}MO \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ER - \text{середня лінія } \Delta SMO, \\ MO = \frac{1}{2}MN \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} MN = AD, \\ AD = 1. \end{array} \right\} \\ ON \leftrightarrow (5). \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$(5) \leftrightarrow ON = \frac{1}{2}MN \leftrightarrow MN = AD \leftrightarrow AD = 1.$$

Суть графоаналітичного методу полягає в тому, що розташування точки P на рисунку можна розрахувати – знайти через елементарні формальні вираження. Отже, з

попереднього відомо, що $ON = \frac{1}{2}$, $FO = \frac{2}{3}$, а $OP = \frac{2}{5}$. Тому матимемо: 1) із прямокутного трикутника OFP : $FP = \sqrt{FO^2 - OP^2} = \frac{8}{15}$; 2) із прямокутного трикутника FON : $FN = \sqrt{FO^2 + ON^2} = \frac{5}{6}$; 3) $PN = FN - FP = \frac{3}{10}$; 4) $FP : PN = 16 : 9$. Залишилося лише графічно (рис. 1.61, а) розділити відрізок FN точкою P у знайденому відношенні та паралельно OP провести шуканий перпендикуляр SQ . Цим, по суті, остаточно завершено пошук розв'язання сформульованої задачі.

Зауважимо таке. Як нам видається, в упередженого читача на самому початку можуть виникнути певні сумніви стосовно алгоритмічних схем (якими, до речі, ми неодноразово завершували теореми і задачі вище). Може закрастися відчуття, що їх складання вже на завершення графічних і аналітичних операцій за текстом і змістом задачі не спроможне суттєво вплинути на її результат і є, в чомусь, надуманим дійством. Для фахівця-геометра вищого ґатунку це, певною мірою, справді так. Окрім того, алгоритмічну схему до теореми або ж задачі не можна вважати обов'язковим атрибутом випробувань учня в курсі геометрії ЗЗСО. Однак на етапі знайомства з новими геометричними фактами та інтенсивного накопичення багажу знань із предмету, цілеспрямованого оволодіння методами аналізу і синтезу в геометрії, формування та розвитку навичок не лише просторового, а й алгоритмічного мислення, ця робота дуже корисна. Вона примушує уявляти задані умовою і шукані геометричні об'єкти та співвідношення між ними в динамічно-конструктивному і аналітичному зв'язку та, одночасно, відокремлено одне від іншого, вирізняти зі всіх можливих взаємних залежностей саме ті, що ведуть до результату і, нарешті, вилучити із вжитку, назавжди відмовитися у процесі навчання від звичних для вчителя висловлювань на кшталт: «елементарно», «тривіально», «очевидно» – всі факти в логічному ланцюжку схеми міркувань суть важливі. Якщо ж мати на увазі якусь певну задачу, то таке деталізоване подання наштовхне виконавця на нові, більш раціональні варіанти її розв'язання, конкретизує кожний крок правила-орієнтиру дій, висвітлить стрижневі моменти уявлюваних геометричних перетворень, навчить чіткості виконання останніх. Адже цим, у певній системі закономірних взаємозв'язків і переходів, ще раз переосмислюється весь цикл побудов і обчислень, що, у свою чергу, виключає можливі помилки, тобто забезпечує гарантовану достовірність кінцевого результату. Здобувши певний досвід, звичайно ж варто працювати над алгоритмічною схемою не на початку і не в кінці задачі, а паралельно, у процесі пошуку шляху її розв'язання.

9. *Січна площина проходить через точку M_1 , яка лежить на продовженні ребра A_1B_1 правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, через вершину B і середину ребра A_1C_1 . Знайти відношення об'ємів тіл, одержаних у результаті перерізу, якщо $A_1M_1 : B_1M_1 = 2 : 1$.*

Відповідно до умови (рис. 1.62), площина перерізу Σ задається трьома неколінеарними точками (трикутником) M_1, B і N_1 , дві з яких (M_1 і N_1) лежать у площині основи призми $A_1B_1C_1$. Звідси відразу ж робимо висновок, що M_1N_1 – слід площини Σ на площині основи; M_1N_1 перетинає сторони трикутника $A_1B_1C_1$ у точках P_1 і N_1 , тому відрізок P_1N_1 є однією зі сторін шуканого багатокутного перерізу. Крім цього, на зображенні видно, що точка B разом із точкою P_1 належать грані BB_1C_1C , а це означає, що BP_1 – ще одна сторона цього ж багатокутника. Тепер уже з рисунка очевидно, що в перерізі заданої призми площиною Σ буде чотирикутник BP_1N_1K , вершина K якого належить ребру AC .

Як побудувати точку K ? Найкоротший шлях до цього лежить через проведення з точки B у площині верхньої основи призми прямої, паралельної до прямої P_1N_1 , адже

піраміди $BM_1B_1P_1$ відомі: $BB_1 = h$, $M_1B_1 = a$, $\angle M_1B_1P_1 = 120^\circ$, що очевидно. З'ясуємо взаємозв'язки між деякими елементами прямокутного трикутника $A_1M_1C_1$, в якому C_1B_1 і M_1N_1 є медіанами (за умовою). Кут C_1 у нього справді прямий (хоч це в нашому випадку і не суттєво) через те, що $\angle M_1A_1C_1 = 60^\circ$ і $A_1C_1 = \frac{1}{2} A_1M_1 = a$. Але ж медіани трикутника, як відомо, точкою перетину розділяються у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини, тому $B_1P_1 = \frac{1}{3} B_1C_1 = \frac{a}{3}$ і $V_{\Pi_2} = \frac{1}{3} S_{M_1B_1P_1} \cdot BB_1 = a^2 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}$. Тепер, повернувшись до рівності (*), одержимо $V_1 = 17a^2h \cdot \frac{\sqrt{3}}{144}$. Отже $V_2 = V - V_1 = 19a^2h \cdot \frac{\sqrt{3}}{144}$. Остаточоно отримаємо: $V_1 : V_2 = 17 : 19 V_1$. Задачу розв'язано.

Алгоритмічна схема

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{17}{19} \leftrightarrow V_2 = V - V_1 \leftrightarrow \begin{cases} V_1 = V_{\Pi} - V_{\Pi_1} - V_{\Pi_2} \leftrightarrow (1); \\ V = S_{A_1B_1C_1} \cdot AA_1 \leftrightarrow (2); \end{cases}$$

$$(1) \leftrightarrow \begin{cases} V_{\Pi} = \frac{1}{3} S_{M_1A_1N} \cdot SA_1 \leftrightarrow \begin{cases} SA_1 = 2h, \\ S_{M_1A_1N} \leftrightarrow (3); \end{cases} \\ V_{\Pi_1} = \frac{1}{3} S_{BAK} \cdot SA \leftrightarrow \begin{cases} SA = h, \\ S_{BAK} \leftrightarrow (4); \end{cases} \\ V_{\Pi_2} = \frac{1}{3} S_{M_1B_1P_1} \cdot BB_1 \leftrightarrow \begin{cases} BB_1 = h, \\ S_{M_1B_1P_1} \leftrightarrow (5). \end{cases} \end{cases}$$

$$(2) \leftrightarrow \begin{cases} AA_1 = h, \\ S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} B_1A_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin \angle A_1 \leftrightarrow \begin{cases} B_1A_1 = a, \\ A_1C_1 = a, \\ \angle A_1 = 60^\circ. \end{cases} \end{cases}$$

$$(3) \leftrightarrow S_{M_1A_1N} = \frac{1}{2} M_1A_1 \cdot A_1N_1 \cdot \sin \angle A_1 \leftrightarrow \begin{cases} M_1A_1 = 2a, \\ A_1N_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 \leftrightarrow A_1C_1 = a, \\ \angle A_1 = 60^\circ. \end{cases}$$

$$(4) \leftrightarrow S_{BAK} = \frac{1}{2} BA \cdot AK \cdot \sin \angle A \leftrightarrow \begin{cases} BA = a, \\ AK = \frac{1}{2} A_1N_1 \leftrightarrow A_1N_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 \leftrightarrow A_1C_1 = a, \\ \angle A = 60^\circ. \end{cases}$$

$$(5) \leftrightarrow S_{M_1B_1P_1} = \frac{1}{2} M_1B_1 \cdot B_1P_1 \cdot \sin \angle M_1B_1P_1 \leftrightarrow \begin{cases} M_1B_1 = a, \\ B_1P_1 = \frac{1}{3} BC \leftrightarrow \begin{cases} P_1 = M_1N_1 \cap C_1B_1 \\ C_1B_1 = a; \end{cases} \\ \angle M_1B_1P_1 = 120^\circ \text{ (теорема} \\ \text{про зовн. кут тр - ка).} \end{cases}$$

Розпочати етап формальних обчислень можна було б також із подання через a і h об'єму V_2 зрізаної піраміди $P_1N_1C_1BKC$. Яких змін зазнає наведений вище алгоритм? Спробуйте самостійно оформити алгоритмічну схему пошуку шляху розв'язання задачі в цьому варіанті дій.

Звичайно, в задачах шкільного курсу стереометрії (на обчислення чи на

доведення) майже відсутні складні позиційні побудови на проєкційних кресленнях, які виконуються спеціально за умовою кожної з них. Однак це в жодному разі не збіднює геометричну сутність і не применшує значущість методу посередників. Навпаки, учень, що кваліфіковано володіє цим методом, обов'язково має стабільні навички мислення просторовими образами, вміє оперувати уявними об'єктами у просторі та на проєкційних кресленнях останніх, обґрунтовувати власноруч виконані графічні операції. Він звикає діяти в режимі **конструктивного** пошуку розв'язання задачі і завжди виявляється спроможним знайти гарантовано правильний її результат.

14. Прямокутна трапеція, в якій більша з паралельних сторін дорівнює 12, а гострий кут α такий, що $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, лежить в основі піраміди. Всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, а площа її бічної поверхні дорівнює 192. Знайти площу паралелограма, що є фігурою перерізу піраміди площиною, проведеною через точку K на ребрі SA , якщо $SK : SA = 1 : 2$.

Помічаємо, що шлях розв'язання задачі на обчислення, до чого варто звикати учню, полягає виключно в чіткому й послідовному розчленуванні цілісної схеми дій на **графічний** та **аналітичний** (обчислювальний) етапи, які принципово відмінні один від іншого за своєю суттю. Причому, строгість першого етапу, його розуміння і обґрунтованість у процесі виконання побудови безпосередньо впливатимуть на правильність і однозначність обчислювальних операцій.

Отже (рис. 1.63), побудуємо спочатку пряму SG перетину однієї пари площин, що визначені на кресленні несуміжними гранями піраміди SBC і SAD (див. вище §1, задача 3). Пряму SG , як уже відмічалось раніше, ще називають слідом площини Ω грані SBC на площині Θ грані SAD , або ж навпаки, – слідом площини Θ грані SAD на площині Ω грані SBC ². Далі будуємо пряму s перетину двох інших площин $\Delta(SAB)$ і $\Gamma(SCD)$, яка інцидентна їх спільній точці S і розташовується у просторі паралельно прямим AB і CD . Адже, згідно з відомим твердженням належності прямої і площини, s належить кожній із площин Δ і Γ . Пряму s теж можна вважати слідом однієї із двох площин названих граней на площині іншої грані. Нарешті, скориставшись щойно побудованими слідами SG і s , за вже відомою схемою здійснюємо накреслення фігури перерізу: 1) через точку K у грані SAD проведемо пряму n , паралельну SG , а у грані SAB – пряму l , паралельну s , і відмітимо на променях SD і SB відповідно точки N і L ; 2) через точку L у грані SBC проведемо пряму m , паралельну SG , а через точку N у грані SCD – пряму f , паралельну s , і відмітимо точки M та F перетину проведених прямих m, f із променем SC . Гарантом правильності графічних операцій може слугувати злиття на зображенні точок M і F , тобто замкненість фігури перерізу – паралелограма $KLMN$, – що раніше було строго доведено. Якщо ж, при цьому, побудований переріз виходить за реальні межі накресленого багатогранника $SABCD$, тобто точки перетину прямих m і n із променями SC і SD (у гранях SBC, SAD) розташовуються нижче точок C і D , то справжніми вершинами шуканої фігури перерізу будуть точки перетину цих самих прямих m і n із відповідними ребрами в основі піраміди: $M = m \cap BC$, $N = n \cap AD$. Етап побудови завершено. Причому, слід січної площини MN на площині основи піраміди з'явився на проєкційному кресленні в останню чергу і, в очікуваній якості, у виконанні перерізу в жодному разі не використовувався. Очевидно, що навіть зумисне бажаючи залучити в побудові перерізу саме цей слід, ми в даному конкретному випадку не зуміли б цього зробити, оскільки оригінальне (особливе) задання січної площини (точкою K на ребрі

² Саме такий стан речей дозволяє умовно віднести розглядувану позиційну задачу до класу задач, в розв'язуванні яких посилаються на метод слідів.

SA і формою шуканого чотирикутника $KLMN$) начисто відкидає таку можливість.

Тепер перейдемося формальними вираженням та обчисленнями, а також, у порядку виконання останніх, потрібними допоміжними побудовами (див. рис. 1.63).

Дано: $SABCD$ – піраміда, $S_6 = 192$, $SK : SA = 1 : 2$ ($K \in SA$);

$ABCD$ – прямокутна трапеція: $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle CBA = \alpha$ ($\sin \alpha = \frac{3}{5}$), $AB = 12$; SO – висота піраміди. Бічні грані рівнонахилені до площини основи, тобто т. O – центр кола, вписаного у трапецію $ABCD$.

Знайти: S (площу паралелограма перерізу $KLMN$).

Обчислювати площу паралелограма $KLMN$ будемо за найбільш уживаною в геометрії формулою $S = ah$, де за основу a фігури перерізу виберемо, наприклад, відрізок KL , розташований паралельно стороні AB трапеції $ABCD$. Відрізок KL можна легко обрахувати, якщо послатися на подібність трикутників SKL і SAB ($KL \parallel AB$ за побудовою). З подібності маємо: $\frac{KL}{AB} = \frac{SK}{SA} \Rightarrow KL = 6$. Із тим, щоб геометрично визначитися з відрізком, який вдало відображав би на кресленні-моделі висоту h паралелограма, проаналізуємо взаємне розташування в піраміді його сторони NM і площини осьового перерізу $\Lambda(SPH)$, де PH – висота трапеції $ABCD$, проведена через задану точку O . Ці два геометричні об'єкти взаємно перпендикулярні, оскільки $NM \parallel AB$, а $AB \perp SP$ і $AB \perp PH$, адже SP у конфігурації виконує роль висоти бічної грані SAB заданої наполовину правильної піраміди, а PO є її ортогональною проекцією на площину основи (висоти всіх бічних граней піраміди рівні завдяки рівнонахиленості останніх до площини основи). Тому $NM \perp RE$, де $R = SP \cap LK$, $E = PH \cap NM$, а $RE = h$ – відрізок, що зображає на проєкційному рисунку оригінальну висоту паралелограма $KLMN$.

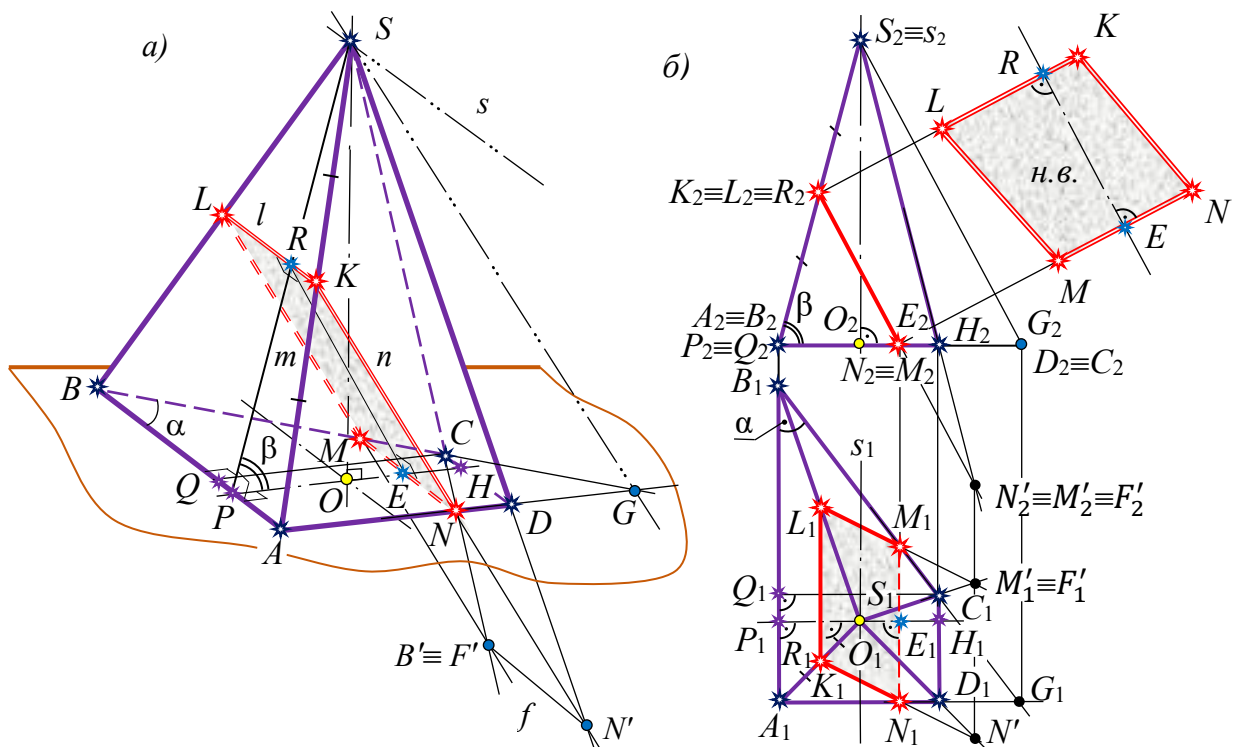


Рис. 1.63

Отже, задача зводиться до відшукування довжини відрізка RE , який, що дуже добре видно на рисунку, виявився розташованим у площині Λ однією із сторін трикутника RPE . Щоб метрично розв'язати цей трикутник, визначимося спочатку з розмірами трапеції у площині основи піраміди, а також із висотою бічної грані SP .

Із прямокутного трикутника CQB (CQ – висота трапеції) безпосередньо випливає $QC = AD = BC \cdot \sin \alpha = \frac{3}{5}BC$; $QB = BC \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}BC$. Окрім цього: $DC = AB - QB = 12 - \frac{4}{5}DC$. Загальновідомо, що в чотирикутнику, описаному навколо кола, суми протилежних сторін рівні. Точка O – центр кола, вписаного у трапецію, тому $AB + DC = AD + BC$. Підстановкою знаходимо: $BC = 10$, $AD = 6$, $DC = 4$.

Для відшукування довжини висоти SP , скористаємося формулою бічної поверхні піраміди: $S_6 = 192 = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) \cdot SP \Rightarrow SP = 12$.

Із подібності трикутників SKL і SAB також одержимо: $\frac{SR}{RP} = \frac{1}{1} \Rightarrow RP = 6$. До речі, оскільки коло з центром O є вписаним у прямокутну трапецію $ABCD$, а висота трапеції $AD = 6$, то радіус кола $r = PO = \frac{1}{2}AD = 3$. Тепер, у метрично розмірному прямокутному трикутнику SOR , знаходимо ще один визначальний параметр, який нас цікавить: $\cos \angle RPE = \frac{PO}{SP} = \frac{1}{4}$.

Залишилося обчислити довжину відрізка PE . Якраз на цьому етапі роботи доречно відмітити, що коли визначальні, закономірні представлення для попередніх обчислень ми, певною мірою, уможлядно черпали з рисунка 1.63, а, то зараз ліпше (хоч і не обов'язково) звернутися до комплексного креслення піраміди та її перерізу, виконаного за методом Г. Монжа (рис. 1.63, б). Суттєво, що саме на такому – природно ненаочному, допоміжному кресленні взаємне розташування певних панівних (активних) у розрахунках елементів зримо сприймається найкраще, найбільш наочно! Отож (див. фронтальну і горизонтальну проєкції), $PE = AN$, а AN є стороною трикутника ANK , подібного трикутнику AGS ($KN \parallel GS$ за побудовою), і $AN : NG = 1 : 1$ ($AN = NG$). У свою чергу, трикутник AGB подібний трикутнику QCB ($QC \parallel AG$), що дає можливість скласти ще одну пропорцію: $\frac{AG}{QC} = \frac{AB}{QB}$. Звідси одержимо $AG = 9$. Якщо ще й врахувати, що $AG = 2AN$, то матимемо $PE = AN = \frac{9}{2}$. Нарешті, щоб остаточно обчислити висоту RE паралелограма в тепер уже метрично розмірному трикутнику PRE , скористаємося теоремою косинусів: $RE^2 = RP^2 + PE^2 - 2RP \cdot PE \cdot \cos \beta = \frac{19 \cdot 9}{4}$. Отже, $RE = \frac{3}{2}\sqrt{19}$. Остаточно отримаємо: $S = 9\sqrt{19}$. Задачу розв'язано.

На самому початку формально-обчислювальних випробовувань важко було б не помітити того факту, що KL , згідно з умовою ($SK : KA = 1 : 1$), є середньою лінією трикутника SAB . Урахування цих реалій призведе до спрощення міркувань, а отже до оптимізації аналітичних виражень у запропонованій схемі дій. Проте первісно ми мали на увазі подати алгоритм розв'язання задачі в найбільш загальному вигляді, а не для деякого частинного випадку розташування точки K на ребрі SA .

У зв'язку зі сказаним, пропонуємо читачеві урізноманітнити етап алгебричних виражень через самостійне обґрунтування ще одного підходу до відшукування двогранного кута в основі заданої наполовину правильної піраміди (вивести формулу для $\cos \angle RPE$), спираючись при цьому на відому теорему про площу ортогональної проєкції багатокутника.

Як уже відмічалось, елементарний аналіз умови задачі, рисунка до неї свідчать, що тип паралелограма $KLMN$, площу якого потрібно обчислити, прямо залежить від розташування точки K на ребрі SA . У розглядуваному випадку серед усіх можливих відношень $SK : SA$ було б доречно виділити одне-єдине, яке умовно можна назвати «граничним». Не секрет, що цій останній ситуації має відповідати переріз, сторона MN

якого збігається з ребром основи піраміди CD . Знайдіть самостійно $SK_0 : SA$ у такому граничному розташуванні фігури перерізу. До того ж, розв'яжіть задачу та, в якості тренувальної вправи, складіть алгоритмічну схему пошуку шляху її діяльнісної реалізації, якщо в умові $SK : SA = 1 : 4$. З урахуванням знайденого відношення $SK_0 : SA$, виконайте спрощення однотипні з уже поданими вище обчисленнями площі паралелограма $KLMN$; нехай тут, приміром, $SK : SA = 3 : 4$.



СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ



1. **Боравльов А.П., Ленчук І.Г.** Аналіз у розв'язуванні задач на побудову : навч. посіб. К. : Вища школа, 2002. 192 с.
2. **Бурда М.І.** Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах : навч.-метод. посіб. К. : Радянська школа, 1986. 112 с.
3. **Ванін В.В, Перевертун В.В., Надкернична Т.М., Власюк Г.Г.** Інженерна графіка. К. : Видавнича група ВНУ, 2009. 400 с.
4. **Жовнір Я.М.** Позиційні задачі в стереометрії : посіб. для вчителя. К. : Освіта, 1991. 96 с.
5. **Ленчук І.Г.** Системний підхід у навчанні планіметричним побудовам : навч.-метод. посіб. Житомир: ЖДУ імені І. Франка, 2006. 154 с.
6. **Ленчук І.Г.** Конструктивна стереометрія в задачах : навч. посіб. Житомир: ЖДУ імені І. Франка, 2010. 367 с.
7. Методика викладання стереометрії / за ред. **О.М. Астряба і О.С. Дубинчук.** К. : Радянська школа, 1956. 280 с.
8. **Михайленко В.Є., Тесленко І.Ф.** Зв'язки у викладанні геометрії і креслення у середній школі : навч.-метод. посіб. К. : Радянська школа. 1965. 85 с.
9. **Погорєлов О.В.** Геометрія : Планіметрія : підручник для 7-9 класів середньої школи. К. : Освіта, 1998. 224 с.
10. **Погорєлов О.В.** Геометрія : Стереометрія : підручник для 10-11 класів середньої школи. К. : Освіта, 2002. 129 с.
11. **Прокопович Т.** Філософія в Києво-Могилянській академії : журн. Філософська думка. 1970. №5. С. 98-110.
12. **Слепкань З.І.** Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.
13. **Скрипченко О.В., Долинська Л.В., Огороднійчук З.В., Лисянська Т.М.** та ін. Загальна психологія : підручник для студентів. К. : Либідь, 2005. С. 464.
14. **Тесленко І.Ф., Боровик В.Н., Матюшко І.С., Рафаловський Е.В.** Геометрія : практикум з розв'язування задач : навч. посіб. К. : Вища школа, 1985. 184 с.

