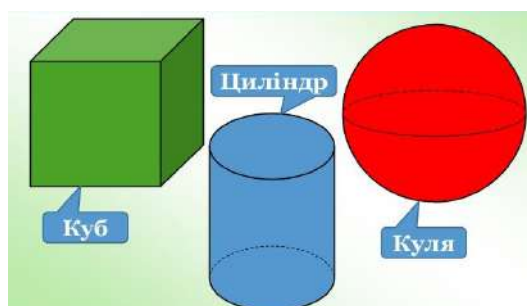
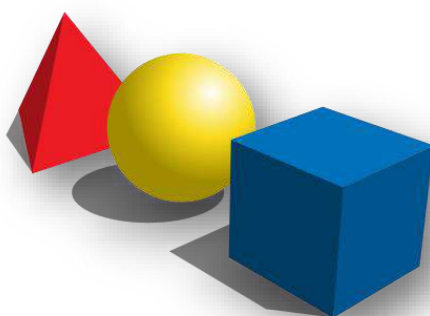


Житомирський державний університет імені Івана Франка
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Іван Ленчук, Микола Працьовитий

МЕТРИЧНА СТЕРЕОМЕТРІЯ, КОНСТРУКТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОПОЗИЦІЙ

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти



Житомир, 2026

УДК 514.14
ББК 22.151я7

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 11 від 29 травня 2026 року)

Рецензенти:

Доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики Українського державного університету імені М. П. Драгоманова

Олександр Школьній

Доктор педагогічних наук, професор кафедри алгебри та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Ольга Матяш

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка

Василь Михайленко

Іван Ленчук, Микола Працьовитий. Метрична стереометрія, конструктивне моделювання пропозицій: Навчальний посібник для здобувачів вищої освіти. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2026. 176 с., 112 рис.

Навчальний посібник уміщує теоретичні відомості за обраною темою, стислу інформацію стосовно підходів до розв'язування базових задач, систему вправ для самостійного розв'язання та добірку задач для практичних занять із таких підтем: «Метрична визначеність повних зображень геометрії на площині та у просторі», «Побудова відрізків, що задані формулами», «Метричні задачі у площині загального розташування, метод суміщення», «Роль і місце конструктивного компоненту в задачах стереометрії», «Дві реалізації метричних задач, метод внутрішнього проєкціювання на площину і на дві площини», «Побудова прямих і площин, перпендикулярних прямій та площині на одно-картинних рисунках». Наявні також контрольні питання, тренувальні вправи, задачі для самостійної роботи, приклади покрокових міркувань у задачах.

*Для студентів фізико-математичних факультетів закладів вищої освіти,
для викладачів конструктивної геометрії*

© Ленчук Іван, Працьовитий Микола, 2026
© Житомирський державний університет
імені Івана Франка, 2026

ISBN 978-966-485-332-0

ЗМІСТ

РОЗДІЛ I	4
Передмова	4
§1. Метрична визначеність повних зображень геометрії	5
1.1. Зауваження із приводу побудови відрізка, заданого формулою	7
1.2. Метрична визначеність зображень плоских фігур	11
1.3. Метрична визначеність зображень просторових фігур	14
§ 2. Метричні задачі у площині загального розташування. Метод суміщення	16
§3. Роль і місце конструктивного компоненту в метричних задачах стереометрії	31
3.1. Метричні задачі	31
3.2. Метричні задачі з мимобіжними прямими	53
Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації	66
Правило-орієнтир розв'язування метричної задачі	69
Контрольні запитання	69
Тренувальні вправи і завдання	71
Приклади міркувань у покроковому моделюванні задач	72
РОЗДІЛ II	82
Внутрішнє проєкціювання як метод метричної геометрії	82
§1. Дві реалізації метричних задач стереометрії. Метод внутрішнього проєкціювання на одну площину проєкцій	82
§2. Метод внутрішнього ортогонального проєкціювання на дві площини проєкцій	108
2.1. Побудова прямих і площин, перпендикулярних заданій прямій	111
2.2. Побудова прямих і площин, перпендикулярних заданій площині	121
Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації	133
Контрольні запитання	136
Тренувальні вправи і завдання	137
Приклади міркувань у покроковому моделюванні задач	140



*«Уява виявляється однією з тих
здібностей або властивостей, за допомогою
яких ми обговорюємо,
добиваємося істини або ж помиляємося»
Аристотель*

ПЕРЕДМОВА

Як свідчить історія, геометрія має емпіричне походження. Перші геометричні відомості були здобуті цивілізаціями Стародавнього Сходу – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку із землемірними та іригаційними роботами. Пам'ятники стародавньої культури Єгипту, що дійшли до нас (напр., папірус Ейзенлора), яскраво ілюструють практичний характер усіх відомих у період становлення найпершої з наук геометричних фактів. Геометрія, за суттю і змістом, уявляла собою добірку частинних розв'язків окремих **метричних** задач. Жодних доведень, а ні посилань чи, навіть, натяків на них історики ніде не знаходять. Так, у II тисячоріччі до н. е. єгиптяни вміли точно обчислювати площу трикутника і об'єм чотирикутної зрізаної піраміди; площу круга з радіусом R вони вираховували за формулою $S = \left(\frac{16}{9}R\right)^2$, що встановлює для π досить точне (як на той час) значення: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16 \dots$. У Вавилоні, як і Єгипті, геометрія розвивалася на основі життєвих задач вимірювання. Вже в тому ж II тисячоріччі вавилоняни знали так звану теорему Піфагора.

Отже, питання **метрики** різноманітних геометричних фігур із давніх-давен хвилювали людство. В них бере свій початок ця диво-наука, ними ж вона перенасичена і в сучасному трактуванні.

Щоб чітко визначитися із предметом досліджень у цьому розділі, вникнути в суть проблеми, виділити головне і не порушити вже усталеного стилю, логіки наочно-образної системи міркувань, не завадить ще раз наголосити на деяких положеннях, що є вихідними. До діла нагадаємо, що в курсі стереометрії ЗЗСО, з метою виконання на площині дошки чи зошита правильних і (в переважній більшості) наочних креслень до теорем і задач, користуються методом паралельних проєкцій. При цьому зображенням геометричної фігури Φ' на вибраній картинній площині називається плоска фігура Φ , подібна до паралельної проєкції фігури Φ' .

Вводячи у звичний ужиток фахове поняття «позиційно визначене (повне) зображення», динамікою строго узгоджених геометричних дій через уявлення представлено всі фактори, що супроводжують це важливе означення: найпростіші геометричні об'єкти (точки, прямі і площини), пов'язані між собою **внутрішнім** центральним або паралельним проєкціюванням на основну площину (в ролі останньої може вибиратися будь-яка із площин повного зображення), а

також апарат *зовнішнього* (виключно паралельного) проєкціювання пов'язуючої стереометричної фігури на картинну площину. На завершення, при потребі, така паралельна проєкція підлягає ще й перетворенню подібності.

Повнота зображення передбачає можливість орієнтації в реальному взаємному розташуванні заданих проєкційним кресленням уявлених геометричних фігур, а також є критерієм для відшукування яких завгодно їх інцидентцій. Зокрема, методом посередників обґрунтовано просто будуються точка перетину прямої із площиною та лінія перетину двох площин (перша і друга основні позиційні задачі).

§1. Метрична визначеність повних зображень геометрії

Проте, тільки позиційної повноти зображення в загальному випадку виявляється недостатньо для вірогідно можливого вирішення на ньому **метричних задач**, пов'язаних із фактичним проведенням прямих і площин *установлених напрямів чи вимірюванням замовлених параметрів заданих геометричних фігур та їх елементів*. Наприклад, будь-як накреслений трикутник завжди можна розглядати як зображення довільного трикутника якої завгодно форми. *Говорять, що дві фігури мають однакову форму, якщо вони подібні*. Отже, якщо задано лише зображення трикутника і немає жодної іншої інформації про цю фігуру, то з урахуванням факту, що поділ відрізка в даному відношенні є інваріант паралельного проєкціювання, можна без особливих зусиль встановити (провести) на кресленні його медіану. І неможливо побудувати зображення бісектриси чи висоти трикутника, оскільки форма фігури-оригіналу невідома. Таким чином, повнота креслення має на увазі цілковиту визначеність лише в таких взаємних залежностях між окремими елементами геометричної фігури, які обґрунтовуються їх афінними властивостями, сама ж фігура в оригіналі залишається при цьому невизначеною. Що ж потрібно додатково зробити, щоб настільки просто змодельований зображенням трикутник став ще й метрично зрозумілим? Гіпотетично можна висловити думку, що напевно потрібно доповнити зображення деякими метричними умовами – затратити параметри або, що однаково, обумовити його констатацією певних метричних залежностей, властивих трикутнику-оригіналу, тобто поліпшити кількісно і якісно поінформованість про трикутник. Очевидно, що так можна, врешті-решт, визначитися щонайменше із формою вихідної фігури. Природно, що ці метричні умови, які не є інваріантами паралельних проєкцій, на самих зображеннях не розпізнаються. Їх або вказують у вербально озвученому тексті задачі, або ж супроводжують зображення лаконічними записами з використанням буквених позначень і відповідної символіки.

Однак абстрагуємося на певний час від зображення трикутника і уявимо собі, що ми, разом із попарно **не** інцидентними точкою A' , прямою p' , площиною Σ' і заданим багатогранником, який пов'язує їх внутрішнім паралельним проєкціюванням (до речі, й у випадку піраміди цей напрям можна вибрати паралельним, наприклад, до одного з бічних ребер чи до висоти піраміди), знаходимося в ортогональному триграннику (клас, аудиторія), фронтальна

площина проєкцій якого (площина дошки) є картинною. Тут, навіть при наявності на дошці повного зображення пов'язуючої стереометричної фігури (рис. 1.1, а), все ще залишаються невизначеними в прямокутній декартовій системі координат $O'x'y'z'$ напрями зовнішнього a та внутрішнього a' проєкціювання і положення площини основи Σ' , а отже, буде невизначеним й сам багатогранник.

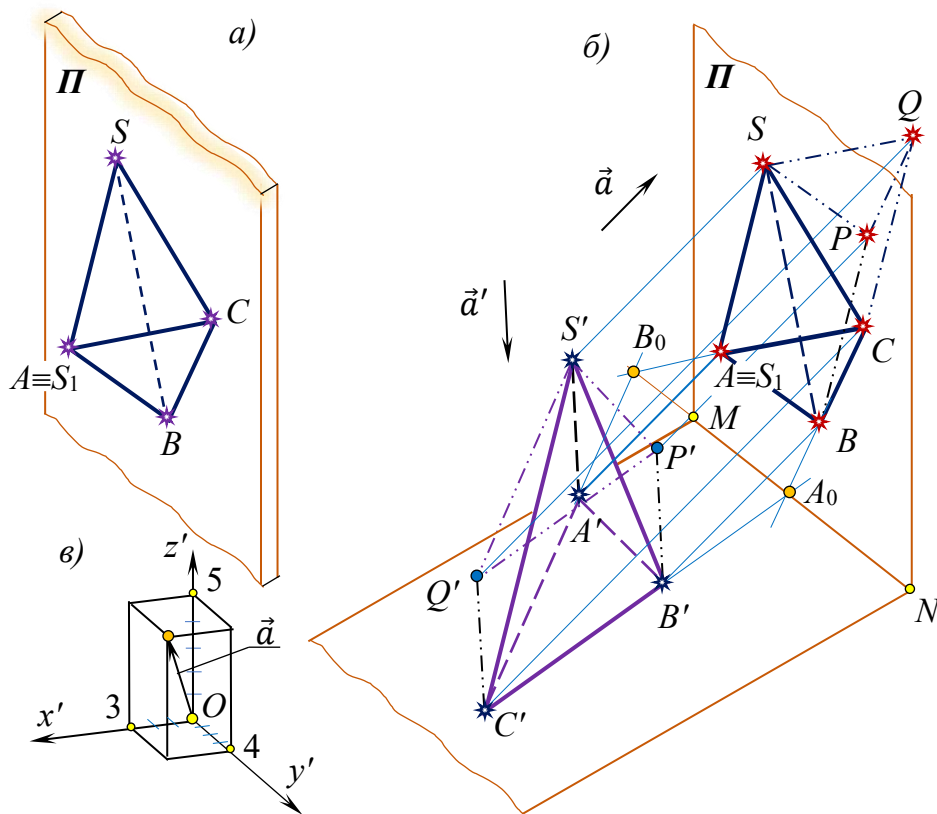


Рис. 1.1

З іншого боку, знаючи (власноруч задавши) напрями a і a' та розташування основної площини Σ' відносно площини зображень Π , ми цілком визначимо всі елементи оригіналу як такі, що віднесені до пари площин Σ' і Π .

Справді, нехай (рис. 1.1, б) зазначені умовності на кресленні виконуються. Нехай також, для визначеності, $a' \parallel S'A'$, а площина основи задається точкою $A'(A)$ і слідом MN на площині зображень Π . Тоді між площинами Σ' і Π буде встановлено перспективно-афінну відповідність, що задана віссю MN і парою відповідних точок A' і A . Тепер, за вже відомими правилами цієї справді універсальної взаємно однозначної відповідності і, звичайно, з урахуванням заданих напрямів внутрішнього і зовнішнього проєкціювання, легко можна побудувати основу оригінальної піраміди (призми) $A'B'C'$ і її вершину S' (верхню основу $S'P'Q'$).

Оскільки при паралельному перенесенні площин Σ' і Π (за незмінності зображення та напрямів a' і a) оригінал-піраміда зазнає перетворення гомотетії з центром у точці S' , а оригінал-призма залишається тією ж (верхня основа вибрана довільно), то домовимося визначати положення вказаних площин лише до гомотетії з центром S' . При цьому форма оригіналу цілком визначається, а сам оригінал визначається з точністю до подібності.

Передаємо своїми словами те, що з цього приводу писав один із знаних геометрів: Схожі зображення, оригінал яких визначений до подібності, називаються **метрично визначеними**. Всі побудови, які виконуються на повному, метрично визначеному зображенні, вже не можуть містити жодних елементів довільності, адже їм відповідають цілком визначені побудови в оригіналі. І навпаки, повне зображення до його метричного визначення допускає деяку довільність щодо метричних операцій, які виконуються на цьому зображенні. Така довільність залежить від того запасу вільних параметрів, задавання яких робить зображення метрично визначеним. Підрахунок цього запасу параметрів називають **параметражем** зображення.

Параметраж повного зображення в нашому трактуванні може бути проведений таким прийомом. Щоб однозначно визначитися у просторі (в системі координат $O'x'y'z'$) із напрямками a' і a паралельного проєкціювання, потрібно затратити по два параметри на кожний із них; наприклад, задати відношення координат: $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ напрямного вектора $\vec{a} (\vec{a}')$, див. рис. 1.1, в, на якому $\vec{a}(3t, 4t, 5t)$. Для встановлення положення площини основи Σ' (до її паралельного перенесення) досить задати один параметр; наприклад, кут нахилу площини Σ' до площини Π . Отже, запас параметрів повного зображення виражається числом 5. Будемо говорити, що **параметричне число** повного зображення $p = 5$.

Щодо розуміння суті питання, то тут потрібно пам'ятати наступне: якщо в умові деякі параметри зображення вже задані, що можна зробити за допомогою накладання їх на оригінал (просторову фігуру), то запас вільних, невикористаних параметрів виражається різницею параметричного числа p і тих параметрів, про які відомо з умови. *Зображення стає метрично визначеним, якщо ця різниця перетворюється в нуль.*

Креслення, які супроводжуються метричними умовами, накладеними на оригінал, називають **умовними**.

Таким чином, зображення Φ фігури Φ' називається **метрично визначеним** або **умовним**, якщо за ним можна відновити (реконструювати, змодельовати) фігуру Φ' із точністю до подібності.

1.1. Зауваження із приводу побудови відрізка, заданого формулою

Якщо a, b, c, \dots суть задані (накреслені) відрізки, то, як відомо [1, 2], за допомогою традиційних креслярських інструментів, тобто проводячи лише прямі лінії і кола, можна легко побудувати ще й такі відрізки (x): 1) $x = a + b$; 2) $x = a + b$ ($a > b$); 3) $x = \frac{m}{n}a$ (де m і n – дані натуральні числа); 4) $x = \frac{ab}{c}$; 5) $x = \sqrt{ab}$; 6) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; 7) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$). Комбінуючи ці **основні** операції, повторюючи їх, можна побудувати відрізки, які в результаті виражень мають складніше формальне представлення. Загалом же, піддається побудові всякий відрізок, що виражається формулою через дані відрізки за допомогою скінченного числа раціональних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і добування квадратних коренів. На цьому твердженні ґрунтується надзвичайно вживаний у практиці розв'язування конструктивних задач

планіметрії метод **алгебричного** аналізу (алгебричний метод).

У стереометричних задачах на побудову теж досить часто трапляються випадки, коли для відшукування того чи іншого елемента конструкції слід скористатися методом, в якому посилаються на відомі графічні перетворення відрізків, описаних формулами. До речі, завдячуючи властивості інваріантності відношення відрізків на прямій (чи на паралельних прямих), у методі паралельних проєкцій має надто широке застосування узагальнена теорема Фалеса, яка носить назву теореми про пропорційні відрізки ([9], п. 60, теорема 6.9). Цим твердженням обґрунтовується побудова четвертого пропорційного відрізка до трьох заданих ($x = \frac{ab}{c}$).

Щойно вище ми дійшли висновку, що гарантувати метричну визначеність бінарних зображень геометричних фігур, виконаних методом паралельних проєкцій, потрібно виключно шляхом затрати на них чітко визначеного числа метричних параметрів. Зокрема й у формі кількісних співвідношень між визначальними елементами фігури-оригіналу. При цьому інші прямолінійні компоненти останньої можна подати, за потреби, в алгебричних виразах, а отже, описати через уже задані елементи у вигляді достовірних залежностей і, частково, у квадратних радикалах.

Оскільки алгебричний метод до дрібниць вивчений і детально описаний у навчальній літературі, не варто торкатися навіть найпростіших його побудов. Однак на деяких суто геометричних фактах, які мають пряме відношення до сформульованої теми досліджень і фігурують більш-менш часто у стереометричних побудовах, зупинитися хоча б коротко конче потрібно.

Загальновідомі прийоми побудови за накресленим відрізком a відрізка $x = a\sqrt{n}$, де $n = 2, 3, 4, \dots$ (див., напр., [1]).

Для відшукування графоаналітичними методами істинної форми плоскої фігури, що практикується повсюдно у вигляді окремої сполучної ланки іншої, більш складної метричної задачі стереометрії, корисно також уміти виконувати циркулем та лінійкою обернену операцію: володіти алгоритмами побудов за заданим відрізком $AB = a\sqrt{n}$ відрізка a (рис. 1.2, *а-ж*). 1) $AB = a\sqrt{2}$. Півколо, проведене на відрізок AB , як на діаметрі, в перетині з серединним перпендикуляром цього відрізка висікає таку точку X , що $AX = a$. 2) $AB = a\sqrt{3}$. Катет AX прямокутного трикутника ABX , у якого $AB = a\sqrt{3}$ і $\angle ABX = 30^\circ$, що відкладається елементарно у вибрану півплощину, буде шуканим відрізком a . 3) $AB = a\sqrt{5}$. Спочатку слід побудувати будь-який прямокутний трикутник XZ_0Y_0 за умови, що один з його катетів у два рази більший іншого. Далі, за відомою гіпотенузою $YZ = AB$, – йому подібний трикутник XYZ . Катет XU останнього прямокутного трикутника й буде зображати шуканий відрізок a . 4) $AB = a\sqrt{6} = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, де $b = a\sqrt{3}$. Отже, послідовно реалізовані перша та друга побудови приводять до результату. 5) $AB = a\sqrt{7}$. Тут формується ланцюжок із елементарних операцій, що включає побудови: а) будь-якого прямокутного трикутника XKM із гострим кутом у 30° ; б) на базі цього трикутника – прямокутного трикутника XKL , в якого катет $KL = 2KM$; в) ще

одного прямокутного трикутника XYZ , подібного XKL і такого, в якого гіпотенуза $XZ = AB$. Половина катета YZ – шуканий відрізок. 6) $AB = a\sqrt{8} = 2a\sqrt{2}$. Перша побудова на відрізку $AO = \frac{AB}{2}$ дасть бажаний результат. 7) $AB = a\sqrt{8} = a\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = b\sqrt{2}$, де $b = a\sqrt{5}$. Відрізок a зручно знайти через послідовне виконання першої та третьої побудов.

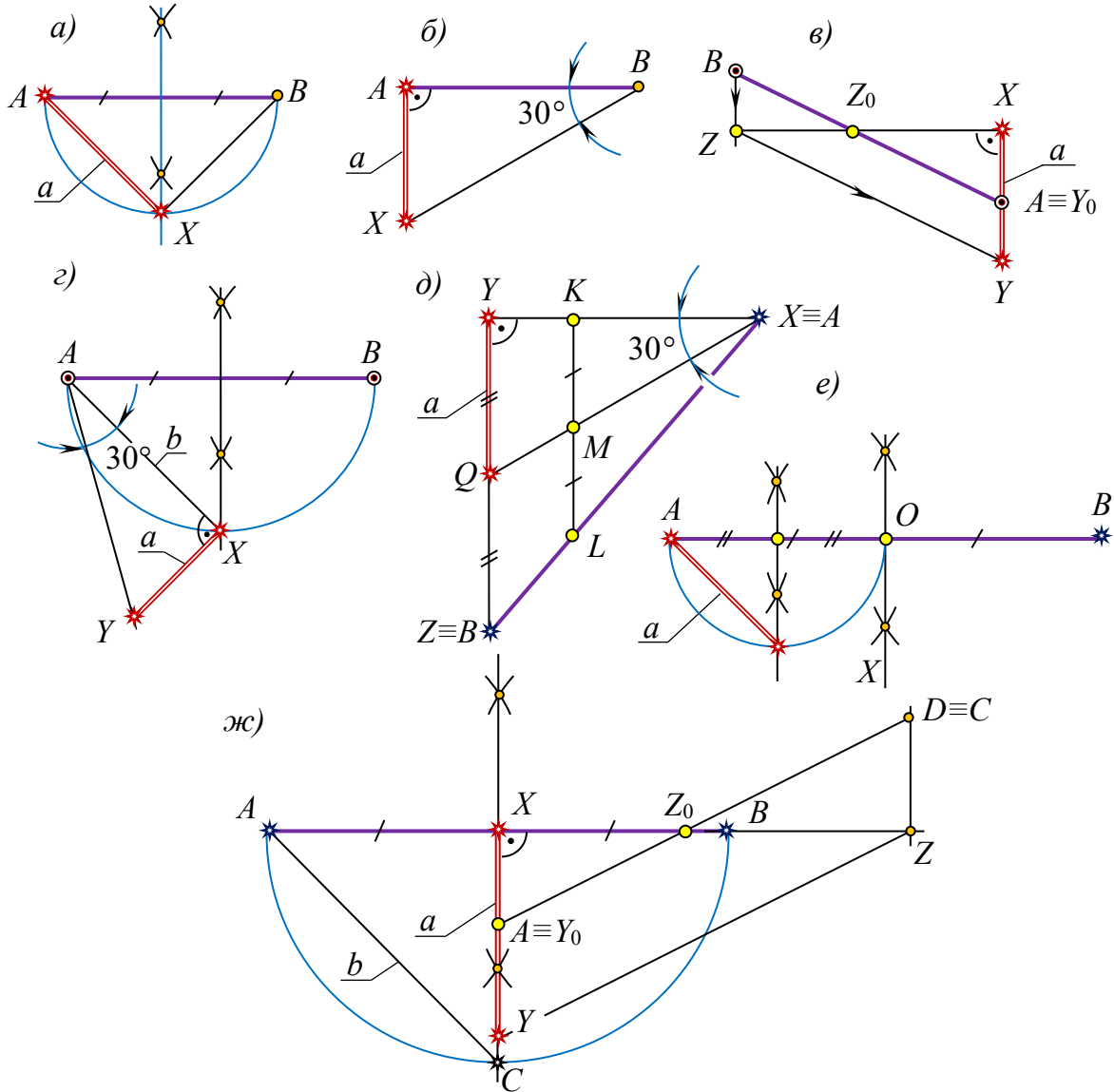


Рис. 1.2

Аналогічно можна змоделювати прості правила-орієнтири рисункових дій циркулем і лінійкою для наступних натуральних значень n . Однак у деяких випадках варто віддати перевагу універсальному методу, в основу якого покладено відомі побудови відрізка, що є середнім геометричним до двох даних відрізків. Зокрема, такий шлях виконання графічних операцій конструктивно більш ефективний за обставин дещо складніших представлень відрізків числовими виразами в квадратних радикалах.

Нехай, наприклад, $AB = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Для відшукування відрізка a спочатку варто побудувати відрізок b такий, що $AB = b\sqrt{21}$, а потім взяти 6 (шість) таких відрізків. Тут (рис. 1.3, а) середнім геометричним є катет MP прямокутного

трикутника MPN із гіпотенузою у 21 одиничний відрізок, а $MQ = AB$ на промені MP . Очевидно, що $\triangle MPL \sim \triangle MQX$. Звідси, $\frac{MX}{ML} = \frac{MQ}{MP}$. Однак, $ML = 1$, $MP = \sqrt{21}$. Тому $MX = \frac{AB}{\sqrt{21}} = b$.

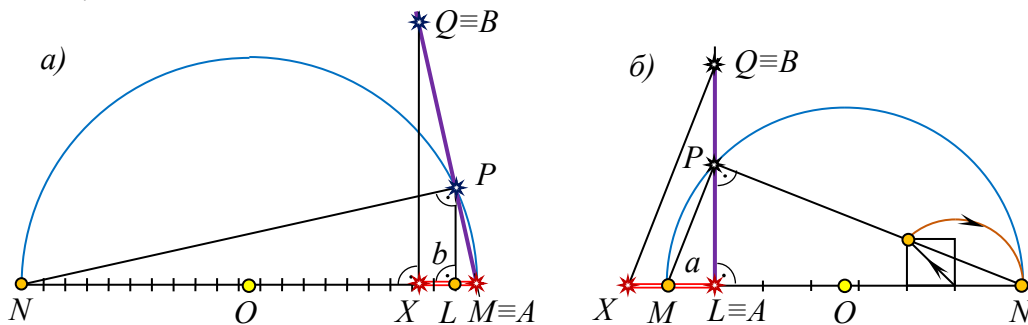


Рис. 1.3

Нехай тепер $AB = a\sqrt{5 + \sqrt{2}}$. У цьому випадку (рис. 1.3, б) середнім геометричним є перпендикуляр PL , опущений з вершини прямого кута (P) прямокутного трикутника MPN на гіпотенузу $MN = 1 + 5 + \sqrt{2}$ одиничних відрізків, а $LQ = AB$ на промені LP . Очевидно, що $\triangle MPL \sim \triangle XQL$. Звідси маємо, що $\frac{XL}{ML} = \frac{LQ}{LP}$. Але, $ML = 1$, а $LP = \sqrt{5 + \sqrt{2}}$. Тому $XL = \frac{AB}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}} = a$.

Цим, власне, можна завершувати зауваження із зазначеного приводу. Хотілося б лише бути переконаним, що читач оцінить і знайде належне місце запропонованому методу побудов в останніх двох прикладах. Ним справді доцільно користуватися в більшості випадків, однак його не завжди резонно визнавати найпростішим у розумінні логіки міркувань, умовиводів і графічного представлення. Тому, потрапивши в аналогічну ситуацію, не варто поспішати. Потрібно попередньо зримо провести елементарний аналіз умови. І якщо тільки є можливість, удається число під коренем розкласти у вигляді суми чи різниці квадратів двох натуральних чисел, то це означає, що корінь можна побудувати як гіпотенузу чи катет прямокутного трикутника, що, без сумніву, значно простіше.

Отже, повернемося трохи назад і порівняємо: $\sqrt{21} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{5^2 - 2^2}$.

За цих умов, $AB = \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{ab}{6}$ ($b = \sqrt{21}$) і побудова відрізка a за відомими відрізками AB та b стає очевидною (рис. 1.4, а). Привертаємо увагу до факту, що не обов'язково, щоб обидва доданки під коренем були квадратами виключно натуральних чисел. Не набагато складнішим варіантом умови є той, коли один із них буде просто двійкою, трійкою тощо. Наприклад, нехай $AB = a \frac{2\sqrt{11}}{7}$. Або, що рівноцінно, $AB = \frac{ab}{3,5}$, де $b = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}$. Погляньте на рисунок 1.4, б. Як неважко переконатися, останній за складністю рисункових дій не перевершує попереднього.

Навіть поверхневий аналіз наведених побудов свідчить, що реалізовані на рисунках 1.3, 1.4 циркулем та лінійкою операції, подані дещо в іншій

послідовності, призведуть до вирішення й прямої задачі на побудову відрізка $x = a\sqrt{n}$ за відомим відрізком a . Суттєво, що така однотипність графічних реалізацій для різних натуральних n у прямій і оберненій задачах, як окремий геометричний факт, цілком уписується в постановку і вирішення досить злободенної проблеми системної комп'ютеризації окремих математичних курсів і, найперше, геометрії, а у глобальному масштабі – й педагогічно виваженого впровадження сучасних ІКТ і ППЗ навчання в ЗЗСО та ЗВО, що на якісно вищій рівень поставить наріжні питання організації ефективної **самостійної роботи** учнів, самоконтролю їх знань, умінь і навичок.

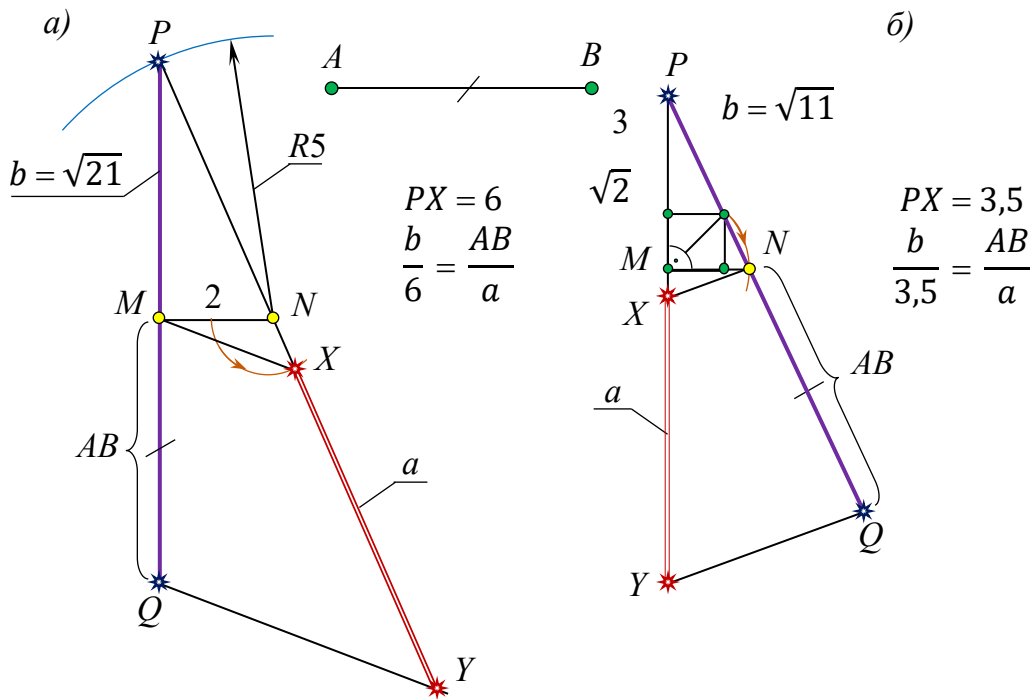


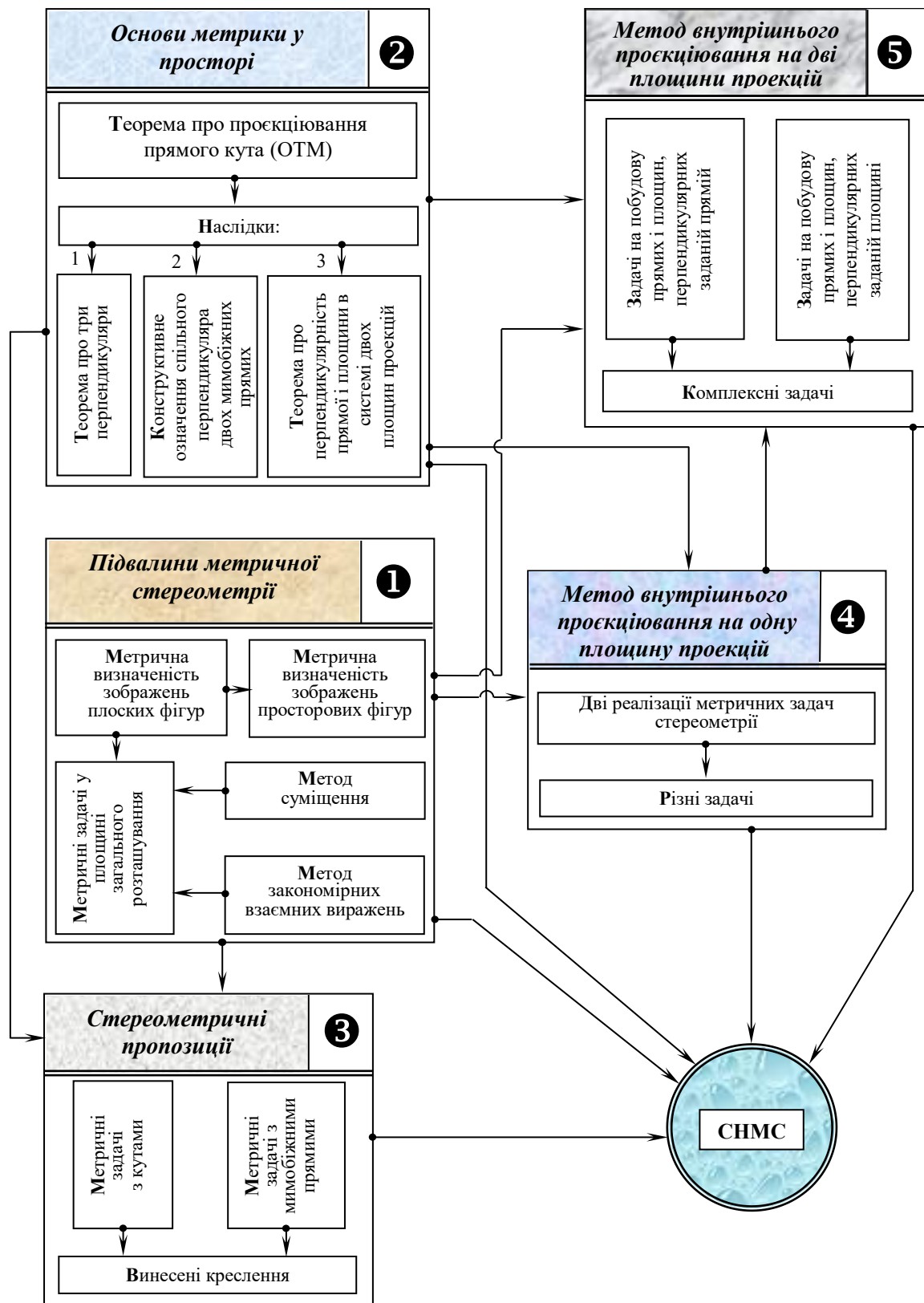
Рис. 1.4

1.2. Метрична визначеність зображень плоских фігур

У теоретичних викладках вище ми дбали про якомога менше залучення до пояснень супутніх геометричних закономірностей у пошуку шляхів розв'язання задач конструктивними методами, потужного апарату просторових афінних перетворень фігур, розміщених у площині загального розташування, оскільки на те не було вагомих причин.

Однак далі не завадить пригадати, що афінна відповідність (A) двох плоских полів цілком визначається парою відповідних трикутників (трикутник-зображення ABC і трикутник-оригінал $A'B'C'$) та, поряд із тим, однозначно розкладається в добуток двох перетворень подібності (P) і перспективно-афінної відповідності (Π): $A = \Pi \cdot P$. Відомо, що перетворення подібності не змінює форму об'єктів геометрії, а тому в перспективно-афінній відповідності кожна точка M зображення, віднесена до площини трикутника ABC , визначає положення оригіналу M' у площині трикутника $A'B'C'$.

Подаємо схему метричної стереометрії, маючи яку перед очима простіше ввійти в курс конструктивної метрики, зрозуміти сутність її методів і які факти покладені в основу цього специфічного розділу.



Схема

Як щойно сказане можна і потрібно розуміти в конкретній (практичній) ситуації? Нехай трикутник ABC на площині Π є зображенням рівнобедреного трикутника $A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$) із кутом при вершині A' , рівним 20° (рис. 1.5). Зумисне піддаємо трикутник-оригінал $A'B'C'$ перетворенню подібності з коефіцієнтом $k = \frac{BC}{B'C'}$ ($B'C' \rightarrow B_0C_0 = BC$), а трикутник, який є результатом

цього перетворення, в уявленнях перемістимо в просторі так, щоб його сторона B_0C_0 злилася зі стороною BC трикутника-зображення. При цьому вершина A_0 рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$, подібного трикутнику $A'B'C'$, розташується деінде відносно площини Π . З'єднаємо прямою лінією точки A_0 і A . Тоді трикутник ABC зобразиться паралельною проєкцією трикутника $A_0B_0C_0$ за напрямом $A_0 \rightarrow A$, а пряма $B_0C_0 \equiv BC$ (вісь) і пара відповідних точок A_0 і A однозначно визначатимуть деяку перспективно-афінну відповідність між площинами Π_0 і Π . При цьому площини Π' і Π перебуватимуть, як відомо, в афінній відповідності.

Таким чином, щоб зображення плоскої фігури Φ (рис. 1.5, а) відбулося **як метрично визначене**, достатньо аби тільки накладені на нього умови дозволяли встановити істинну форму $A'B'C'$ будь-якого трикутника $ABC \subset \Phi$ на цьому зображенні. Така вимога, без сумніву, є також необхідною, бо якщо плоска фігура-оригінал уже метрично визначена, то вона обов'язково містить хоча б один трикутник $K'L'M'$, якому відповідає на зображенні трикутник KLM .

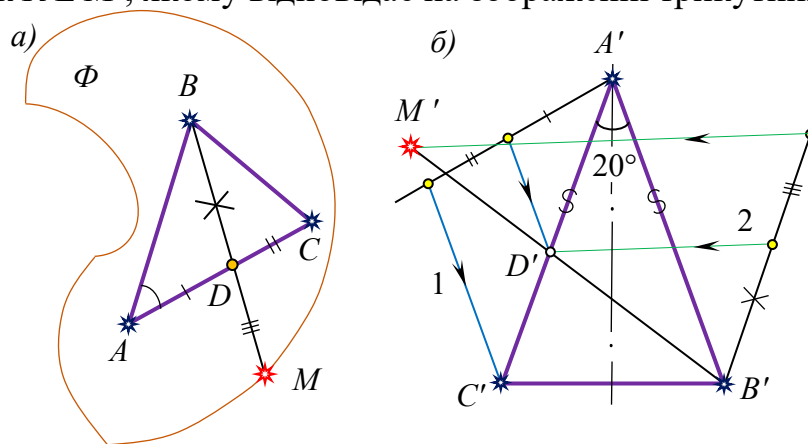


Рис. 1.5

Форма ж трикутника, очевидно, цілком визначається двома метричними параметрами, наприклад співвідношенням однієї пари сторін ($A'B' = A'C'$) і кутом між цими сторонами ($\angle A' = 20^\circ$). Звідси випливає, що **зображення плоских фігур у паралельній проєкції має два вільних параметри**, які можуть бути визначені умовами, накладеними на оригінал ($p = 2$). Таким чином, як висновок, усякий викладач (учень), який працює над зображенням плоскої фігури, матиме у своєму розпорядженні лише два параметри, які він може витратити, накладаючи в ході міркувань ті чи інші метричні умови на оригінал.

До таких самих результатів можна також дійти через наступні міркування. Розглянемо довільну плоску фігуру Φ' , яка має, щонайменше, одну трійку неколінеарних точок. Тут завжди можна вибрати трикутник $A'B'C'$, що належить Φ' . Якщо на зображення цього трикутника ABC уже затрачено два незалежні метричні параметри (наприклад, $A'B' = A'C'$, $\angle A' = 20^\circ$, див. рис. 1.5, а, б), то однозначно визначається і форма всієї фігури Φ' . Справді, для довільної точки M' , яка належить контуру фігури Φ' , справедливі пропорції: $B'M' : M'D' = BM : MD$, $A'D' : D'C' = AD : DC$. Відношення, що стоять праворуч у цих пропорціях, відомі із зображення (рис. 1.5, б), адже вони є інваріантами як перетворення подібності, так і паралельного проєкціювання. Тому за умови, що трикутник

$A'B'C'$ представляє собою справжню форму трикутника ABC , можна аналогічно точці M' знайти (побудувати) достатню кількість точок, за якими визначиться весь контур (істинна форма) фігури Φ' .

Отже, цим ще раз наочно доведено, що форма плоскої фігури цілком визначається задаванням її двох незалежних метричних параметрів. Це можуть бути також два кути, відношення двох пар сторін тощо.

1.3. Метрична визначеність зображень просторових фігур

Для певності обґрунтування конструктивних випробувань у майбутньому, варто пам'ятати, що метрично визначеними є лише ті зображення, за якими можна змодельювати (відновити) оригінал із точністю до подібності (зокрема, в уявленнях). З метою візуального моделювання метричних операцій із тілами стереометрії, зображеними строго за методом паралельних проєкцій, попередньо теж потрібно вирішити питання їх метричної визначеності. Тут, щонайперше, посилаються на теорему Польке-Шварца ([6], ч. I, р. I, §5, п. 5.3), яку в наукових літературних джерелах часто і небезпричинно називають **основною теоремою аксонометрії**.

Отже, уявимо собі заданим проєкційне креслення будь-якої трикутної піраміди. Очевидно, що маючи лише зображення цього найпростішого багатогранника, без додаткових метричних характеристик фігури-оригіналу, встановити її форму не представляється можливим, оскільки трикутних пірамід, відмінних за формою, безліч. У цьому, до речі, й виражається змістова складова теореми Польке-Шварца, а саме: «Довільний плоский чотирикутник разом з його діагоналями можна розглядати як паралельну проєкцію тетраедра будь-якої наперед заданої форми».

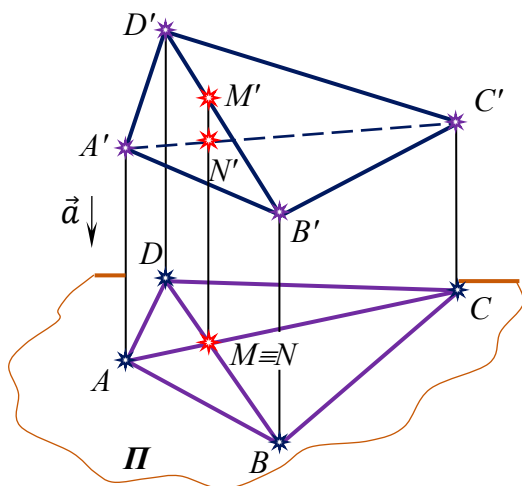


Рис. 1.6

Уявляти наочно-образно доведений факт у нашому випадку потрібно наступним чином. Нехай на площині зображень Π дано довільний повний чотирикутник $ABCD$ загального розташування (рис. 1.6). Через його вершини проведемо прямі, паралельні напрямку a , не паралельному Π . Напевне, що на цих прямих завжди знайдеться четвірка некомпланарних точок, які приймаємо за вершини деякого тетраедра. Змінюючи взаємне розташування вказаних вершин і напрями проєкціювання a , одержимо

нескінченну множину (багатовид) тетраедрів всіх можливих форм. Так-от, теорема Польке-Шварца стверджує, що *серед багатовиду таких тетраедрів завжди знайдеться хоча б один $A'B'C'D'$, подібний заданому і такий, паралельною проєкцією якого на площину Π буде накреслений чотирикутник $ABCD$.*

Таким чином, основна теорема аксонометрії дозволяє трикутну піраміду будь-якої форми зображати на площині дошки (зошита) яким завгодно не виродженим повним чотирикутником. І таке зображення буде гарантовано

правильним.

Принадно нагадаємо, що правильність – не єдина вимога до зображень звичних стереометричних фігур (чи їх комбінацій) у курсі геометрії ЗЗСО. Про це вчителю (учню) потрібно пам'ятати завжди при розв'язуванні задач конструктивними методами. Зображення мають бути ще й наочними, чого можна порівняно просто досягти шляхом реалізації добре відпрацьованих, неодноразово випробуваних у покроковій схемі дій чітких алгоритмів (правил-орієнтирів) виконання проєкційних креслень всіх варіацій тривимірних фігур, що трапляються, приміром, за методом «аксонометричних напрямків і умовних співвідношень» (див. [6]).

Тепер установимо кількість метричних умов, які визначали б просторову форму довільної фігури Φ' , повне зображення якої Φ уже накреслене на картинній площині (рис. 1.7). Усередині кожної тривимірної фігури, як відомо, завжди знайдеться хоча б одна четвірка точок, які не належать одній і тій самій площині. Такі точки однозначно визначатимуть у просторі деякий тетраедр $S'A'B'C'$ (нехай $SABC$ – його зображення; для зручності припустимо також, що точки A, B і C належать основній площині). Посилаючись до аналогії (див. п. 1.2), як до категорії логіки і психології [13], переконливо стверджуємо, що *фігура-оригінал, усі точки якої можуть бути афінно визначені відносно згаданого тетраедра за їх зображеннями, буде при цьому теж метрично визначена*. Тобто, **для метричної визначеності повного зображення просторової фігури Φ' , досить метричного визначення будь-якого тетраедра на цьому зображенні**.

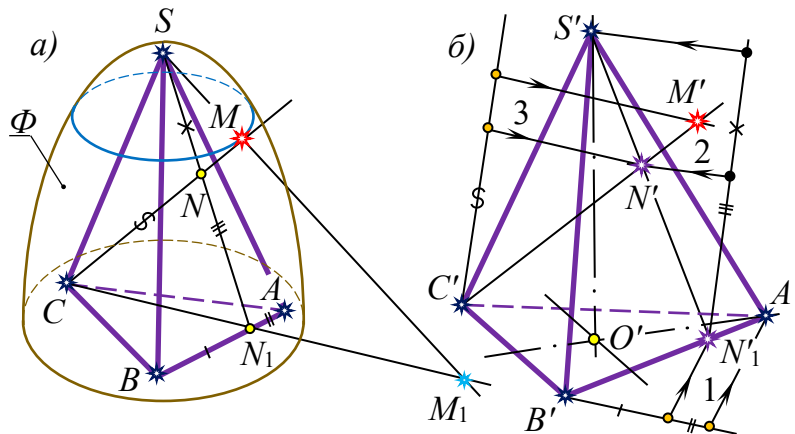


Рис. 1.7

Обґрунтування сформульованого твердження в своїй сукупності досить прості. Нехай $M(M_1)$ – повне зображення точки M' , що належить поверхні фігури-оригіналу Φ' . З'єднаємо точку $M(M_1)$, скажімо, з вершиною $C \equiv C_1$ прямою лінією і знайдемо ще одну її спільну точку $N(N_1)$ із поверхнею тетраедра-зображення, тобто розв'яжемо на проєкційному кресленні ОПЗ-1. Далі уявимо собі, що тетраедр $S'A'B'C'$ (рис. 3.7, б) виявляє справжню форму тетраедра – прообразу, зображеного повним чотирикутником $SABC$ у зовнішньому паралельному проєкціюванні на картинну площину. Тоді, виконавши тричі підряд в оригіналі афінну операцію поділу відрізка у визначеному на кресленні (рис. 1.7, а) відношенні: $AN_1 : N_1B = A'N'_1 : N'_1B'$, $SN : NN_1 = S'N' : N'N'_1$,

$CN:NM = C'N':N'M'$, змодельємо точку M' фігури Φ' . За цим сценарієм можна змодельювати будь-яку кількість (особливих і випадкових) точок поверхні просторової фігури, заданої проєкційним кресленням, тобто визначитися з її формою з точністю до подібності.

Очевидно, що наведені міркування тепер уже звужують задачу, а тому залишається лише встановити число метричних параметрів, які потрібно витратити на метричну визначеність повного зображення тетраедра.

Як уже пояснювалося, форма плоскої фігури визначається задаванням **двох** незалежних умов. Звідси випливає, що для встановлення форми двох граней тетраедра потрібно сформулювати **чотири** незалежні метричні умови. Але ж грані тетраедра, маючи спільне ребро, можуть бути нахиленими одна до іншої під усяким кутом. Щоб зафіксувати їх взаємне розташування, потрібно накласти **ще одну** умову (наприклад, указати градусну міру двогранного кута чи співвідношення між двома будь-якими сторонами різних граней, чи відношення визначальних відрізків за участю висоти тетраедра або його «шостого» ребра тощо). Отже, в усіх випадках одержуємо: $p = 5$.

Таким чином, в остаточному підсумку можна категорично стверджувати: **метрична визначеність повного зображення тетраедра, а отже і просторової фігури, яка вміщує його в собі, цілком обумовлюється задаванням п'яти ($p = 5$) незалежних параметрів.**

Варто зауважити, що обґрунтування метричної визначеності багатovidу плоских і просторових фігур геометрії в умовах ЗЗСО доцільно провести шляхом візуальних спроб і узагальнень на конкретних рисункових прикладах (див., напр., додаток до цього розділу).

§ 2. Метричні задачі у площині загального розташування. Метод суміщення

Підсумовуючи щойно описані закономірні тлумачення, аналізуючи та виважено переосмислюючи висновки з них, можемо впевнено констатувати, що логіка достеменних обґрунтувань та умовиводів переконлива, проста й доступна в розумінні, а отже, побудована в такому представленні теорія метричної визначеності позиційно визначених проєкційних креслень має достатньо серйозне логічне і математичне підґрунтя.

Усе ж таки, для ефективного включення сформульованих тез у структуру розумових дій учня, набуття стійких предметних навичок і вмінь у діяльнісному моделюванні специфічних графічних операцій з умовними зображеннями елементарного характеру, чіткого усвідомлення особливостей становлення і формування принципів наочно-образної *метричної геометрії*, першочергово слід зайнятися розв'язуванням **найпростіших і базових метричних задач** винятково на **плоскі фігури**, довільно розташовані у просторі відносно площини проєкцій зовнішнього проєкціювання.

Така постановка питання може викликати в учня-початківця природне здивування: «Нащо потрібно розв'язувати метричні задачі на плоскі фігури з використанням їх просторових зображень? Чи не краще відразу ж на дошці (в зошиті) зображати визначені умовою фігури подібними до справжніх і далі

оперувати з ними, як з оригінальними?» Так, звичайно, цей шлях зручніший і візуально більш переконливий. Адже відомо, що якраз таким добре відпрацьованим прийомом і користуються, вивчаючи властивості плоских фігур у планіметрії. Проте у випадку стереометрії, навіть за найбільш удалого, найкращого розташування тривимірної фігури відносно картинної площини, всі її елементи (приміром, грані та перерізи багатогранника), що залучаються до пошуку шляху розв'язання просторової пропозиції, аж ніяк не можуть водночас зображуватися без спотворення їх форми і розмірів. Тому названі площинні задачі є необхідно складниками стереометричних задач на побудову, й вони надто важливі в розглядуваному розділі метрики.

Найпершу із відомих класичних метричних задач курсу стереометрії сформулюємо, поки що, в самому загальному звучанні та, на початку, проаналізуємо її не прив'язуючись до конкретного методу зображень, а отже, без урахування притаманних паралельним проєкціям властивостей.

Задача 1. *На картинній площині задано точку A і пряму a загального розташування. Причому, точка A не належить прямій a . Знайти відстань від точки до прямої.*

Відомо, що через пряму і точку, які не належать одна одній, можна провести площину і до того ж тільки одну ([10], теорема 1.1). Тому в учителя (учня) відразу з'являється спокуса здійснити пошук розв'язання задачі не у просторі взагалі, а саме на площині $\Sigma(A, a)$. Звісно, якби площина Σ зливалася з картинною площиною, то циркулем і лінійкою було б просто опустити єдиний перпендикуляр із точки A на пряму a , який визначав би шукану відстань у натуральну величину. Однак первісно Σ займає загальне розташування відносно площини проєкцій, а це означає, що зображення, виконане за методом паралельного проєкціонування, спотворює і довжину шуканого перпендикуляра, і прямий кут в його основі.

З метою цілісного сприйняття наступних умовиводів, нагадаємо, що на метрично визначених проєкційних кресленнях термін «знайти відстань» означає **«побудувати (змоделювати) зображення шуканого відрізка»**, який в оригіналі істинно є єдиною можливою **метричною характеристикою** взаємного розташування вказаних умовою геометричних об'єктів.

Очевидно, що в так сформульованій умові задачі ми матимемо на кресленні графічну невизначеність, адже не зрозуміло взаємне розташування точки (A), прямої (a) і в цілому площини Σ відносно картинної площини. Іншими словами, тут задача на побудову однозначно **нерозв'язувана** циркулем і лінійкою.

Що ж потрібно додатково знати про площину $\Sigma(A, a)$, щоб ланцюжок конструктивних операцій призвів до єдиного розв'язку? Якраз про це ми й вели мову в першому параграфі (п. 1.2), а саме, – на зображення площини, в якій ведеться пошук розв'язання метричної задачі, потрібно затратити два незалежні метричні параметри (!), чого й не було зроблено вище в умові. Чи є можливість виправити ситуацію, що склалася зараз? Звичайно ж, це нескладно зробити. Варто виконати присутні корективи стосовно уявлюваних об'єктів зображення: 1) виберемо будь-яку точку B на прямій a (рис. 1.8) і припустимо, наприклад, що

в оригіналі $\angle A'B'a' = 45^\circ$; 2) візьмемо ще одну точку C на цій самій прямій, скажімо таку, щоб у просторі $A'B' = \frac{1}{2}B'C'$. Тепер уже явно означеними і строго введеними в умову задачі **двома параметрами** площина $\Sigma(A, a)$ цілком метрично визначена.

Таким чином, у вихідній позиції умова даної просторової задачі була сформульована помітно неповно, а отже, некоректно, що й призвело до невизначеності. Останнє, у свою чергу, переконливо засвідчує, що завжди, *перш ніж розпочати розв'язування метричної задачі на тому чи іншому повному проєкційному кресленні конструктивними методами, потрібно обов'язково оцінити (перевірити) його на предмет метричної визначеності.*

У загальному випадку відстань від точки до прямої в стереометрії шукають у три кроки: 1) через дану точку проводять площину, перпендикулярну даній прямій – геометричне місце перпендикулярних прямих, серед яких лише одна перетинає пряму, а інші мимобіжні з нею; 2) знаходять точку перетину прямої із проведеною площиною (ОПЗ-І); 3) встановлюють відстань між двома точками. Схоже можна отримати, приміром, формулу відстані від точки до прямої в прямокутній декартовій системі координат аналітичної геометрії.

Ми ж ставимо завдання **конструктивного** вирішення сформульованого питання.

Зауважимо, що користуючись на кресленні-моделі циркулем та лінійкою досягти очікуваних побудовних результатів можна або **графічним**, або **графоаналітичним** методами.

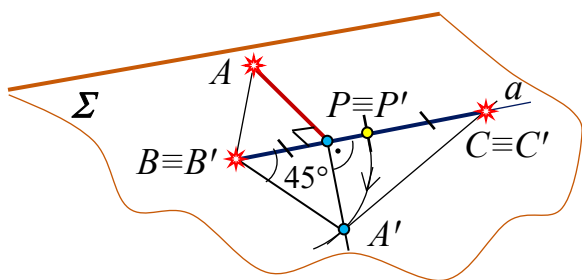


Рис. 1.8

Стосовно **графічного** розв'язання метричних задач, то тут знайшов надто широке застосування **метод суміщення** із площиною дошки (зошита) визначеної умовою (чи вибраної всередині заданого тіла за чіткими правилами самим виконавцем побудови) плоскої фігури.

Уявити динаміку просторового перетворення, яке називають методом суміщення, досить просто. Оскільки ми працюємо на кресленні лише з точністю до подібності, то припускаємо, що трикутник-оригінал $A'B'C'$ (рис. 1.8) після перетворень подібності та руху стороною $B'C'$ «потрапляє» на картинну площину так, щоб сторона BC трикутника-зображення ABC збігалася з $B'C'$. Це означає, що дві його вершини B' і C' тепер уже зображені як в оригіналі. Залишилося третю вершину A' повернути навколо прямої $B'C' \equiv BC$ так, щоб вона теж «упала» на площину зображень. Після виконання цього останнього руху, трикутник $A'B'C'$ належатиме картинній площині, а його форма буде істинною – такою, як в оригіналі. Тобто, кути трикутника будуть зображуватися в натуральну величину, а сторони – у визначених на зображенні (по відношенню до $B'C' \equiv BC$) пропорціях. *У цьому й полягає суть методу суміщення.*

Якщо два незалежні метричні параметри трикутника відомі за умовою

задачі ($\angle B' = 45^\circ$; $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$), то виконати фактичну побудову фігури оригінальної форми зовсім нескладно: 1) у вибрану півплощину відкладаємо $\angle C'B'b' = 45^\circ$; 2) на промені b' відкладаємо відрізок $B'A' = \frac{1}{2} B'C'$. Трикутник $A'B'C'$ – шуканий, а операцію суміщення слід вважати завершеною. Далі, з вершини A' відомим планіметричним прийомом опускаємо перпендикуляр $A'P'$ на протилежну сторону трикутника $B'C'$. Відрізок AP ($P' \equiv P$) – єдиний графічний розв'язок ОМЗ-1.

Характерною ознакою **графоаналітичного** методу потрібно вважати попереднє встановлення, через порівняно прості алгебричні представлення, визначальних, незмінних у паралельному проєкціюванні співвідношень між заданими і шуканими елементами конструкції. Після цього, з урахуванням знайдених залежностей, формується переважно надто проста графічна кінцівка задачі, що є ключовою в накресленні замовленої висновком геометричної фігури. Так, побудовна (графічна) складова пропозиції помітно мінімізується.

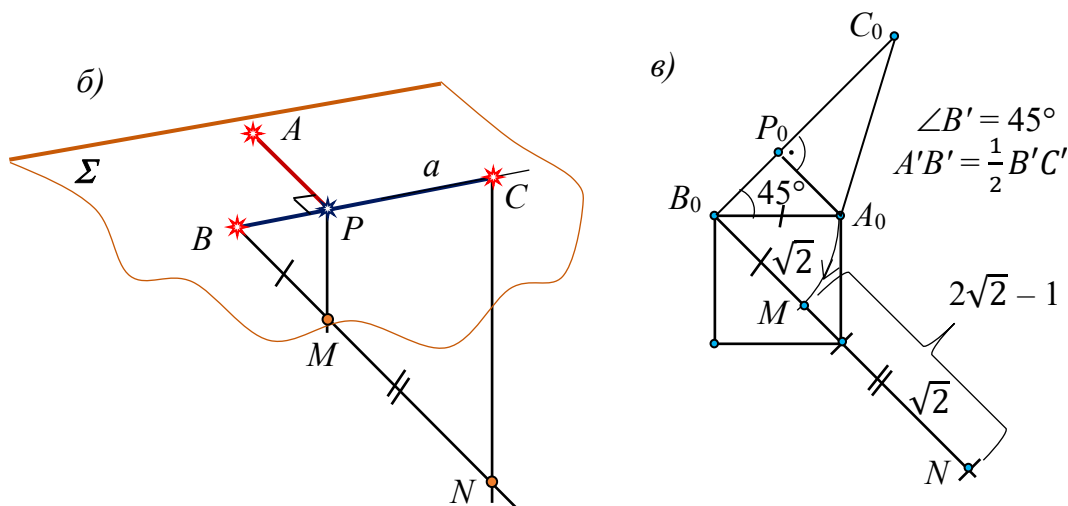


Рис. 1.8

У розглядуваному конкретному випадку визначальною є точка P , тому **перший (аналітичний)** етап пошуку розв'язку можна провести в такий спосіб. Побудуємо акуратно «від руки» на вільному місці поля креслення (рис. 1.8, в) будь-який трикутник $A_0B_0C_0$, приблизно («на око») дотримуючись взаємних метричних залежностей, тобто з гострим кутом у 45° і такий, в якого прилеглі до кута сторони пов'язані заданим співвідношенням: $B_0A_0 = \frac{1}{2} B_0C_0$. Опустимо перпендикуляр A_0P_0 на сторону B_0C_0 . Далі міркуємо так. Якщо покласти, наприклад, $B_0A_0 = 1$, то $B_0C_0 = 2$, а $B_0P_0A_0$ – рівнобедрений прямокутний трикутник і $B_0P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. У свою чергу, отримаємо таке: $P_0C_0 = B_0C_0 - B_0P_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, а $B_0P_0 : P_0C_0 = 1 : (2\sqrt{2} - 1)$ (рис. 1.8, б).

Графічний (завершальний) етап, виконаний інструментами (чи акуратно «від руки»), добре простежується за рисунком. Нагадаємо, що тут задіяно узагальнену теорему Фалеса та навички в побудові відрізків, які формально представлені виразами із скінченим числом раціональних операцій та добування коренів квадратних.

Задача 2. Дано зображення ABC рівностороннього трикутника, а також прямої p і точки P , які лежать у площині цього трикутника. Потрібно змодельювати зображенням перпендикуляр із точки P на пряму p .

Помічаємо, що на відміну від попереднього випадку, остання задача сформульована цілком коректно, оскільки площина $\Sigma(ABC)$ метрично визначена двома умовами, накладеними на трикутник-оригінал: $A'B' = B'C'$ і $B'C' = C'A'$ (або, по іншому, $A'B' = B'C'$ і $\angle A'B'C' = 60^\circ$). Урахування заданих умовою метричних залежностей між елементами гарантує отримання єдиного графічного розв'язку на картинній площині.

Відразу ж домовимося про таке. В цій та інших задачах, які далі доведеться розв'язувати методом суміщення, перетворення подібності площини Σ з деяким (загалом невідомим нам) коефіцієнтом $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ та рух у просторі до злиття будь-якого (обраного виконавцем побудови) лінійного елемента фігури-оригіналу з відповідним йому лінійним елементом фігури-зображення вважати такими, що вже відбулися.

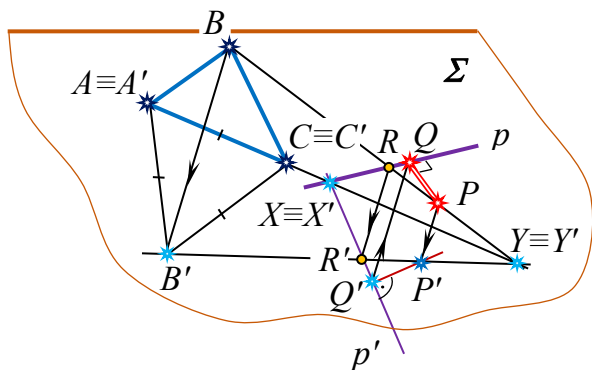


Рис. 1.9

1-й спосіб розв'язання. Згідно з умовою (рис. 1.9), трикутник ABC в оригіналі задається як рівносторонній. Побудувавши на будь-якій його стороні, наприклад на $AC \equiv A'C'$, рівносторонній трикутник ACB' , одержимо істинну форму заданого трикутника $A'B'C'$. Ця елементарна операція забезпечує, фактично, поворот

всієї площини $\Sigma'(A'B'C')$ навколо прямої $AC \equiv A'C'$ до суміщення її з картинною площиною. Зокрема, разом із точкою B' обертаються також навколо нерухомої осі обертання $AC \equiv A'C'$ й інші, задані умовою геометричні об'єкти площини Σ' , – точка P' і пряма p' . При цьому будь-яка пряма $B'Y$ на кресленні, яка перетинає вісь обертання в її подвійній точці $Y \equiv Y'$, займе нове розташування $B'Y'$, а точка P , інцидентна прямій $B'Y$, – місце точки P' на прямій $B'Y'$ так, що $PP' \parallel BB'$. Останній факт пояснюється дуже просто – відношення відрізків на цій прямій $\left(\frac{BP}{PY} = \frac{B'P'}{P'Y'}\right)$ є інваріантом не лише паралельного проєкціювання і перетворення подібності, а й якого завгодно іншого переміщення у просторі, зокрема й обертання навколо прямої $A'C' \equiv AC$. Пряма $p'(p)$ теж має в цьому русі з віссю обертання одну спільну (подвійну) нерухому точку $X \equiv X'$, а інша її точка $R'(R)$ нехай належить, наприклад, тій самій прямій $B'Y'(B'Y)$. Дві точки X' і R' однозначно встановлюють розташування на моделі прямої p' . Завершивши поворот даної площини до нульового рівня, опускаємо звичним прийомом із точки P' перпендикуляр $P'Q'$ на пряму p' і, провівши $Q'Q \parallel B'B$ до перетину в точці Q із прямою p , одержимо зображення шуканого перпендикуляра PQ .

Можна припустити, що уважний, зацікавлений читач уже, певною мірою, підсвідомо помітив індуковану такими уявними та рисунковими діями взаємно однозначну відповідність між точками площини зображень у суміщених полях Σ

і Σ' . Причому, ця відповідність цілком визначається сукупністю подвійних точок $AC \equiv A'C'$ (віссю) і парою відповідних точок $B \leftrightarrow B'$, а також має дві явно виражені (добре відомі нам) властивості: 1) пари відповідних точок лежать на прямих, паралельних напрямку BB' ; 2) пари відповідних прямих перетинаються на осі відповідності $AC \equiv A'C'$. Але ж наведені властивості притаманні перспективно-афінній відповідності. Однак у цій ситуації принципово важливим є такий стан речей, коли одна із площин (Σ') узваної спорідненої відповідності стає, після суміщення ($\Sigma' \equiv \Sigma$), площиною нульового рівня, і в ній всі графічні операції виконуються без спотворення форми і розмірів геометричних фігур, що, головним чином, й забезпечує правильність знайденого розв'язку задачі.

2-й спосіб розв'язання. З нашого боку було б помилкою знехтувати тим фактом, що процес суміщення заданих геометричних фігур із картинною площиною передбачає щоразу чітко алгоритмізовану послідовність певних конструктивних кроків, властивих, очевидно, кожній метричній задачі, яка розв'язується цим методом.

Так, зрештою, можна встати на формальний шлях пошуку розв'язань багатьох цікавих задач, до чого не варто надміру заохочувати ні студентів, ні учнів. Тому не дивно звучатиме таке запитання: «Чи не можна розв'язати цю саму задачу іншим, лише їй притаманним методом, в якому були б використані не уторовані стежки і формальні (хоч і обґрунтовані теоретично) прийоми, а винятково внутрішні геометричні взаємозв'язки і співвідношення між заданими і шуканими геометричними фігурами своєчасно і доречно помічені суб'єктом навчання?» Адже вміння оцінити просторову ситуацію, що склалася на умовному кресленні розглядуваного комплексу геометричних фігур, «побачити» й виділити в пошуку розв'язання серед інших визначальні зв'язки між окремими фігурами (чи їх елементами), якраз і називають високою кваліфікацією,

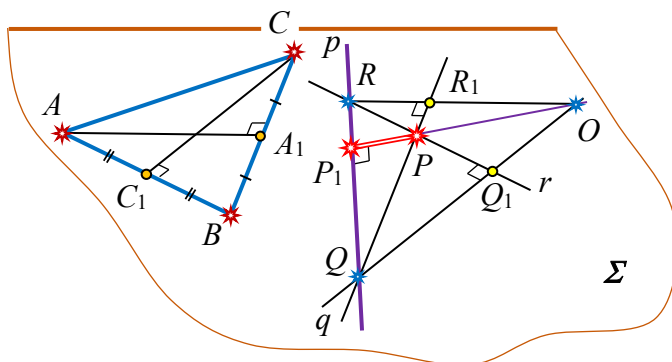


Рис. 1.10

трикутника можна побудувати, посилаючись на метричну визначеність трикутника-зображення ABC , а отже, на метричну визначеність усієї площини зображень Σ .

Справді, оскільки трикутник ABC (рис. 1.10) в оригіналі рівносторонній, то його висоти є одночасно і медіанами, проведення яких базується лише на афінних властивостях трикутника. Отже, поділивши навпіл, приміром, сторони AB і BC , одержимо на зображенні дві пари спряжених (взаємно перпендикулярних у просторі) напрямів: AA_1 і BC , CC_1 і AB . Проведемо тепер через точку P дві прямі q

професіоналізмом учня – виконавця побудов.

Хорошим, власне, орієнтиром у пошуку графічного розташування перпендикуляра, що опущений з точки P' на пряму p' , є гіпотетична можливість залучення в схему дій (в якості допоміжних елементів) найпростіші геометричні об'єкти площини Σ' . Адже висоти заданого

і r , паралельні відповідно BC і AB , та зафіксуємо точки перетину останніх із заданою прямою p : $Q = q \cap p$; $R = r \cap p$. Завершуємо потрібну нам побудову досить просто, адже дві висоти трикутника PQR уже позиційно визначаються на кресленні нами ж заданими спряженими напрямками: $QQ_1 \parallel CC_1$ і $RR_1 \parallel AA_1$. Далі шукаємо точку O перетину щойно проведених висот QQ_1 і RR_1 трикутника PQR та з'єднуємо її (як ортоцентр цього трикутника) прямою з точкою P до перетину із заданою прямою p у точці P_1 . Відрізок PP_1 й буде шуканим перпендикуляром.

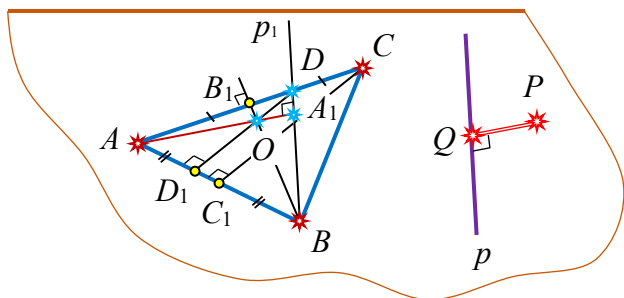


Рис. 1.11

3-й спосіб розв'язання. Суть

цього підходу до вирішення тієї ж пропозиції полягає в моделюванні перпендикуляра, опущеного з будь-якої вершини трикутника ABC (рис. 1.11) на довільну пряму, паралельну заданій прямій p і таку, яка перетинає сторони трикутника (нехай, для визначеності, це будуть точки A і

пряма p_1 , інцидентна вершині B). Якщо D – точка перетину p_1 зі стороною AC , то задача, безсумнівно, зводиться до побудови висот тепер уже трикутника ABD , що, до речі, зробити зовсім неважко, оскільки ABC в оригіналі є рівностороннім трикутником. Справді, BB_1 ($AB_1 = B_1C$) є одночасно висотою обох трикутників, а DD_1 розташовується паралельно CC_1 ($AC_1 = C_1B$), що очевидно. Через точку O перетину BB_1 і CC_1 проводимо третю висоту AA_1 трикутника ABD . Завершуємо задачу проведенням із точки P шуканого перпендикуляра PQ , який, звичайно ж, буде паралельним AA_1 .

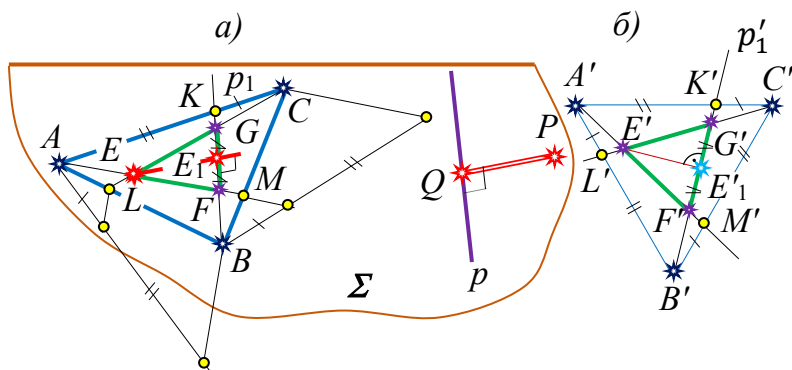


Рис. 1.12

4-й спосіб розв'язання. Пропонуємо учню самостійно уважно розглянути рисунок 1.12, а, на якому $p_1 \parallel p$, а $PQ \parallel EE_1$ ($FE_1 = E_1G$). Представивши доведення, що трикутник EFG є зображенням рівностороннього трикутника (тут зручно скористатися будь-яким рівностороннім трикутником $A'B'C'$ у натуральну величину (див. рис. 1.12, б)), проаналізуйте хід виконання побудов, які й призводять до потрібного нам графічного результату. Дайте також відповідь на запитання: «Які стрижневі факти евклідової геометрії використані в запропонованій схемі позиційно-метричних перетворень?»

Задача 3. На проєкційному кресленні задано зображення трикутника ABC , причому точка P є зображенням його ортоцентра (точки перетину

висот). Потрібно знайти істинну форму трикутника-оригіналу.

Приймаючи (рис. 1.13) AB на картинній площині за справжню довжину цього відрізка ($AB \equiv A'B'$), змодельємо оригінальну форму трикутника ($A'B'C'$) методом його суміщення з картинною площиною. На зображенні пари точок A і A' , B і B' зливаються ($A' \equiv A$, $B' \equiv B$), а отже, залишається лише знайти суміщення C' третьої вершини C трикутника-зображення.

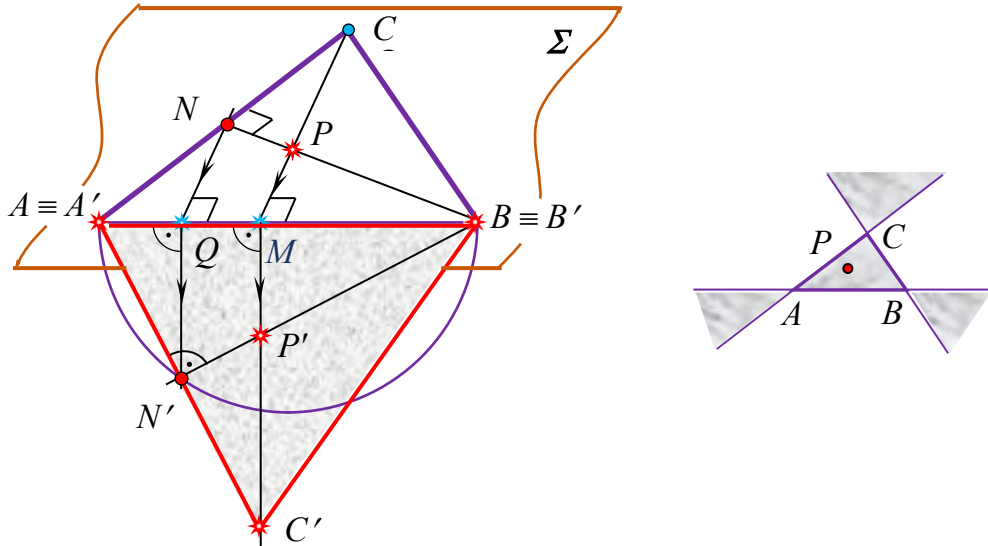


Рис. 1.13

Усім відомо, що задати точку в конструктивній геометрії можна або зображенням у визначеному місці поля креслення (в системі координат), або ж шляхом візуальної фіксації її місця розташування на картинній площині в перетині побудованих обумовленим чином найпростіших ліній: двох прямих, прямої і кола, двох кіл.

Таким чином, щоб знайти розміщення на площині зображень точки $C'(C)$ після суміщення, потрібно професійно оцінити конструктивні можливості двох первісно відомих метричних параметрів уявленої в русі плоскої фігури та, скориставшись доречними геометричними фактами, які прямо впливають з умови, накреслити дві визначальні для точки C' лінії.

Міркуюємо просто. Основа M висоти CM трикутника-зображення буде одночасно основою висоти трикутника-оригіналу ($M \equiv M'$). Тому пряма MC' , перпендикулярна $A'B'$, є однією із двох визначальних у пошуку вказаних ліній. Крім того, навіч помічаємо, що точка C' належить ще й променю $A'N'$. Отже, побудова точки C' зводиться тепер до побудови суміщення N' точки N , яка є вершиною прямого кута трикутника $A'N'B'$ (за умовою). Знайти справжню форму трикутника ANB , прямокутного в оригіналі, зовсім нескладно, адже, по-перше, з точки N' його гіпотенузу $A'B'$ видно під прямим кутом і, по-друге, висота $N'Q'$ цього останнього трикутника, проведена з вершини прямого кута N' на гіпотенузу $A'B'$, паралельна висоті $C'M'$ трикутника $A'B'C'$. Тобто, точку N' слід шукати у перетині променя, що виходить із точки $Q \equiv Q'$ під кутом 90° до $A'B'$, та півкола, побудованого на $A'B'$ як на діаметрі. Провівши промінь $A'N'$ до перетину з MC' , знайдемо точку C' .

Отже, справжню форму трикутника ABC ($A'B'C'$) на картинній площині встановлює достовірно змодельований трикутник ABC' , кути якого вимірюються в натуральну величину, а сторони – з точністю до подібності.

Примітка. Задача має єдиний розв'язок, причому точка P' , що зображає ортоцентр трикутника-оригіналу, мала б лежати всередині власної «області існування», зокрема вона може вибиратися будь-де всередині трикутника ABC .

Задача 4. На проєкційному кресленні трикутника ABC точка P є зображенням центра описаного навколо цього трикутника кола. Потрібно знайти істинну форму трикутника-оригіналу.

Секрет у тому, що центр P' кола, описаного навколо трикутника $A'B'C'$ (рис. 1.14), виконує водночас роль ортоцентра ще й іншого трикутника ($A'_0B'_0C'_0$), який утворено середніми лініями трикутника $A'B'C'$. Справді, що добре видно з рисунка 1.14, б, серединні перпендикуляри сторін трикутника $A'B'C'$ є відповідно висотами трикутника $A'_0B'_0C'_0$: $P'A'_0 \perp B'_0C'_0$ ($B'_0C'_0 \parallel B'C'$); $P'B'_0 \perp A'_0C'_0$ ($A'_0C'_0 \parallel C'A'$); $P'C'_0 \perp A'_0B'_0$ ($A'_0B'_0 \parallel B'A'$). Звідси прямо випливає, що відшукування форми трикутника ABC зводиться до встановлення вже відомим прийомом (задача 3) форми трикутника $A_0B_0C_0$, адже $\Delta A'B'C' \sim \Delta A'_0B'_0C'_0$, що очевидно.

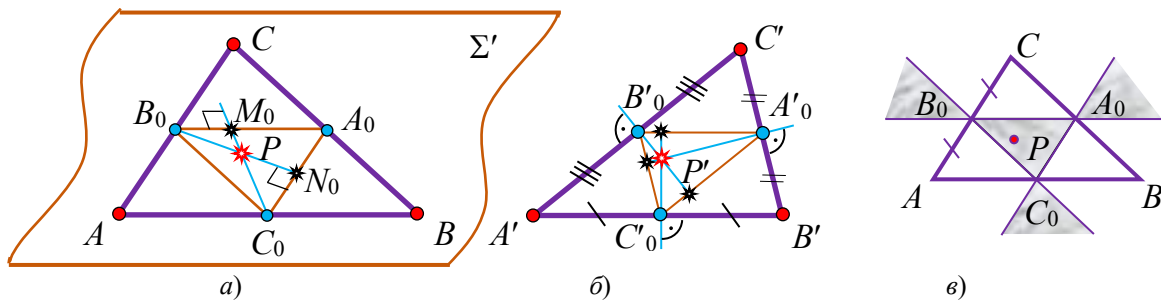


Рис. 1.14

Примітка. Область існування зображень P центра P' описаного навколо трикутника $A'B'C'$ кола ϵ , разом із тим, областю існування можливих зображень ортоцентрів трикутника $A'_0B'_0C'_0$.

Задача 5. На проєкційному кресленні задано зображення трикутника ABC , причому точка P є зображенням центра вписаного в трикутник кола. Потрібно знайти істинну форму трикутника-оригіналу.

1-й спосіб розв'язання. Нехай трикутник ABC (рис. 1.15) зображає деякий трикутник $A'B'C'$, а довільна точка P усередині області її існування є зображенням центра кола, вписаного у трикутник $A'B'C'$ (точка перетину бісектрис). Припустимо, що трикутник-зображення і оригінальний трикутник приведені в перспективно-афінне розташування на картинній площині, причому віссю споріднення є пряма $AB \equiv A'B'$. Оскільки AA_0 , BB_0 і CC_0 зображають бісектриси трикутника, то, з урахуванням відповідної властивості бісектриси ([9], §11, п. 106), можемо записати: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{c'A'_0}{A'_0B'} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{A'B'_0}{B'_0C'} = \frac{c'}{a'}$ (*).

Проведемо через точку C пряму $CB_1 \parallel B_0B$ і пряму $CA_1 \parallel A_0A$. Тоді $\Delta AA_0B \sim \Delta A_1CB$ і $\Delta BB_0A \sim \Delta B_1CA$ (за двома кутами). Отже, $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{A_1A}{AB}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AB}{BB_1}$ (**).

Порівнюючи рівності (*) і (**), відповідно дістанемо: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{A_1A}{AB} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AB}{BB_1} = \frac{c'}{a'}$. Але беручи до уваги, що $AB = A'B' = c'$, з останніх відношень знайдемо: $AA_1 = b'$ і $BB_1 = a'$. Таким чином, сторони трикутника-оригінале c' , b' і a' на кресленні вже побудовані, після чого й сам трикутник $A'B'C'$ легко будується ([9], §5, п. 43).

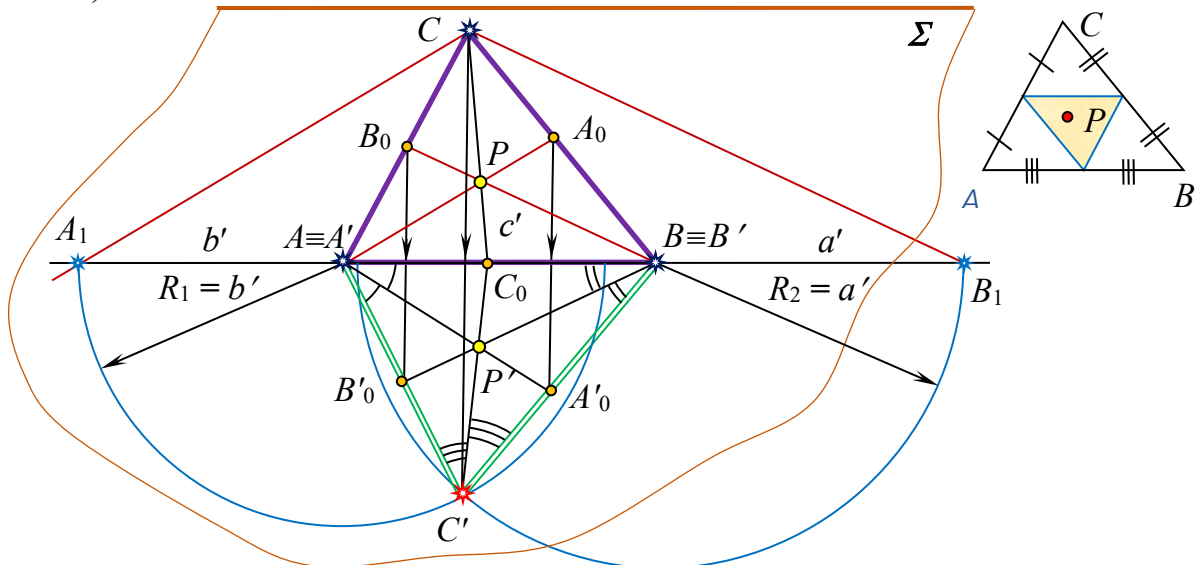


Рис. 1.15

2-й спосіб розв'язання. Зауважимо, що спосіб, який ми вважаємо за потрібне запропонувати зараз, не можна назвати оригінальним у порівнянні з попереднім. Швидше, це його своєрідна інтерпретація, дещо інший підхід у міркуваннях і не більше.

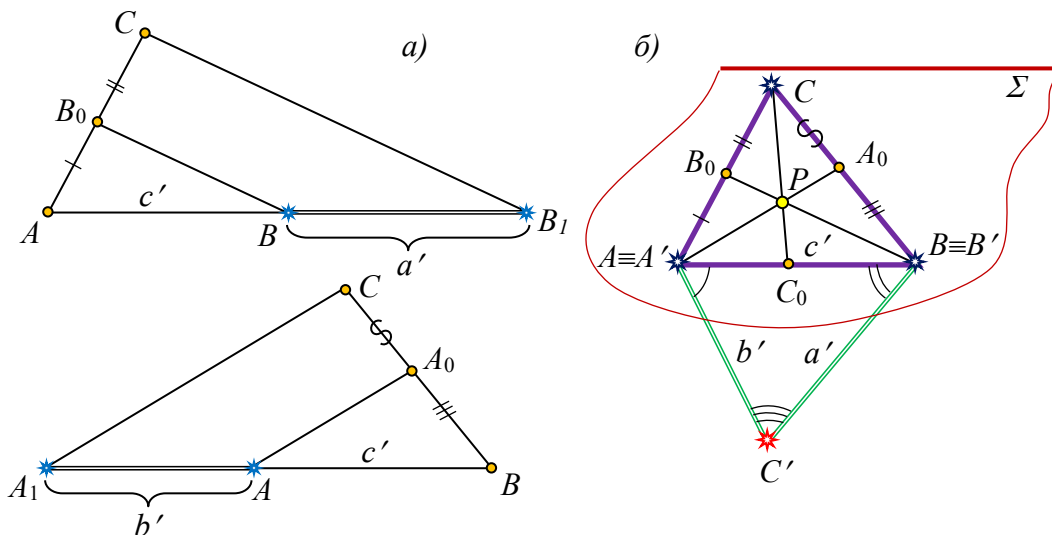


Рис. 1.16

Отож виявляється, що точка P , як зображення перетину бісектрис трикутника-оригіналу $A'B'C'$ (рис. 1.16), разом із трикутником-зображенням ABC цілком метрично визначають площину Σ . Це твердження істинне хоча б тому, що саме точка P в її геометричній суті встановлює на кресленні відношення справжніх довжин трьох визначальних (попарно непаралельних) відрізків a' , b' і c' . При цьому відношення двох відрізків еквівалентне заданню одного параметра,

а відношення трьох відрізків – заданню двох метричних параметрів. Справді, за умови, що $AB \equiv A'B' = c'$ (див. рис. 1.16, б), $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{C'A'_0}{A'_0B'} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{A'B'_0}{B'_0C'} = \frac{c'}{a'}$. Із цих пропорцій невідомі відрізки a' і b' (дві інші сторони трикутника-оригіналу) просто будуються, як четверті пропорційні до трьох заданих відрізків, а саме: $a' = \frac{B_0C \cdot c'}{AB_0}$; $b' = \frac{CA_0 \cdot c'}{A_0B}$ (рис. 1.16, а). За трьома ж сторонами a' , b' і c' трикутник побудувати нескладно. Отже, трикутник $A'B'C'$ справді встановлює форму трикутника-оригіналу з точністю до подібності (рис. 1.16, б).

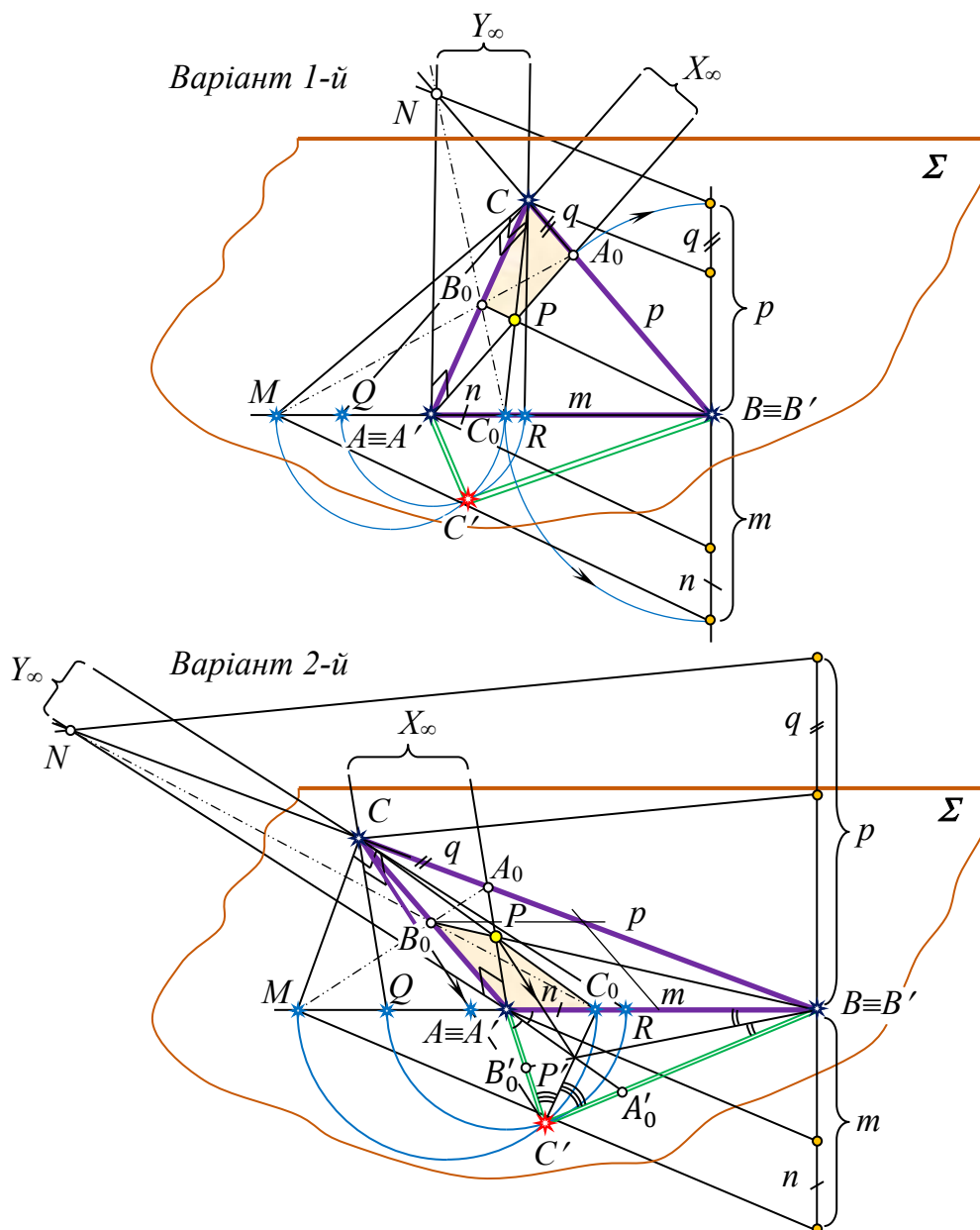


Рис. 1.17

3-й спосіб розв'язання. У шкільному курсі геометрії є строго доведеним факт, згідно з яким бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, проведені з однієї і тієї ж вершини, утворюють між собою прямий кут. Крім цього, в підручнику для ЗЗСО обґрунтовується суть важлива пропозиція, яка узагальнено матиме таке звучання: «Бісектриса зовнішнього кута трикутника розділяє його протилежну сторону зовнішнім чином у відношенні, в якому

бісектриса відповідного внутрішнього кута ділить цю ж саму сторону трикутника внутрішнім чином» ([9], §11, п. 106, задачі 46, 47). Сукупно взяті два твердження в нашому конкретному випадку означають, що коли відрізок CC_0 на картинній площині (рис. 1.17) зображає бісектрису внутрішнього кута C' ($\angle ACB$) трикутника $A'B'C'$, а відрізок CM , який побудовано згідно з останнім твердженням, – бісектрису відповідного зовнішнього кута ($\angle ACN$), то кут MCC_0 в оригіналі є прямим. Аналогічно, якщо відрізок AA_0 зображає бісектрису внутрішнього кута A' ($\angle CAB$) трикутника $A'B'C'$, а відрізок AN , побудова якого аналогічна, – бісектрису зовнішнього кута трикутника з тією ж вершиною ($\angle CAM$), то кут NAA_0 в оригіналі теж прямий. Якщо, до того ж, на зображенні трикутника через точку C провести прямі $CQ \parallel A_0A$ і $CR \parallel NA$, то кут QCR в оригіналі також буде дорівнювати 90° , що прямо впливає з вище означених співвідношень та теореми 3.1 у тому ж таки підручнику.

Отже, з шуканої точки C' два відрізки MC_0 і QR на прямій $AB \equiv A'B'$ видно під прямим кутом. Тому залишається лише на відрізках MC_0 і QR , як на діаметрах, побудувати два півкола і зафіксувати їх точку перетину C' . Трикутник $A'B'C'$ відтворює на кресленні справжню форму трикутника ABC .

Між іншим зауважимо, що побудову зображення бісектриси CM здійснено нами шляхом поділу відрізка AB зовнішнім чином у відношенні $\frac{BM}{MA} = \frac{BC_0}{C_0A}$. Так само, для відшукування зображення бісектриси AN , довелося відрізок BC поділити точкою N зовнішнім чином (знову ж таки) у відношенні $\frac{BN}{NC} = \frac{BA_0}{A_0C}$. Тут, для зручності, було введено позначення: $BC_0 = m$, $C_0A = n$ і $BA_0 = p$, $A_0C = q$, що й відображено візуально на рисунку.

Пропонуємо більш досвідченому читачеві (студенту або ж учителю-математику, який має фахову підготовку із проєктивної геометрії) самостійно інтерпретувати в поясненнях цей останній спосіб, посилаючись до гармонійних властивостей повних чотирикутників CA_0PB_0 і AB_0PC_0 (див. на рис. 1.17 штрихпунктирні тонкі лінії із двома точками).

А зараз подамо ще одну задачу – ніби просту за змістом, але цікаву за різними способами розв'язання.

Задача 6. Площина загального розташування задана рівнобедреним трикутником ABC ($AC = BC$) із кутом при вершині C , рівним 120° . Точку M узято на перпендикулярі до площини трикутника, проведеному у вершині A . Опустіть із точки M перпендикуляр на бічну сторону BC трикутника.

1-й спосіб розв'язання. Аналізуючи умову задачі й рисунок до неї, бачимо, що шуканий перпендикуляр MQ до прямої BC є похилою до площини трикутника ABC . За теоремою про три перпендикуляри її проєкція AQ теж розташовується перпендикулярно до BC . Тож задача зводиться до проведення у площині загального розташування висоти трикутника з вершини A на протилежну їй сторону BC . Очевидно, що точка Q (основа висоти) лежатиме на промені BC за межами відрізка, оскільки $\angle C = 120^\circ$ – тупий (рис. 1.18, а).

Найбільш досвідчений учень передусім зверне увагу на трикутник AQC . Адже він прямокутний ($\angle Q = 90^\circ$), а $\angle ACQ = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ$, тому $\angle CAQ =$

$= 30^\circ$. Отже, оскільки катет прямокутного трикутника CQ лежить проти кута 30° , він у два рази менший за його гіпотенузу AC . Матимемо $CQ = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BC$. Залишається, пославшись на властивості паралельних проєкцій, лише розділити навпіл відрізок BC і від точки C упродовж однойменного променя відкласти відрізок $CQ = \frac{1}{2} BC$.

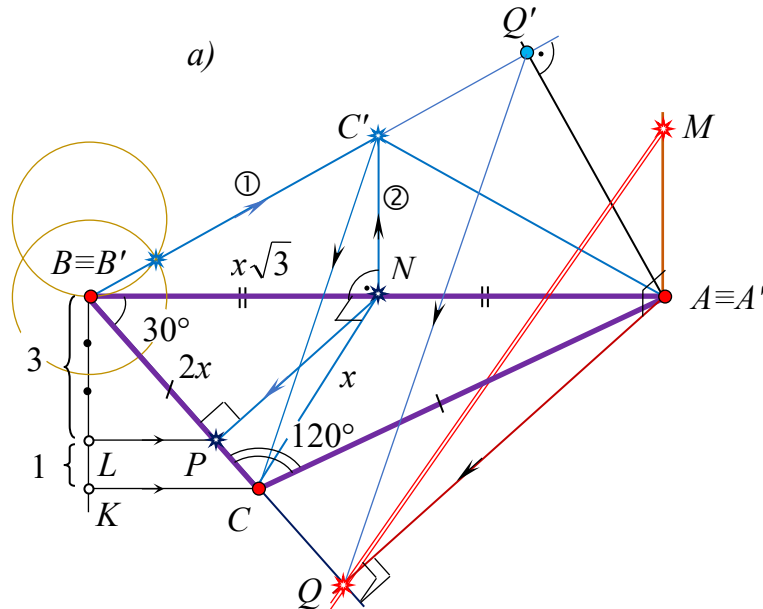


Рис. 1.18

2-й спосіб розв'язання. Однак у розділі «Стереометрія» часто користуються таким «неписаним» правилом: щоб змодельовати перпендикуляр із точки на пряму (чи на площину), досить обґрунтовано і просто зобразити інший перпендикуляр із вдало обраної точки на ту ж саму пряму (чи площину). Потім через задану точку провести пряму, паралельну побудованому перпендикуляру.

У нашому випадку надто зручно опустити перпендикуляр на сторону BC трикутника ABC наприклад із точки N , яка є серединою його основи AB . Справді, $\angle A = \angle B = 30^\circ$, а CN – медіана, бісектриса і висота заданого трикутника. Скориставшись фактом, що у прямокутному трикутнику CNB ($\angle N = 90^\circ$) кожен із його катетів є середнім геометричним між гіпотенузою і власною проєкцією на гіпотенузу, одержимо: $BN^2 : NC^2 = BC : PC$. Звідси, позначивши CN через x , матимемо: $BC = 2x$, $BN = x\sqrt{3}$ і $BP : PC = (x\sqrt{3})^2 : x^2 = 3 : 1$.

Завершуємо розв'язання задачі в суто конструктивному стилі. Спочатку, пославшись на узагальнену теорему про пропорційні відрізки, розділимо сторону трикутника BC точкою P у відношенні $3 : 1$ (від точки B). Далі з'єднаємо точки N і P відрізком, що перпендикулярний BC . Та, врешті, через точку A паралельно NP проведемо проєкцію похилої AQ , а потім й саму шукану похилу MQ .

Зараз задачу на побудову розв'язано **графоаналітичним** методом: 1) *формально-логічно* розраховано розташування на прямій BC основи P перпендикуляра NP до неї; 2) знайдений на цьому кроці результат дозволив *графічно* змодельовати зображенням проєкцію похилої AQ за вже відомим її

напрямом у площині трикутника ($AQ \parallel NP$); 3) нарешті, з'єднавши точки M і Q , одержано візуальний розв'язок задачі.

Неважко помітити, що з точки зору пошуку *оптимального* алгоритму дій на шляху до результату, надто важливо ретельно провести аналіз умови геометричної задачі та правильно виконаного наочного рисунка до неї, а також, за потреби, здійснити доречні добудови.

3-й спосіб розв'язання. А зараз скористаємося *рухами*, дійдемо до результату виключно *графічним* методом – суто геометрично.

Отож уявимо собі, що тримаючи в руках трикутник ABC ми будь-як переміщуємо його у просторі й «кладемо» на площину зображень стороною AB ($A'B' \equiv AB$). Тепер обертанням точки $C \equiv C'$ навколо прямої $A'B'$ суміщаємо останню із площиною зображень. Побудувати точку C' циркулем і лінійкою у два кроки просто, якщо взяти до уваги, що в оригіналі $\angle A' = \angle B' = 30^\circ$ (див. рис.). Далі як на площині реально опускаємо з точки A' на пряму $B'C'$ перпендикуляр $A'Q'$. Точка Q' розділяє відрізок $B'C'$ зовнішнім чином у тому ж відношенні, в якому точка Q ділить відрізок BC (відомо, що рухи зберігають відношення відрізків на прямій). Таким чином, й тут відшукання точки Q здійснюємо скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки. Завершуючи побудову, сполучаємо точку Q із точками A і M й отримуємо шукані перпендикулярні до сторони трикутника BC похилу MQ та її ортогональну проєкцію AQ .

Задачу розв'язано графоаналітично і графічно.

Обчислювальний етап. Повернувшись до трикутника CNB ($\angle N = 90^\circ$), легко знаходимо, що $CN = x = 3$, $BC = AC = 2x = 6$, а $CQ = 3$ (в одиницях масштабу).

Отже, із прямокутного трикутника AMQ , в якому $AM = 3\sqrt{6}$, отримаємо, що $MQ = 9$ (од. м.).

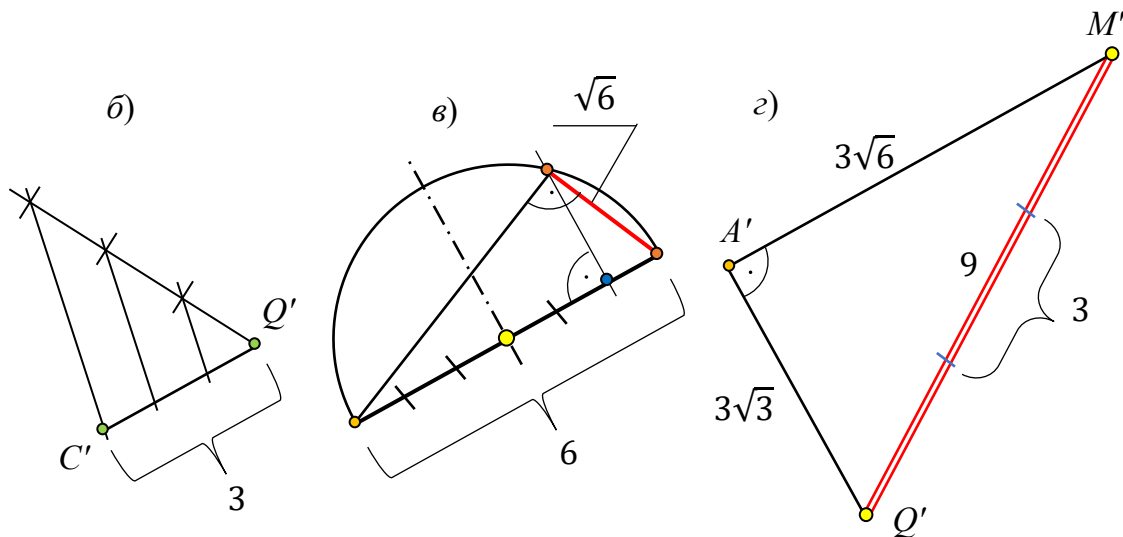


Рис. 1.18

Конструктивно до цього останнього результату неважко дійти завдячуючи розглянутому суто графічному методу побудов. Тут, як відомо, основа заданого трикутника $A'B' \equiv AB$ уже є оригінальним відрізком. На картинній площині (після операції суміщення, рис. 1.18, а) зображено в натуральну величину прямокутний трикутник $A'Q'C'$, в якого $A'Q' = 3\sqrt{3}$, $Q'C' = 3$, $A'C' = 6$. Поклавши це зображення

в основу, знаходимо на виносному кресленні оригінальну довжину відстані $M'Q'$ від точки M' до сторони $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 1.18, б-з): 1). Обираємо одиницю довжини, поділивши відрізок $Q'C' = 3$ на три рівні частини. 2). За відомої одиниці довжини, методом середніх геометричних (рис. 1.18, в) у прямокутному трикутнику, просто знаходимо відрізок довжиною $\sqrt{6}$. 3). За двома катетами будуємо прямокутний трикутник $A'M'Q'$, гіпотенуза якого $M'Q'$ дорівнює 9 од. м.

Можна оцінити точність виконаних графічних побудов. Для цього варто ретельно заміряти (з урахуванням одиниці масштабу) довжину відрізка $M'Q'$ на рисунку 4 та порівняти результат із його розрахунковою довжиною.

Завершуючи цей специфічний, надто важливий, основоположний в метричній стереометрії параграф, зауважимо, що найперше знайомство читача із змістовно схожими задачами, розв'язання яких на плоскому екрані велося циркулем і лінійкою, відбулося, по суті справи, значно раніше, ще на стадії відпрацювання теми «Зображення багатокутників, пов'язаних із колом» ([6], ч. I, р. II, §4). Уже ті зображення комбінацій двох плоских фігур здійснювалися на *метрично визначених* проєкційних кресленнях, які повністю виключали побудовну сваволю виконавця, оскільки щоразу **форма** багатокутника, вписаного в коло чи описаного навколо кола, однозначно визначалася умовою задачі, адже еліпс, який зображає коло, теж є метрично визначеною фігурою.

Неважко також помітити, що пошук шляху розв'язання таких метричних задач зводиться, як правило, до відшукання на картинній площині місця розташування певної точки або напряму деякої прямої. Моделювання цих визначальних елементів здійснюється строго алгоритмізовано за певним методом: або суто графічно, або ж за допомогою нескладних попередніх аналітичних обчислень, які конкретизують і спрощують завершальний графічний етап. А ще краще, коли учень через кваліфіковано проведений аналіз умови задачі помітить в кожній конкретній ситуації лише їй притаманні внутрішні взаємозалежності між заданими і шуканими геометричними фігурами, які логікою міркувань індукують особистісний шлях до конструктивного результату. Інколи ж, із цією метою, рисунково зручно скористатися власноруч встановленою перспективно-афінною відповідністю між зображенням фігури та її оригіналом, а ще, в інших ситуаціях, – виносними кресленнями – зображеннями фігур на картинній площині, виконаними переважно «від руки», однак настільки акуратно, що останні не спотворюють форму плоскої фігури, тобто на них активні (в побудовах) задані й шукані елементи знаходяться в зримо реальних, справжніх співвідношеннях, а кути зображуються «майже» в натуральну величину.

Та все ж таки, хорошим «інструментом» у розв'язанні багатьох задач метрики плоских фігур є, як ми переконалися, *метод суміщення*.

Такі, а також схожі до них вправи добре сприяють розвитку геометричної культури учня, його глибокій і всебічній фаховій підготовці із предмету.

Немає сумнівів, що сьогодні постановка питання якісного візуального (уявлюваного) оволодіння першим із предметів злободенна як ніколи. Методисти і науковці переконані, результатом навчання має бути розвиток особистості, інтелектуальний зріст, здатність до застосування набутих знань, умінь і навичок

на практиці, її спроможність до самоосвіти та самовдосконалення. Зокрема, в руслі творчо-розвивального навчання набувають неабиякого значення поміркована геометризація та естетично привабливе унаочнення пропозицій на основі конструктивно-генетичного методу. Помітно зростає варіативність способів вирішення позиційних і метричних задач, вирізняється загальний геометричний підхід у міркуваннях і побудовах. Учень, працюючи розумом і руками, одержує моральне задоволення від такої діяльності, що є надзвичайно дійовим чинником геометричної освіти в цілому.

§3. Роль і місце конструктивного компоненту в метричних задачах стереометрії

Зацікавлений геометрією читач, який уже має достатній досвід, навички і вміння у виконанні закономірних графічних перетворень стереометричних фігур на їх якісних зображеннях, напевне знає, що переважна більшість задач конструктивної стереометрії, розв'язуваних винятково на наявних позиційно та метрично визначених проєкційних кресленнях, вміщують у собі побудову прямих і (або) площин, перпендикулярних до вже накреслених прямих і площин, тобто до таких прямих і площин, які задані умовою.

Справді, як у всіх можливих варіаціях змодельовати в наочних уявленнях, а потім ще й візуально на метрично визначеному проєкційному кресленні тривимірного об'єкта кут між обраними прямою і площиною чи кут, утворений двома площинами? Як зобразити спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих? Як побудувати зображення перпендикуляра, опущеного з точки на пряму чи на площину? Це природні, звичні пропозиції як обчислювальної, так і графічної метрики в евклідовій стереометрії. Однак учні знайомляться з ними, пізнають геометричну сутність, конструктивну складову таких понять і відношень, як правило, поверхнево, формально за обставин, коли останні об'єктивно є стрижневими в образному розумінні цілісного курсу. Саме тому для більшості випускників ЗЗСО навіть нескладні стереометричні задачі на обчислення є «каменем спотикання».

Не секрет також, що стереометричні побудови в навчанні об'єктивно не є пріоритетними, а тільки допоміжними у процесі розв'язування переважної більшості задач на обчислення чи доведення, зокрема – на поверхні та об'єми багатогранників і круглих тіл (див., напр., попередні розділи цього посібника). Креслення-картини лише супроводжують змістовно вартісні задачі на відшукування градусної міри кута, довжини відрізка та, деінде, істинної форми і площі плоскої фігури, в тому числі й там, де фігурують перерізи стереометричних тіл площинами, відносно розташування яких у просторі, в кожному окремому випадку, чітко регламентується умовою.

Питається: «Про що, власне, ми зараз ведемо мову? В чому намагаємося переконати вчителя, учня?». Спробуємо відповісти, звернувшись до показового, повчального в цьому сенсі прикладу.

Отже, метричні задачі у просторі. Важливо, що відшукування їх розв'язків ми будемо вести в більшості випадків обчислювально, графічно і графоаналітично.

3.1. Метричні задачі

Задача 1. *Правильна трикутна піраміда, бічне ребро якої в півтора рази більше ребра основи, перетнута площиною. Фігурою перерізу є квадрат. Знайдіть відношення об'ємів багатогранників, на які розбиває піраміду переріз.*

Зараз, схоже до ситуацій, в яких нам уже доводилось перебувати, схема шляху розв'язання задачі строго розчленовується на два етапи – **графічний** і **обчислювальний**. Від того, наскільки ефективно, вдало (правильно і наочно) впораємося з першим етапом, залежить виразність міркувань і певність успіху в кінцевих обчисленнях. Отже, щоб досягти очікуваного результату, потрібно мати хороші уявлення, стабільні навички в реалізації графічними методами метричних задач на проєкційних рисунках просторових фігур, оскільки, згідно з умовою, зображення піраміди $SABC$ (рис. 1.19) метрично визначене, на нього витрачено рівно п'ять метричних параметрів: 1) $A'B' = B'C'$; 2) $B'C' = A'C'$; 3) $S'A' = S'B'$; 4) $S'B' = S'C'$; 5) $S'A' = 1,5A'B'$.

Спочатку, за звичних шкільних обставин, обов'язково потрібно було б грамотно провести **аналіз** задачі через такі, приміром, розмірковування.

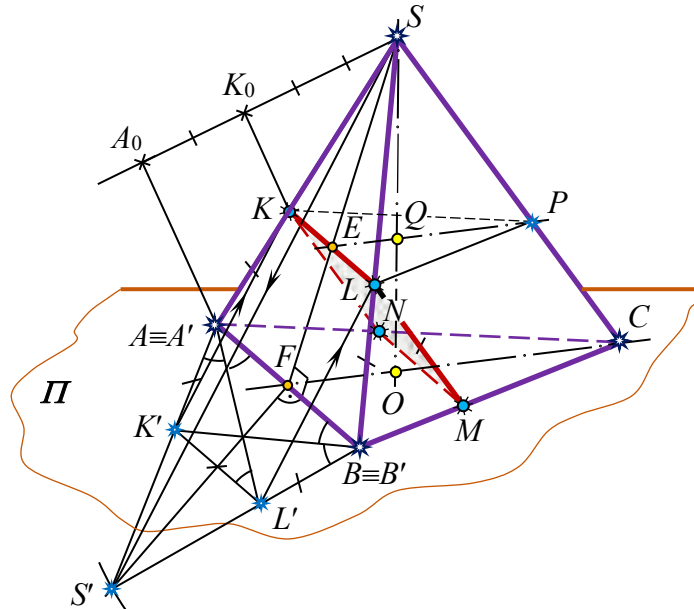


Рис. 1.19

Осмыслиючи в думці умову, констатуємо, правильна трикутна піраміда перетинається заданою площиною Σ і фігурою перерізу є квадрат. Оскільки піраміда має чотири грані, а квадрат – чотири сторони, то площина Σ гарантовано перетинає кожну грань і результатом цього дійства є замкнена плоска ламана, складена із чотирьох взаємно перпендикулярних відрізків однієї і тієї ж довжини в їх ланцюжковому переліку і зв'язках. Розглянемо на допоміжному рисунку, виконаному нашвидку «від руки», дві будь-які грані піраміди. Нехай, для визначеності, ними будуть грані SAB і ABC . Припустимо, що саме вони містять у собі одну пару (KL і MN) протилежних сторін квадрата $KLMN$. Зрозуміло, що в такій ситуації Σ паралельна ребру AB , яке є спільним ребром вибраних граней. Отже, $KL \parallel AB$ і $MN \parallel AB$. Аналогічно, дві інші грані

(SAC і SBC) площина перерізу перетинає паралельно їх спільному ребру SC і, в результаті, матимемо: $LM \parallel SC$ і $KN \parallel SC$.

У послідовності рисункових операцій учитель на дошці (чи учень у зошиті) мав би, по суті справи, доповнити *креслення-картину* піраміди *фігурою перерізу* орієнтовно за таким сценарієм: 1). Вибираємо на SA **довільну** (!) точку K і проводимо через неї пряму, паралельну AB , до перетину з ребром SB у точці L . 2). Через точки K і L проводимо прямі, паралельні SC , і фіксуємо їх точки N і M перетину з ребрами AC і BC відповідно. 3). З'єднуємо точки M і N у грані ABC відрізком прямої. Уявляємо собі, що $KLMN$ – шуканий квадрат, який зображується паралелограмом. Далі бажано розпочинати виконання зумовлених обчислень.

Такою є загальноприйнята, традиційно звична послідовність кроків у роботі з моделлю піраміди на уроці стереометрії. Все ж таки, мислячий учень може висловити сумнів, невдоволення побудовним етапом якраз у такому вигляді, оскільки *точка K на самому початку вибиралася на ребрі SA будь-де*, що дезорієнтує його у вирішенні питання **однозначності** перерізу піраміди площиною Σ . Тому, враховуючи метричні властивості повного зображення та скориставшись (для певності) циркулем і лінійкою, можемо вже відомим *методом суміщення* строго зафіксувати кардинальну точку K , а отже, з точністю до побудови, й квадрат $KLMN$. Учителю математики варто знати, що саме так одержані проєкційні рисунки гарантовано забезпечують безкомпромісність у пошуку числового розв'язку задачі, підкреслюючи абсолютну строгість геометричних закономірностей.

Перш ніж реалізувати задумане і сумістити грань $S'A'B'$ із площиною зображень, потрібно ще раз за кресленням-картиною осмислити певні визначальні в майбутній рисунковій роботі співвідношення. А саме, помічаємо, що $L'M' \parallel S'C'$ (за побудовою), отже трикутник $B'L'M'$ – рівнобедрений ($\angle S'C'B' = \angle L'B'M' = \angle L'M'B'$), а тому $B'L' = L'K' = L'M'$ та, аналогічно, $A'K' = K'N' = K'L'$. Отже, чотирикутник $A'K'L'B'$ є трапецією із трьома рівними сторонами: $A'K' = K'L' = L'B'$.

Очевидно, що суміщення точки S' просто шукаємо в перетині променя-перпендикуляра FS' до $A'B'$ та кола, з центром у точці B' і радіусом у півтора рази більшим відрізка $A'B' \equiv AB$. Точку K' , що задовольняє щойно встановленому факту ($A'K'L'B'$ – особлива трапеція), будуємо в перетині бісектриси кута $A'B'S'$ із відрізком $A'S'$ ($\angle A'B'K' = \angle B'K'L'$; $\angle B'A'L' = \angle A'L'K'$, як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих $A'B'$ і $K'L'$). Далі, проводимо $K'K \parallel S'S$, що й визначає на ребрі SA єдину шукану точку K (тут етапи *побудови* і *доведення* на зображенні строго не розмежовуються).

Щоб розв'язати цю ж саму проблему *графоаналітичним* методом, розрахуємо розташування точки K на відрізку SA . Позначимо, для зручності, сторону квадрата через x , а сторону основи піраміди покладемо рівною 1 (одиниці). Тоді $S'A' = \frac{3}{2}$. Трикутники $S'A'B'$ і $S'K'L'$ подібні, що очевидно. Тому

$$\frac{A'B'}{K'L'} = \frac{S'A'}{S'K'}. \text{ Але } S'K' = S'A' - K'A'. \text{ Таким чином, маємо: } \frac{1}{x} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - x} \Rightarrow A'K' = x = \frac{3}{5}.$$

У свою чергу, $S'K' = \frac{9}{10}$, а отже, $S'K' : K'A' = SK : KA = 3 : 2$. Тепер побудова точки K на SA може бути виконана вже звичним, узятим із досвіду прийомом (див. рис. 1.18).

До речі, оскільки задана умовою піраміда має три і тільки три пари взаємно перпендикулярних (мимобіжних у просторі) ребер, то, в залежності від вибору виконавцем першої пари граней у побудові квадрата $KLMN$ (у нашому варіанті це були грані SAB і ABC із спільним ребром AB), можна одержати на зображенні три перерізи, різні за виглядом і розташуванням, однак, в жодному разі, – не за оригінальними формою і змістом! Адже у своїй постановці розв'язувана задача на побудову (і на обчислення) – метрична, тому всі можливі варіанти перерізів правильної трикутної піраміди визначеною площиною Σ індукують суть один і той самий її розв'язок.

Таким чином, перший (побудовний) етап на шляху до розв'язання задачі завершено. Нам залишилося провести відповідні формальні підрахунки, тобто знайти розв'язок у числовому вираженні.

Отже, згідно з висновком задачі, потрібно знайти відношення об'ємів двох багатогранників, в яких спільною гранню є квадрат $KLMN$. Для компактності наступних записів введемо позначення: $V_{SABC} = V$; $V_{AKNBLM} = V_1$; $V_{SKLNM} = V_2$. З метою безпосереднього використання вже відомих із шкільного курсу геометрії формул об'ємів багатогранників, останній з них ($SKLNM$) розіб'ємо площиною, паралельною площині основи піраміди (ABC), на два стандартні багатогранники – правильну трикутну піраміду $SKLP$ і похилу призму $KLPNMC$, які мають спільну основу KLP . Нехай також $V_{SKLP} = V_3$ і $V_{KLPNMC} = V_4$. Очевидно, що $V_1 = V - V_2$, а $V_2 = V_3 + V_4$ (*). Отже, визначальними є три об'єми: V , V_3 і V_4 .

Далі, взявши до уваги умову задачі і пам'ятаючи, що $AB = 1$, $SA = \frac{3}{2}$ і $KL = \frac{3}{5}$, запишемо спочатку вирази саме для цих трьох об'ємів нами ж установлених стереометричних фігур: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$; $V_3 = \frac{1}{3} S_{KLP} \cdot SQ$; $V_4 = S_{KLP} \cdot QO$ (**), а потім обчислимо їх. При цьому до решти записів і перетворень, що виконані нижче, коментарі зайві, оскільки їх зміст дуже добре зрозумілий із рисунка.

Дійсно: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ і $S_{KLP} = \frac{1}{2} KL \cdot LP \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{100}$, адже $KL = LP = \frac{2}{5} SA = \frac{3}{5}$. У продовження обчислень, із прямокутного трикутника SOC матимемо таке: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$, де $OC = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3} \sqrt{BC^2 - \left(\frac{1}{2} AB\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Крім цього, $\triangle ASB \sim \triangle KSL$ і $\triangle FSO \sim \triangle ESQ$, тому $\frac{AB}{KL} = \frac{FS}{ES} = \frac{OS}{SQ}$ і $1 : \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} : SQ \Rightarrow SQ = \frac{3\sqrt{23}}{10\sqrt{3}}$, а $QO = SO - SQ = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$.

Нарешті, щоб завершити формалізовані пошуки відповіді, оберненим ходом за формулами (**) і (*) підраховуємо: $V = \frac{\sqrt{23}}{24}$, $V_3 = \frac{9\sqrt{23}}{1000}$, $V_4 = \frac{9\sqrt{23}}{500}$. А отже, остаточно маємо: $V_2 = \frac{27\sqrt{23}}{1000}$, $V_1 = \frac{11\sqrt{23}}{750}$ і $V_1 : V_2 = 44 : 81$. Задачу розв'язано.

Привертаємо увагу вчителя чи студента до сформованого нами ланцюжка обчислень, в якому виразно просліджується струнка системна лінія – *аналітичний метод* пошуку результату за принципом «від висновку до умови», що кожен учитель математики просто зобов'язаний вміти робити якісно, та ще й, обов'язково, на належному науково-методичному рівні. Більше того, цьому прийому потрібно настирно навчати студентів (учнів) у ЗВО і ЗЗСО.

Щоб ще глибше проникнути в суть геометричної конструкції, оцінити практичну значущість поданих рисункових випробовувань і логічних міркувань, пропонуємо читачеві самостійно продумати і записати детальну алгоритмічну схему вже розв'язаної задачі. Не завадило б також осмислити розвивально-навчальні пріоритети побудовної складової в наведених вище умовиводах, зокрема – в їх однозначності.

У підручнику стереометрії, випробуваному в ЗЗСО часом (майже у тридцять років), означення кута між прямою і площиною та кута між двома площинами вводяться *конструктивно* ([10], п. п. 32, 33, 37).

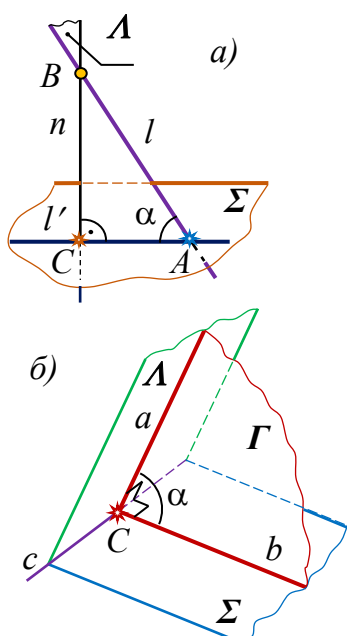


Рис. 1.20

Отже: «Нехай Σ – площина і l – пряма, яка її перетинає і не перпендикулярна до площини Σ (рис. 1.20, а). Основи перпендикулярів, опущених із точок прямої l на площину Σ , лежать на прямій l' . Ця пряма називається проекцією прямої l на площину Σ . *Кутом між прямою і площиною називається кут між заданою прямою і її проекцією на площину*». Звідси, оцінюючи в уявленнях представлену вербально-візуально просторову ситуацію, приходимо до висновку, що зображати на проєкційному кресленні тривимірного об'єкта кут між його визначеними елементами, приміром, ребром (прямою) l і гранню (площиною) Σ , потрібно виключно шляхом ортогонального проєкціювання прямої l на площину Σ : 1). Через пряму l проведемо площину Λ , перпендикулярну площині Σ (на прямій l виберемо будь-яку точку B , через яку

проведемо пряму n , що перпендикулярна площині Σ ; площина Λ визначиться перетином прямих l і n). 2). Побудуємо пряму лінію l' перетину площин Σ і Λ (знайдемо точку A перетину прямої l і площини Σ та точку C перетину перпендикуляра n із цією ж площиною; пряма $l' \equiv A'C'$ – проєкція l на Σ). Кут BAC – шуканий.

Далі цитуємо текст за оригіналом: «Нехай дані площини перетинаються. Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Вона перетинає дані площинами по двох прямих. *Кут між цими прямими називається кутом між даними площинами*».

На практиці, оперуючи конструктивно з відомими стереометричними тілами, більше користуються поняттями «двогранний кут», «лінійний кут двогранного кута»: «*Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує*. Півплощини називаються

гранями, а пряма, що їх обмежує – ребром двогранного кута. Площина, перпендикулярна ребру двогранного кута, перетинає його грані вздовж двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається лінійним кутом двогранного кута. За міру двогранного кута приймається міра відповідного йому лінійного кута». Таким чином, в загальногеометричному тлумаченні алгоритм побудови лінійного кута, яким вимірюється даний двогранний кут, передбачає (рис. 1.20, б): 1). Вибір на ребрі останнього будь-якої точки (C). 2). Проведення у взятій точці перпендикулярної до ребра площини (Γ). 3). Відшукування променів a і b перетину цієї допоміжної площини з кожною гранню двогранного кута.

Наведена деталізована алгоритмізація поставлених позиційно-метричних задач геометрії в найбільш загальному вигляді, з одного боку, надто важлива для наочно-образного розуміння суті питання, з іншого, – не завжди легко здійсненна на проєкційному кресленні саме в такій реалізації – з ретельним дотриманням узаконених покрокових схем у реальному рисунковому моделюванні.

Задача 2. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює 60° . Побудувати лінійний кут двогранного кута при її бічному ребрі.

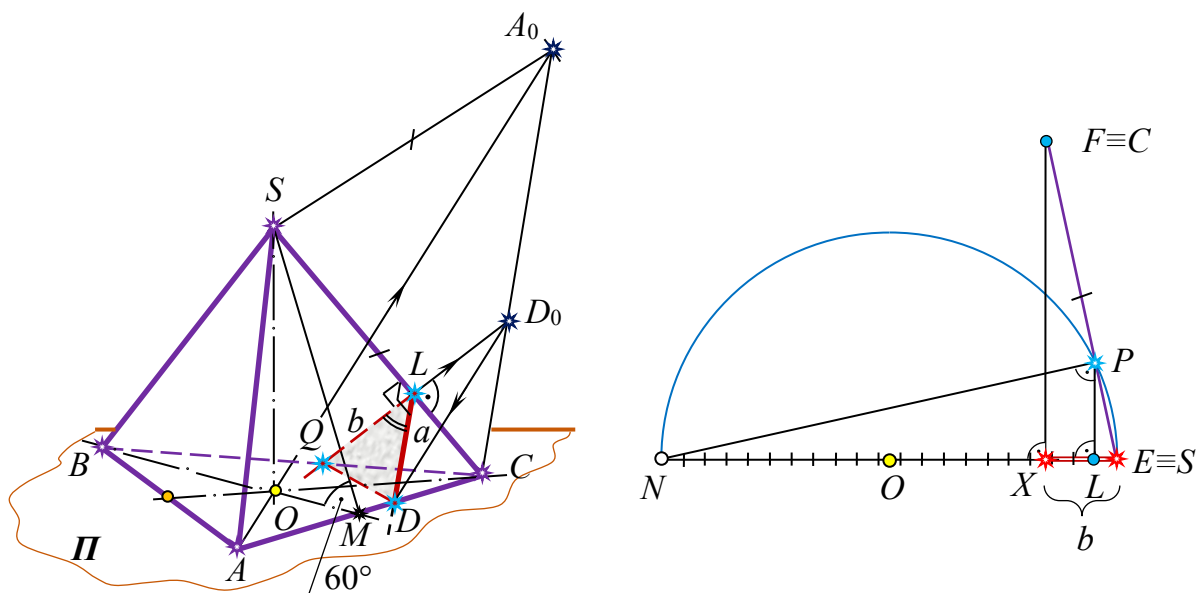


Рис. 1.21

1-й спосіб розв'язання. Нехай L – будь-яка точка бічного ребра SC піраміди $SABC$ (рис. 1.21). Як через обрану точку провести допоміжну в побудові площину, яка перпендикулярна до SC ? Очевидно, що з урахуванням третього пункту наведеного вище алгоритму, найбільш доречно задати її двома прямими a і b , які перетинаються у вибраній точці L і належать відповідно граням SAC та SBC . Такі міркування просторову метричну задачу звужують до площинної, тобто зараз цілком достатньо хоча б в одній із граней (SAC чи SBC) провести пряму a , перпендикулярну SC у точці L . Після чого пряму b в іншій грані тіла побудувати буде зовсім неважко, адже дана трикутна піраміда правильна, й тому площина Σ ($a \cap b$), яка містить будь-де взятую на ребрі AC точку L і перпендикулярна до цього ребра, висіче на поверхні піраміди рівнобедрений трикутник PLQ ($PL = QL$), оскільки прямокутні трикутники PLC і QLC рівні, що очевидно: $\angle QLC = \angle PLC =$

$= 90^\circ$ ($\Sigma \perp AC$), $\angle QCL = \angle PCL$ (усі бічні грані піраміди рівні), а катет LC – спільний.

У стандартній ситуації, що склалася, варто провести ретельний аналіз умови задачі та, врахувавши вихідні дані, подбати про відшукання таких взаємних залежностей між елементами грані SAC , які шляхом виконання певної послідовності допоміжних алгебричних виражень і зумовлених ними побудовних дій забезпечать очікуваний результат. Для зручності, введемо позначення $AC = a$, тоді $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $OM = \frac{BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. У прямокутному трикутнику SOM ($\angle OSM = 30^\circ$) $SM = 2 \cdot OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Крім того, $MC = \frac{a}{2}$ і врахувавши, що трикутник SMC теж є прямокутним, остаточно матимемо: $SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Далі, з метою встановлення істинної форми грані SAC , а отже, проведення в точці L перпендикуляра $LP(LP_0)$, варто сумістити трикутник SAC із площиною рисунка шляхом обертання однієї з його вершин або навколо ребра AC , або навколо ребра SC відповідно. За вже відомими (описаними вище) схемами. В першому випадку будується відрізок SC за даним відрізком a , а у другому, навпаки – a , за відомим відрізком SC (на рис. 1.21 реалізовано другий випадок із використанням рис. 1.3, а).

Завершуючи побудовний етап, посилаємося лише до відомої теореми про пропорційні відрізки та до не менш відомого твердження про те, що відношення відрізків на прямій є інваріантом паралельного проєкціювання.

Отже, для виконання в грані SAC побудовних операцій, що дають, згідно до умови задачі, змогу зафіксувати на метрично визначеному зображенні піраміди ($A'B' = B'C'$, $B'C' = A'C'$, $S'A' = S'B'$, $S'B' = S'C'$, $\angle S'M'B' = 60^\circ$) шукану геометричну фігуру, довелося попередньо виконати порівняно нескладні аналітичні розрахунки і скористатися їх результатом суто графічно. Тому в цьому випадку стереометричну задачу з візуально оформленим результатом розв'язано *графоаналітичним* методом.

2-й спосіб розв'язання. Все ж, як і передбачалося, наведений шлях до рисункового розв'язку дещо непевний у виборі точки L і операційно помітно складніший, ніж хотілося б. Чи не можна тісніше пов'язати точку L із пірамідою, й цим конкретизувати, хоч трохи спростити, оптимізувати та пришвидшити процес виконання побудов? І чи можливо спланувати побудову так, щоб відразу (або ж додавши найменші зусилля) на кресленні можна було б не лише спостерігати зображення шуканого кута, а й заміряти його справжню градусну міру? Виявляється, що ці проблеми зникають, якщо не слідувати сліпо сформульованому вище алгоритму. Отож, точку L на ребрі SC варто вибирати не будь-де, а в такій площині Ω , перпендикулярній SC , яка містить, скажімо, ребро AB в основі піраміди (творчий момент, рис. 1.22).

Обґрунтуємо ці міркування. Якщо SN – апофема бічної грані SAB ($SN \perp AB$), то CN (проєкція SN) – медіана, бісектриса і висота правильного трикутника ABC в основі піраміди ($CN \perp AB$) і, згідно з ознакою перпендикулярності прямої та

площини, $AB \perp \Lambda(SNC)$. Але ж пряма, котра перпендикулярна площині, перпендикулярна також будь-якій прямій цієї площини (за означенням). Тому $AB \perp SC \in \Lambda$. Таким чином, на визначальному етапі побудови площина Ω однозначно визначається в просторі заданим ребром AB і перпендикуляром NL , який і залишилося нам опустити з вершини N трикутника SNC на його протилежну сторону SC .

Реалізувати в графічному поданні цю операцію на зображенні піраміди можна надто просто, якщо знайти істинну форму S_0NC трикутника $S'N'C'$, наприклад, шляхом його суміщення із площиною проєкційного рисунка – обертанням навколо осі $NC \equiv N'C'$ (див. §2). При цьому точка S_0 будується в перетині двох променів OS_0 і NS_0 так, що оригінальними на моделі будуть кути:

$$\angle NOS_0 = 90^\circ \quad \text{та} \quad \angle S_0NO = 60^\circ$$

(відрізок NL на рис. не показано).

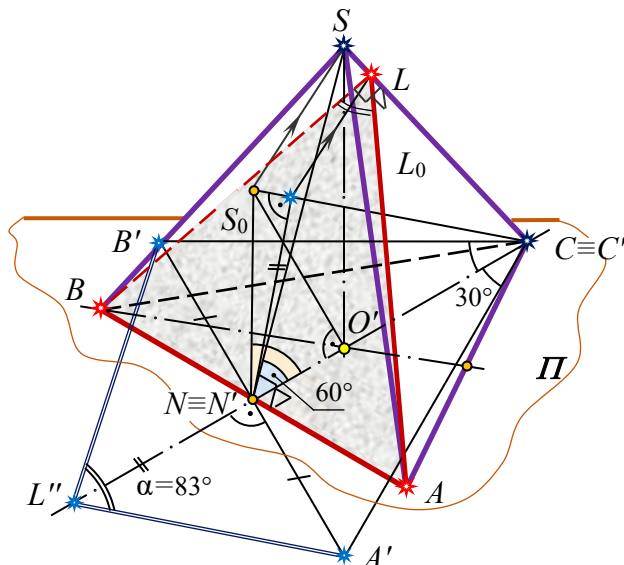


Рис. 1.22

Зауважимо, що завдяки осмислено проведеному аналізу нескладних внутрішніх взаємних залежностей усередині піраміди, класичний алгоритм виконання побудов, залишаючись достовірним, зазнав суттєвих змін як із точки зору його уявлюваної конструкції в загальній геометричній формі, так і в плані оптимізації дій виконавця в даній конкретній ситуації: 1). Через ребро $A'B'$ проводимо площину Ω' , перпендикулярну ребру $S'C'$.

2). Шукаємо точку L' перетину площини Ω' і ребра $S'C'$. 3). З'єднуємо відрізками точку L' із точками A' і B' . Кут ALB – зображення шуканого лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при ребрі $S'C'$.

Щоб знайти на зображенні справжню градусну міру кута ALB , потрібно, щонайперше, сумістити з картинною площиною трикутник $A'B'C'$ в основі піраміди. Причому, віссю обертання і в цьому випадку обов'язково має бути та ж сама пряма $NC \equiv N'C'$ (див. перше суміщення), яка, як наголошувалося, є висотою ($N'C' \perp A'B'$) і, звичайно, медіаною ($A'N' = N'B'$) розглядуваного рівностороннього трикутника ($\angle A'C'N' = \angle N'C'B' = 30^\circ$). Отже, побудова трикутника $A'B'C'$ тут майже очевидна. Крім цього, ще одним (наступним) кроком слід сумістити із площиною дошки (зошита) трикутник $A'B'L'$, в якого в оригіналі $N'L' = N'L'' = N'L_0$, де відрізок $N'L_0$ відомий з найпершого суміщення (див. рис. 1.22). Нарешті, скориставшись транспортиром, встановлюємо (як результат, з точністю до побудови і вимірювання), що градусна міра кута $A'L'B'$ насправді складає близько 83° .

Тепер слід дійти до повної зрозумілості щодо останніх побудов. Очевидно та безсумнівно, що рівнобедрений трикутник $A'B'L'$ ($A'L' = B'L'$) цілком визначається своїми основою $A'B'$ і висотою $L'N'$, проведеною до цієї основи. Ці

ж елементи шуканого трикутника мають, у свою чергу, однозначні графічні (і, до речі, аналітичні) вираження через відрізок $N'C' \equiv NC$, який вибрано за базову вісь першого та другого суміщень із площиною зображень трикутників $N'S'C'$ і $A'B'C'$. Тому рівнобедрений трикутник $A'B'L''$, побудований на відрізках $A'B'$ і $N'L_0$ як на власних основі та висоті до цієї основи відповідно, справді встановлює істинну форму трикутника ABL .

У цьому випадку ланцюжок логічних умовиводів і відповідних побудовних операцій уособлюють *графічний* метод. Очевидно, що суто аналітичних методів розв'язання саме конструктивних пропозицій бути не може, оскільки тут рисунку надається провідна, кардинальна роль і якраз креслярські інструменти фіксують на плоскому екрані замовлений результат.

3-й спосіб розв'язання. Чи не можна нетрадиційно урізноманітнити шлях до конструктивного вирішення розглядуваної задачі, зацікавити учнів елементарними прикладними ситуаціями, активізувати пізнавальну діяльність, апелюючи до їх уявлень та фантазії, вже достатнього життєвого досвіду (що й не дивно для старшокласника)? Виявляється, що й це можна зробити, якщо доречно поставити просте й зрозуміле кожному з них запитання: «Що таке **схил** (нахил) даху?», а потім дати елементарне наукове обґрунтування введеного поняття. Мова при цьому ведеться про звичайний похилий дах найзвичайнісінького жилого будинку.

Як з'ясувалося, термін, поширений в будівництві та архітектурі, має цілком природне геометричне тлумачення. Адже в будь-якій площині загального розташування можна виділити два сімейства особливих (цікавих) прямих ліній: 1) *лінії рівня*, що розташовуються паралельно основній площині; 2) *лінії найбільшого нахилу (схилу)*, що утворюють з основною площиною найбільший, максимально можливий кут. До речі, за основну, про що ми вже говорили раніше, можна вибрати площину, визначену на кресленні якою завгодно гранню багатогранника. Правильно й те (це легко уявити), що всяку площину можна вщерть заповнити лініями як одного, так і іншого сімейства: кулька з будь-якої вихідної позиції (точки) даху скотиться за траєкторією єдиного напрямку – вздовж лінії найбільшого нахилу.

Як побудувати у визначеній на зображенні площині (наприклад, у бічній грані багатогранника) будь-яку пряму чи то одного, чи іншого сімейства? Чи існує між прямими обох сімейств тісний суто геометричний взаємозв'язок? Відповідь на такі запитання дає просте твердження, котре цілком вписується в рамки шкільного курсу геометрії.

Теорема. *Пряма площини загального розташування, яка перпендикулярна до будь-якої лінії рівня цієї площини (відносно основної площини), є лінією її найбільшого нахилу.*

Доведення теореми проведемо *аналітико-синтетичним методом*.

Нехай у площині загального розташування $\Lambda(A(A_1), s)$ (рис. 1.23), яка перетинає площину основи Π уздовж власного сліду s , проведено деяку пряму $AB(A_1B_1)$ під прямим кутом до прямої $h(h_1)$, де h – лінія рівня площини $\Lambda(h \parallel \Pi, h \in \Lambda)$, а A – точка перетину цих прямих.

Треба довести, що пряма AB утворює максимально можливий кут нахилу до площини основи Π , порівняно зі всіма іншими кутами, утвореними рештою прямих площини Λ , які вміщують ту ж точку A .

Зараз проаналізуємо **висновок** теореми. Для цього додатково через точку A у площині Λ проведемо довільно вибрану іншу пряму $AC(A_1C_1)$, відмінну від AB . Кутом між прямою і площиною називається, як уже згадувалося раніше, кут між даною прямою і її проекцією на площину. Нехай A_1 – ортогональна проекція (основа) точки A . Тоді A_1B_1 і A_1C_1 – проєкції (основи) прямих AB і AC на площину Π відповідно. За таких обставин, AB буде лінією найбільшого нахилу, якщо з умови теореми логікою міркувань впливатиме той факт, що $\angle AC_1A_1 = \varphi' < \angle AB_1A_1 = \varphi$. Таким чином, доведення теореми зводиться до

встановлення істинності записаної нерівності.

Розгорнемо **умову**. Оскільки $AB \perp h$, а $h \parallel \Pi$, то $h \parallel s$ (відповідно до ознаки паралельності прямої і площини) і $AB \perp s$ (за наслідком із властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Скориставшись теоремою про три перпендикуляри, матимемо $A_1B_1 \perp s$. Отже, A_1B_1 – перпендикуляр до прямої s у

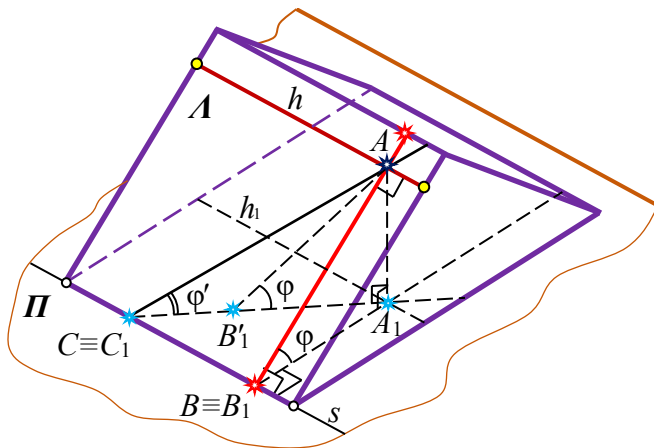


Рис. 1.23

площині Π , а A_1C_1 – похила до неї ж, тому $A_1B_1 < A_1C_1$. Відкладемо на A_1C_1 відрізок $A_1B'_1 = A_1B_1$ та з'єднаємо точки B'_1 і A . У трикутнику $AC_1B'_1$ кут AB'_1A_1 , рівний φ ($\triangle AA_1B_1 = \triangle AA_1B'_1$), є зовнішнім, а отже, більшим будь-якого внутрішнього не суміжного з ним кута. Що й призводить до очікуваного результату: $\varphi' < \varphi$, тобто пряма AB площини Λ , перпендикулярна до лінії рівня h цієї площини, справді є лінією найбільшого нахилу до площини основи Π .

Очевидно, що у практичній стереометрії за лінію рівня тієї чи іншої грані багатогранника доцільно відразу ж обирати їх спільне із гранню основи ребро s , яке, завдяки саме такому розташуванню відносно площини Π , досить часто називають ребром нульового рівня.

Таким чином, двогранний кут можна вимірювати лінійним кутом, утвореним прямою найбільшого нахилу однієї грані багатогранника до іншої його грані – основи (за вибором виконавця); точніше, – до проєкції лінії найбільшого нахилу певної грані на площину основи. Це, у свою чергу, задачу відшукування двогранного кута зводить до задачі на побудову кута між визначеними прямою і площиною, що не менш цікаво і важливо геометрично.

Отже, повернувшись до умови задачі, знайдемо ще один змістовно привабливий алгоритм побудови лінійного кута заданого двогранного кута при ребрі SC (рис. 1.24). Для цього досить, наприклад, із вершини B опустити перпендикуляр BQ на грань SAC , а потім з'єднати точку A з точкою Q до перетину з ребром SC у точці L . Кут ALB – шуканий. Тут роль основної площини

відіграє грань SAC , а QL – ортогональна проєкція BL на цю грань.

Побудову точки Q на апофемі SM грані SAC у метрично визначеному трикутнику SBM , де $\angle S_0OM = 90^\circ$, а $\angle S_0MO = 60^\circ$, можна виконати аналогічно попередньому, та ще й виключно графічним методом; трикутник S_0BM – суміщення з картинною площиною трикутника SBM .

Уміння ж будувати точку Q , поряд із цим, дає можливість зображати на проєкційному кресленні кут нахилу до грані SAC будь-якої прямої з інших граней піраміди (див., напр., $\angle BKP$, де K – яка завгодно точка на ребрі SC).

Примітка. Природно, що в умовах школи висновок цієї задачі мав би дещо інше (більш звичне) звучання, а саме: «Обчислити (а не побудувати) лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі». Чи важко це зробити? Так, подати аналітичні вираження і числові обрахунки зовсім неважко, якщо правильно зорієнтуватися у взаємному розташуванні визначальних елементів заданої стереометричної фігури.

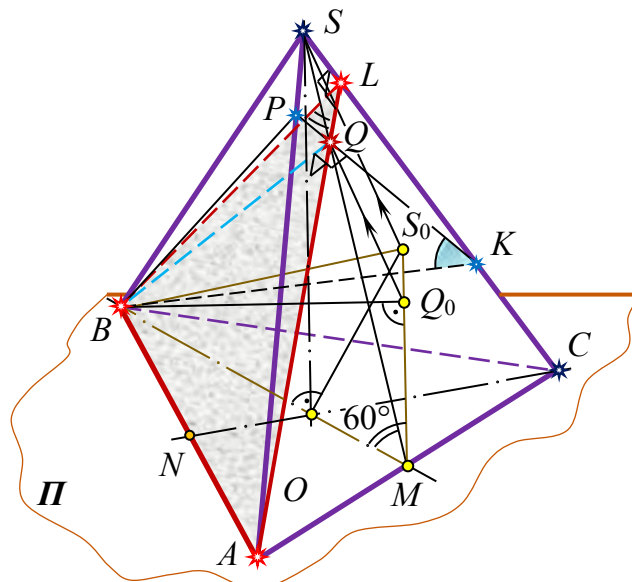


Рис. 1.24

Отже, нехай $AB = BC = AC = 1$. Тоді $NA = \frac{1}{2}$ і (здайте $\triangle NLA$) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{NA}{NL}$, тобто відшукування градусної міри $\angle ALB = \alpha$ зводиться до встановлення висоти рівнобедреного трикутника ALB . Очевидно, що NL можна було б обчислити скориставшись, наприклад, теоремою Піфагора у трикутнику NSL ($\angle L = 90^\circ$): $NL = \sqrt{NS^2 - SL^2}$ (*). Позначимо (для зручності) $SL = x$, тоді $LC = SC - x$. Виразимо ще раз відрізок NL з іншого прямокутного трикутника NLC : $NL = \sqrt{NC^2 - LC^2}$. Із урахуванням рівності (*) та введених позначень, матимемо: $NS^2 - x^2 = NC^2 - (SC^2 - x^2)$ (**). Тепер (без зайвих пояснень) знайдемо в послідовному переліку, один за другим, довжини трьох відрізків NC , NS і SC . Отже, $\triangle NCA$: $NC = \sqrt{AC^2 - NA^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $NO = \frac{1}{3}NC = \frac{\sqrt{3}}{6}$. $\triangle SNO$: $NS = 2NO = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\triangle SNA$: $SA = \sqrt{NS^2 - NA^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = SC$. Підстановкою щойно одержаних значень у (**), знаходимо: $x = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{7}}$. Тому (див. (*)), $NL = \frac{3}{2\sqrt{7}}$. Нарешті матимемо таке:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cong 0,882 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \cong 41^{\circ}30' \text{ і } \alpha = 83^{\circ}.$$

Зрозуміло, що в останньому випадку для виконання завдання, яке носить винятково обчислювальний характер, учителю не обов'язково користуватися кресленням-моделлю. Цілком достатньо мати наочне креслення-картину, на якому точка L – вершина трикутника ABL – вибирається виконавцем довільно, за власним розсудом.

Варто додати таке: хоч роздуми стосовно відшукування зображення та реальної градусної міри двогранного кута при ребрі піраміди SC й завершено, все ж таки, якби ми зараз запропонували до розгляду іншу конструктивну задачу, то в читача, можливо, залишилося б відчуття невдоволення, незавершеності в роботі. Адже мимохідь було порушено питання про кут між прямою на поверхні піраміди (ребро, до речі, теж належить поверхні піраміди) і площиною, що визначається деякою гранню багатогранника. Очевидно, що вміння обґрунтовано строго *опускати перпендикуляр на проєкційному кресленні піраміди з будь-якої її вершини на протилежну грань (проводити висоту; напр., відрізок BQ на рис. 1.24) тепер уже налаштовує, щонайперше, на швидку та якісну побудову зображення такого кута ($\angle BKP$). А чи не можна, до того ж, графічно циркулем і лінійкою одержати його оригінальне представлення? Виявляється, що й це можна зробити, якщо однозначно визначитися з розташуванням точки K на ребрі SC , наприклад, відмітивши її безпосередньо на зображенні або ж задавши цю точку певним відношенням $SK : KC$. Нехай, наприклад, $SK : KC = 2 : 1$ (рис. 1.25).*

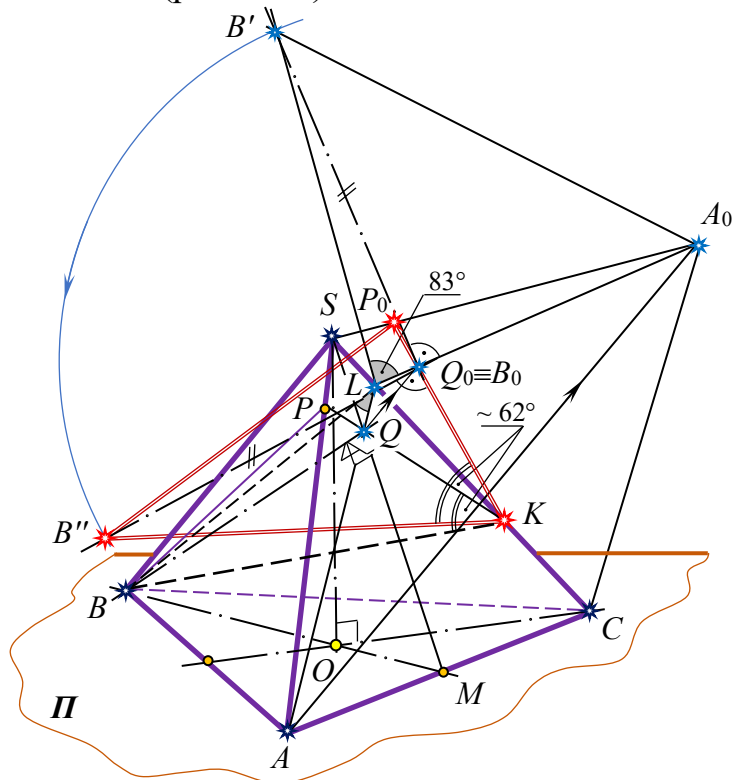


Рис. 1.25

На початку операцією суміщення (вісь $SC \equiv S_0C_0$, див. перший спосіб розв'язання), «поставимо» задану піраміду гранню $SAC(SA_0C)$ на картинну площину (рис. 1.25). Тут, очевидно, її висота BQ проєкціюється в точку Q_0 , яка

легко будується на LA_0 – за напрямом $A \rightarrow A_0$ рисунково означеної перспективно-афінної відповідності. Знаючи, що двогранний кут при ребрі SC дорівнює 83° (див. другий спосіб розв’язання), наступним суміщенням (із віссю $LA_0 = L'A'_0$) проєкціювального трикутника ABL (A_0B_0L), дістанемо справжню (до подібності) довжину висоти піраміди BQ у вигляді відрізка $B'Q_0$ (див. трикутник $A_0B'L$, в якому $B'Q_0 \perp LA_0$). Нарешті, аналогічно попередньому, виконаємо останнє суміщення трикутника KPB (KP_0B''), обертаючи його вершину B' навколо сторони KP_0 так, щоб були витримані умови $B''Q_0 \perp KP_0$ і $B''Q_0 = B'Q_0$. Кут $B''KP_0 \cong 62^\circ$ (з точністю до побудови і замірів транспортиром) й буде шуканим.

Напевно, що набагато простіше у вирішенні останньої пропозиції виконати суміщення усіх трьох бічних граней піраміди із площиною зображень, обертаючи їх навколо сторін AB , BC і AC відповідно. Потім, наступним кроком, із розгортки слід вилучити істинно оригінальні відрізки $B'P'$ (грань $A'B'S'$), $P'K'$ (грань $A'C'S''$) і $K'B'$ (грань $C'B'S'''$) та побудувати на вільному місці поля креслення трикутник $B'P'K'$ за трьома вже відомими його сторонами. Це не складно зробити ще й тому, що всі бічні грані піраміди рівні. Отже, справа за вами! З огляду на відчутну цінність наведених міркувань та побудов, реалізуйте цю прикладну ідею самостійно.

Щоб перевірити себе, власне, в якості виконавця схожих дій на проєкційних кресленнях і, навіть, у чомусь задовольнити особисті амбіції, проведемо відповідні обчислювальні операції стосовно цього ж самого кута.

Із попереднього відомо, що $BC = 1$, $SB = SC = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$, $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $SM = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Розглянемо спочатку трикутник SBM , в якому $BQ \perp SM$. Нехай $SQ = x$, тоді $QM = SM - x$ і $SB^2 - x^2 = BM^2 - (SM - x)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{4\sqrt{3}}$; $BO = \sqrt{SB^2 - x^2} = \frac{3}{4}$. Йдемо далі, в трикутнику SBK $SK = \frac{2}{3}SC = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$; косинус кута BSC знайдемо у трикутнику бічної грані піраміди BSC (скориставшись, до діла, теоремою косинусів): $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \angle BSC \Rightarrow \cos \angle BSC = \frac{1}{7}$. Отже, $BK^2 = SB^2 + SK^2 - 2SB \cdot SK \cdot \cos \angle BSC$ і $BK = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{79}}{\sqrt{3}}$. Нарешті, у прямокутному трикутнику BQK дістанемо: $\sin \angle BKQ = \frac{BQ}{BK} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{79}} \cong 0,877 \Rightarrow \angle BKQ \cong 61^\circ 17'$. Задачу в різних варіаціях розв’язано повністю.

Результат обчислень дозволяє стверджувати, що явно неочевидні графічні операції, що кваліфіковано проведені на картинній площині, досить точні. Хоч незначна побудовна похибка ($\sim 1,17\%$) все ж має місце. Із цим, у свою чергу, ще раз переконуємося, що на проєкційних кресленнях у вільному їх виконанні, як і на комплексних кресленнях Г. Монжа, достатньо складні геометричні побудови можна виконувати з надзвичайно високим ступенем точності.

Завершуючи, підкреслимо: суть важливо, щоб у розмаїтті способів розв’язання типової задачі, щойно розглянутої в деталях, читач вирізнив загальний геометричний підхід до проведення перпендикуляра з будь-якої точки на яку завгодно грань чи на який завгодно переріз метрично визначеного

багатогранника. Адже означену дію слід кваліфікувати як одну з основних у метричній стереометрії.

Задача 3. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник $ABCD$ із відношенням сторін $AB : AD = 1 : 3$. Кожне бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайти кут, який утворює з бічною гранню SCD піраміди пряма OQ , якщо точка O є основою висоти піраміди SO , а точка Q належить її бічному ребру, причому $SQ = 3QB$.

Оскільки бічні ребра рівнонахилені до площини основи піраміди (рис. 1.26), то її висота SO проєкціюється в точку перетину діагоналей прямокутника $ABCD$: $O = CA \cap BD$, а $SA = SB = SC = SD$. Крім цього, пряма OQ належить площині осьового перерізу піраміди SBD , тому нехай вона перетинає промінь SD у деякій точці F .

Кут між прямою і площиною вимірюється, як відомо, кутом між цією прямою і її ортогональною проєкцією на площину. Тому з будь-якої точки прямої OQ слід опустити перпендикуляр на площину грані SCD . Для цього проведемо спочатку апофему SM у цій грані (точка M – середина ребра CD) та з'єднаємо точки M і O . Площини (SCD) і (SMO) взаємно перпендикулярні, бо $CD \perp SM$ і $CD \perp OM$ (згідно з теоремою про три перпендикуляри). Таким чином, відрізок ON , перпендикулярний апофемі SM , буде перпендикулярним також до площини грані SCD , якій належить NF , а отже, у прямокутному трикутнику ONF ($\angle N = 90^\circ$) кут OFN – шуканий. Покладемо $\angle OFN = \alpha$.

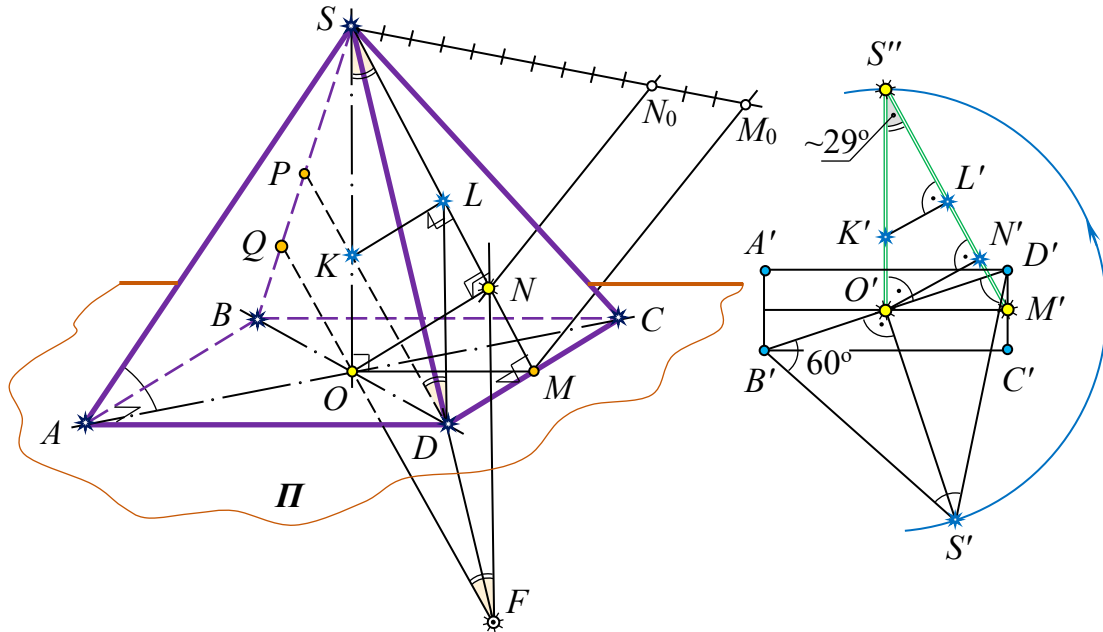


Рис. 1.26

Для зручності в майбутніх розрахунках, виконаємо на проєкційному кресленні додаткові побудови. Найперше, через точку D проведемо пряму $DP \parallel OQ$, а потім через точку $K = DP \cap SO$ – пряму $KL \parallel ON$ у трикутнику SOM . Із умови випливає, що $BQ : QS = 1 : 3$. Але $DO = OB$, тому, за теоремою Фалеса, $BQ = QP$ і точка P ділить відрізок BS навпіл ($BP = PS$). Очевидно також, що $\angle KDL = \angle OFN = \alpha$.

Щоб компактно провести обчислення, покладемо $AB = 1$. Покроково (вже у

числовому вираженні) одержимо наступні результати: $BC = 3$, $OM = \frac{3}{2}$, $AC = SC = \sqrt{10}$, $OC = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $SO = \frac{\sqrt{30}}{2}$, $SM = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

Далі бачимо, що прямокутні трикутники SKL і SOM подібні ($\angle S$ – спільний), тому $\frac{KL}{OM} = \frac{SK}{SM}$ і $KL = \frac{OM \cdot SK}{SM}$. Ураховувавши, що трикутник SBD рівносторонній, а K є точкою перетину його медіан, маємо: $DK = SK = \frac{2}{3}SO = \frac{\sqrt{30}}{3}$. Отже, $KL = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{39}}$. Нарешті, із прямокутного трикутника DKL знайдемо остаточний результат: $\sin \alpha = \frac{KL}{DK} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ ($\alpha \cong 28^\circ$).

Задачу на обчислення розв'язано. Проте, згідно з умовою, проєкційне креслення піраміди позиційно і метрично визначене – на нього витрачено п'ять метричних параметрів: $AB \perp BC$, $BC = 3AB$, $SO \perp AC$, $SO \perp BD$, $\angle SAC = 60^\circ$. Побудови ж на **кресленні-моделі**, як відомо, не можуть виконуватися довільно, а розташування точки N на апофемі SM просто моделюється.

Графоаналітичний метод. Відомо, що в прямокутному трикутнику SOM : $OM^2 = MN \cdot SM$. Звідси одержимо $MN = \frac{3\sqrt{39}}{26}$. Окрім цього, $NS = SM - MN = \frac{10\sqrt{39}}{26}$, тому $MN : NS = 3 : 10$. Побудувавши за встановленим відношенням на апофемі SM точку N , проводимо потому пряму $KL \parallel ON$.

Графічний метод. Ще переконливішого результату можна досягти шляхом послідовного виконання циркулем та лінійкою трьох визначальних суміщень (див. винесене креслення).

Спочатку, взявши за вісь відомого перетворення пряму $OM \equiv O'M'$, знайдемо справжню форму прямокутника $A'B'C'D'$. Далі, обертанням навколо діагоналі прямокутника $B'D'$, «покладемо» на картинну площину рівносторонній трикутник $S'B'D'$. Нарешті, за катетом $O'M'$ із першого суміщення і катетом $O'S'' = O'S'$ – із другого, знайдемо істинну форму трикутника $S'O'M'$. За правилами планіметрії, з вершини O' опускаємо перпендикуляр $O'N'$ на $S''M'$, чим визначимося з точкою N на зображенні апофемі SM , бо $\frac{M'N'}{N'S''} = \frac{MN}{NS}$. Провівши $KL \parallel ON$, завершимо побудови.

Суттєво, що останнє суміщення ($\Delta S''O'M'$) визначає на винесеному кресленні (з точність до побудови) ще й градусну міру шуканого кута. Справді, прямокутні трикутники DKL і SKL рівні за катетом (KL – спільний) і гіпотенузою ($DK = SK$), тому $\angle O'S''M' = \alpha$, а його градусну міру можна заміряти транспортиром.

Обміркуйте самостійно: як, з урахуванням рівності трикутників DKL і SKL , можна помітно пришвидшити формальне відшукування градусної міри кута α ? Підказ, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OM}{SO}$.

Задача 4. Дано зображення правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, висота якої рівна стороні трикутника основи. Через її вершини C , A_1 і B_1 проведена площина Σ . Потрібно із точки P , що належить верхній грані призми, опустити перпендикуляр на площину $\Sigma(A_1B_1C)$.

Шуканий перпендикуляр (рис. 1.27) обов'язково матиме напрям будь-якого іншого перпендикуляра, котрий легко можна опустити на площину $\Sigma(A_1B_1C)$ із помірковано обраної учнем точки призми, хоча б, приміром, з її вершини C_1 . Останній лежатиме в бісекторній площині $\Delta(CC_1M)$, що конструктивно привабливо та ще й просто обґрунтовується: Δ і Σ взаємно перпендикулярні, оскільки $A_1B_1 \perp C_1M$ і $A_1B_1 \perp CM$.

Відомим універсальним прийомом, щонайперше, знайдемо справжню форму прямокутного трикутника $C'C_1M'$, залишивши без зміни на кресленні одну з його сторін, наприклад, $C'C_1 \equiv CC_1$ (вісь суміщення). Пам'ятаючи, що в оригіналі призма пряма ($\angle C'C_1M' = 90^\circ$) і всі її ребра рівні між собою (зокрема, $C'C_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$, тобто $\Delta A_1B_1C_1$ – правильний), сформуємо наступний ланцюжок побудов: 1) на відрізку CC_1 , як на стороні, будемо рівносторонній трикутник CC_1K_0 і з вершини C_1 проведемо його висоту (медіану і бісектрису) C_1M_0 ; 2) з початком у точці C_1 і перпендикулярно CC_1 проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок C_1M' , рівний відрізку C_1M_0 , та з'єднаємо точки C і M' . Прямокутний трикутник CC_1M' визначає оригінальну форму трикутника $C'C_1M'$. Тому залишилося лише з точки C_1 опустити перпендикуляр C_1F на гіпотенузу знайденого трикутника і розділити точкою F відрізок CM у відношенні, в якому точка F' ділить відрізок CM' , що й зроблено на рисунку. Напевне, що відрізок C_1F і буде зображенням перпендикуляра, опущеного з точки C_1 на площину $\Sigma(A_1B_1C)$.

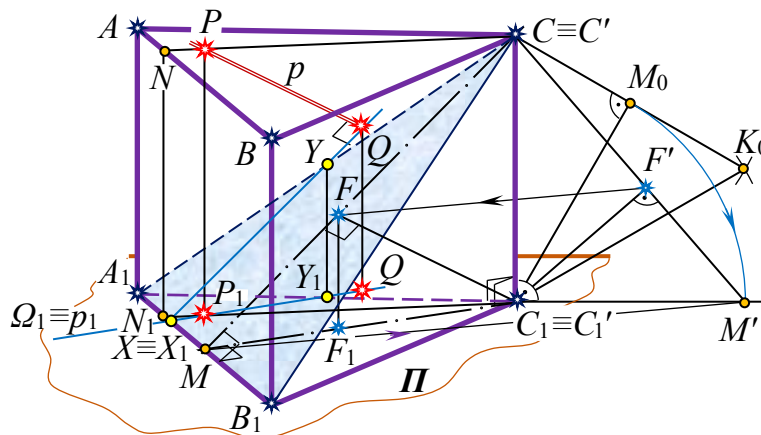


Рис. 1.27

Далі, через задану на зображенні точку $P(P_1)$ проводимо пряму $p(p_1)$, паралельну щойно побудованому перпендикуляру $C_1F(C_1F_1)$, і знаходимо її точку перетину $Q(Q_1)$ із площиною $\Sigma(C(C_1), A_1B_1)$. Тут у ролі площини-посередника залучено проєкціювальну площину Ω , що цілком визначається прямою $p(p_1)$ і проєкціювальним променем PP_1 . Нарешті, пряма $XY(X_1Y_1)$ легко будується в перетині площин Σ і Ω , а точка $QQ_1 = XY(X_1Y_1) \cap p(p_1)$ буде основою шуканого перпендикуляра $PQ(P_1Q_1)$.

Примітка. Ми щойно вперше зіткнулися ще з однією (другою в переліку) основною метричною задачею (ОМЗ-2) простору – на візуальне моделювання відрізка-відстані від точки до площини за умови, що картинна площина метрично визначена зображенням деякого стереометричного тіла (в нашому

випадку – правильною трикутною призмою). Беручи до уваги хід попередніх міркувань, подаємо **узагальнююче правило-орієнтир** її строгого розв'язання: **1).** *Встановлюємо напрям шуканого перпендикуляра, тобто візуально вибираємо точку, з якої порівняно просто, за вже відомим чи майже очевидним побудовним алгоритмом операцій можна провести пряму, перпендикулярну даній площині.* **2).** *Через дану точку проводимо пряму, паралельну цьому напрямку.* **3).** *Будуємо перетин останньої прямої та заданої площини.*

Чи можна **аналітично** розрахувати розташування точки F на відрізку CM ? Так, напевне, що можна. Спробуйте читачу самостійно виконати ці зовсім прості формальні алгебричні перетворення за обґрунтованими (як водиться) правилами та проілюструйте розв'язання задачі графоаналітичним методом на окремому кресленні.

Задача 5. *Дано зображення правильної трикутної піраміди $SABC$. Бічне ребро піраміди у два рази більше сторони основи. Потрібно побудувати на поверхні піраміди геометричне місце точок, рівновіддалених від двох вершин піраміди S і A .*

Нагадаємо, що працюючи строго за правилами геометрії та графіки, досягти серйозних наочно-рисункових результатів можна лише на метрично визначених зображеннях. Переконайтеся самостійно, що в цьому випадку, як і у всіх інших, стереометрична фігура на повному проєкційному кресленні обумовлена виключно п'ятьма метричними параметрами.

Як і в попередніх випадках, варто насамперед змодельовати покроковий загальний геометричний підхід до вирішення сформульованої пропозиції в уявленнях, тобто чітко визначитися із правилом-орієнтиром обов'язкових побудов у просторовій конструкції. Наразі відомо, що геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин S і A , є площина Σ , перпендикулярна SA та інцидентна точці P , яка ділить цей відрізок навпіл (рис. 1.28). Отже, першим кроком у комплексі дійств, що визрівають у метрично-позиційній схемі, має бути проведена через точку P ($SP = PA$) площина Σ встановленого напрямку, а на завершення (другий крок) – треба знайти фігуру перерізу поверхні піраміди цією площиною. На користь справи нагадаємо, що цілковите розуміння, «бачення» уявлюваного просторового алгоритму забезпечує гарантовано правильний шлях у наступних побудовних операціях циркулем і лінійкою безпосередньо на зображенні.

1-й спосіб розв'язання (рис. 1.28, *a*). Скористаємося спочатку внутрішніми взаємними залежностями між визначальними елементами піраміди, які впливають прямо з умови задачі (метод «без методів», «принцип висот»).

Констатуємо, що трикутник APB рівнобедрений ($SP = PA = AB$ за умовою). Тому ділимо відрізок PB точкою Y навпіл і проводимо першу висоту AU цього трикутника. Але ж у трикутнику SAB , оскільки він теж рівнобедрений ($SA = SB$ за умовою), медіана SM є одночасно і висотою. Таким чином, відрізок PZ , проведений паралельно SM , є ще однією (другою) висотою трикутника APB . Висоти трикутника, як відомо, перетинаються в одній точці. Нехай $N = AU \cap PZ$. Отже, третя висота BX трикутника APB однозначно задається його вершиною B і ортоцентром N . Такими реаліями у грані SAB встановлено перпендикулярний

напрямок до ребра SA . Залишилося лише через точку P у цій самій грані провести відрізок PQ , паралельний XB , а через точку Q у грані SBC – відрізок QR , паралельний BC (адже площина Σ розділяє ребра SB і SC правильної піраміди в перетині з ними в одному і тому ж відношенні, що очевидно). Точки P , Q і R в об'єднанні зі всіма точками відрізків PQ , QR і RP й будуть шуканим геометричним місцем точок на поверхні піраміди.

Цікавим у запропонованому алгоритмі конструктивних дій є факт злиття (накладання) кроків проведення через точку P площини, перпендикулярної ребру SA , і відшукування перерізу піраміди цією площиною. Дві, загалом різні за геометричною суттю операції (метрична і позиційна), в даному конкретному випадку неподільні.

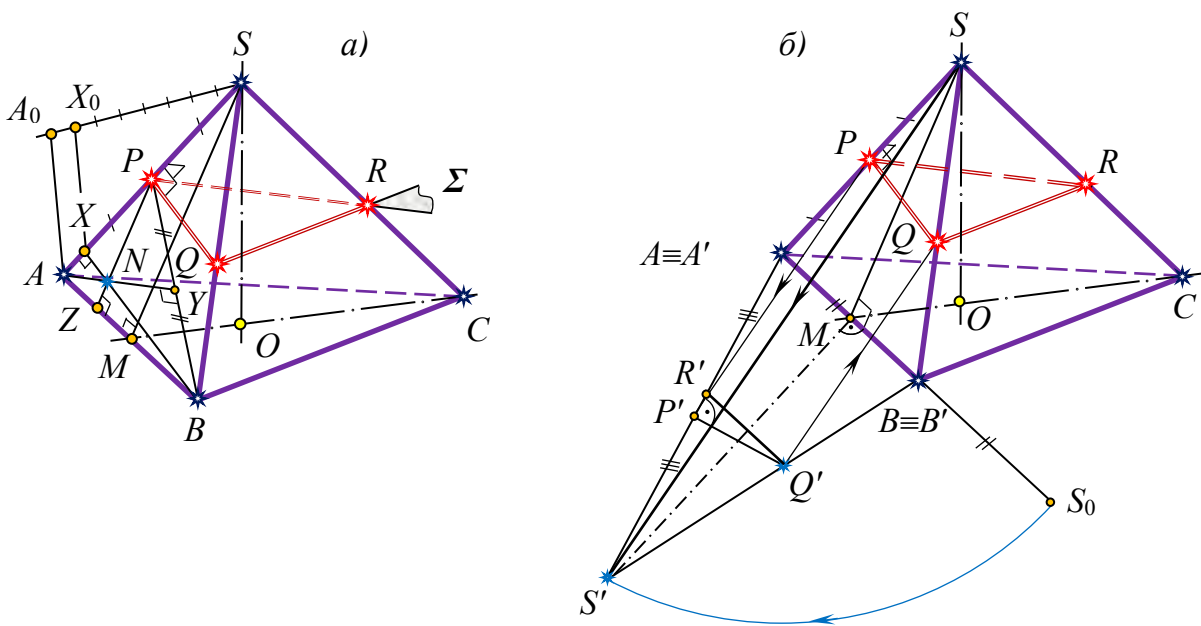


Рис. 1.28

2-й спосіб розв'язання (рис. 3.28, б). Сумістимо грань $S'A'B'$ із картинною площиною, залишивши без змін на проєкційному кресленні ребро $AB \equiv A'B'$. Тут у побудові $MS' \perp AB$ і $AS' = BS' = 2A'B'$. Провівши через точку P' ($A'P' = P'S'$) відрізок $P'Q'$ справді під прямим кутом до $A'S'$, одержимо точку Q' , яка з шуканою точкою Q споріднена пропорцією: $S'Q' : Q'B' = SQ : QB$. Точку Q будемо звичним прийомом, а точку R – як у попередньому випадку.

3-й спосіб розв'язання. Розрахуємо аналітично розташування точки X на ребрі SA . Нехай $AB = 1$, а отже, $SA = SB = 2$. Позначимо $AX = x$, тоді $XS = AS - x$. У трикутнику SAB буде істинною рівність: $AB^2 - x^2 = SB^2 - (AS - x)^2$. Звідси $x = AX = \frac{1}{4}$, $XS = \frac{7}{4}$ і $AX : XS = 1 : 7$. Графічне завершення задачі, яке відтворює на моделі щойно знайдені співвідношення, є тривіальним (рис. 1.28, а).

Задача 6. Дано зображення куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка F належить ребру CC_1 і $CF : FC_1 = 2 : 3$, а точка N – ребру BC_1 і $B_1 N : NC_1 = 1 : 4$. Побудуйте зображення кута нахилу площини перерізу $\Sigma(D_1 FN)$ до площини основи куба та знайдіть його градусну міру.

Нагадаємо, що при нагоді кут між двома площинами резонно зображати лінійним кутом, утвореним прямою найбільшого нахилу однієї площини до

іншої площини, точніше – до ортогональної проєкції лінії найбільшого нахилу на останню із площин (див. задачу 2). Якщо припустити, що нижня основа куба $A_1B_1C_1D_1$ розташовується в просторі горизонтально, то нам випадає побудувати у площині перерізу Σ лінію схилу, перпендикулярну її власній нульовій горизонталі (сліду) на визначеній площині основи.

Згідно з теоремою про три перпендикуляри, ортогональна проєкція лінії схилу на площину $(A_1B_1C_1D_1)$ (рис. 1.29) теж має бути перпендикулярною до сліду D_1N даної площини Σ . Тому задача зводиться до побудови на площині основи куба, що є в оригіналі квадратом, перпендикуляра до прямої D_1N , який проходить через точку C_1 – ортогональну проєкцію (основу) точки F . Для побудови шуканого перпендикуляра скористаємося прийомом, описаним нижче (задача 1, рис. 1.43). Проведемо $NP \parallel B_1A_1$ і $PQ \parallel D_1B_1$. Тоді пряма QC_1 й буде змодельованим нами перпендикуляром. Справді: $\frac{A_1Q}{QB_1} = \frac{A_1P}{PD_1} = \frac{B_1N}{NC_1}$. Точка M перетину прямих D_1N і QC_1 є слідом лінії схилу на площині основи, яку одержимо з'єднавши відрізком точки F і M . Кут FMC_1 (α) на зображенні куба буде шуканим.

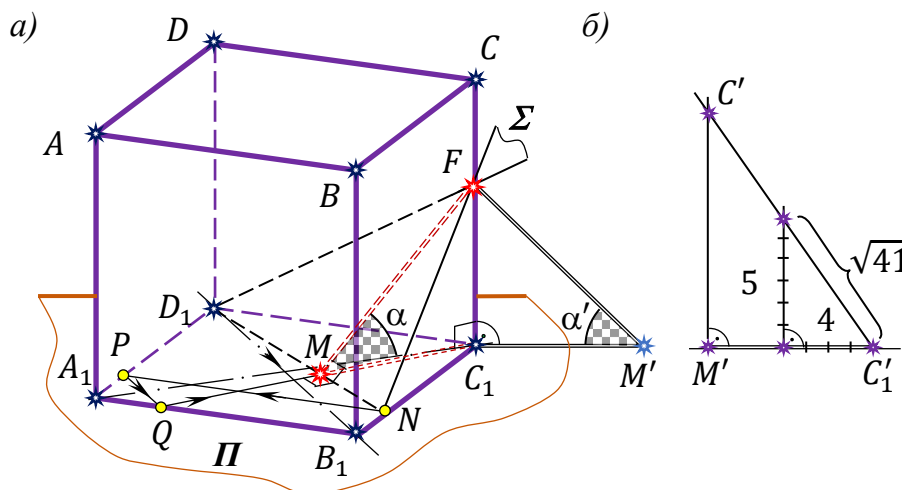


Рис. 1.29

Як знайти оригінальну форму трикутника $FM C_1$, а отже й градусну міру кута з вершиною в точці M ? Зробимо це **графоаналітично**, сумістивши прямокутний трикутник $F'C'_1M'$ із картинною площиною. З цією метою за вісь обертання доцільно обрати бічне ребро куба $CC_1 \equiv C'C'_1 = a$. Тут, в іншому прямокутному трикутнику $D'_1C'_1N'$, $D'_1N' = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{41}}{5}$, а C'_1M' є перпендикуляром, проведеним із вершини прямого кута C'_1 на його гіпотенузу D'_1N' . Тому маємо $(D'_1C'_1)^2 = D'_1M' \cdot D'_1N'$ і $D'_1M' = \frac{5a}{\sqrt{41}}$. Окрім того, $(C'_1M')^2 = D'_1M' \cdot M'N'$ і $C'_1M' = \frac{4a}{\sqrt{41}}$. Тепер, дякуючи вже зображеному відрізку $CC_1 = C'C'_1 = a$, легко будується відрізок C'_1M' (рис. 1.29, б), а за ним і образ FC_1M' суміщеного із площиною зображень трикутника $F'C'_1M'$ (рис. 1.29, а). Ретельний замір транспортиром дає результат: $\angle M' = \alpha' = 44^\circ$.

Оскільки у прямокутному трикутнику $F'C'_1M'$ його катет $F'C'_1 = \frac{3}{5}a$, то

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{F' C_1'}{C_1' M'} = \frac{3\sqrt{41}}{20} \approx 0,9605 \Rightarrow \alpha' \approx 43^\circ 50'$$

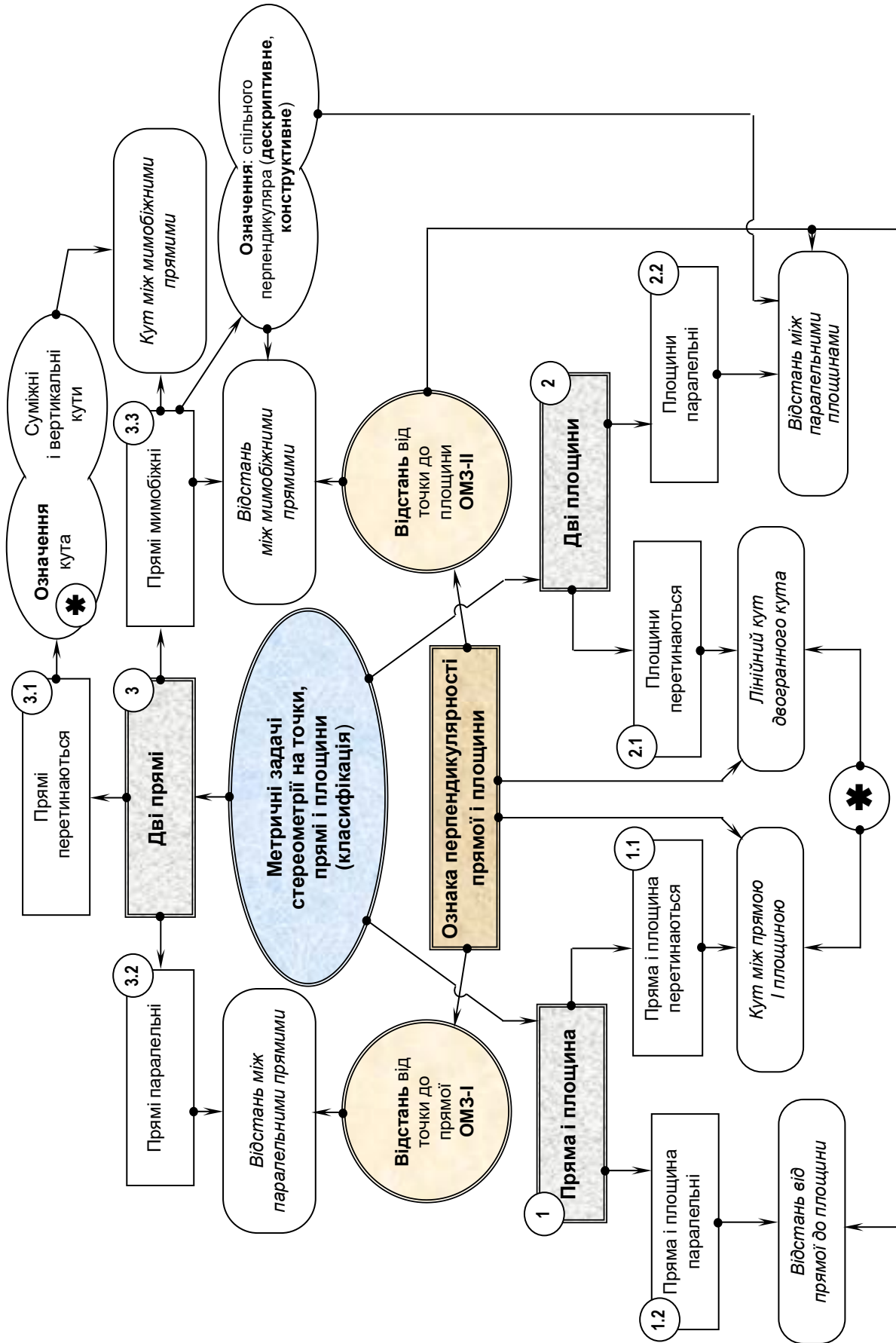


Схема. Основні (й похідні) метричні задачі

До речі, наведені розрахунки дозволяють через відношення відрізків D_1M і MN ($D_1M' = \frac{5a}{\sqrt{41}}$) графічно просто визначитися з розташуванням точки M на відрізку D_1N . Справді, $M'N' = D_1N' - D_1M' = \frac{16a}{5\sqrt{41}}$. Таким чином, остаточно матимемо: $D_1M : MN = D_1M' : M'N' = 25 : 16$.

Поміркуйте і реалізуйте самостійно на окремому (винесеному) кресленні **графічний** метод відшукування форми трикутника $F'C_1M'$ хоча б, скажімо, методом суміщення із площиною зображень спочатку квадрата $A_1B_1C_1D_1$, а потім і трикутника NFC_1 , де за вісь обертання практично оправдано взяти сторону квадрата $B_1C_1 \equiv B'_1C'_1$.

Задача 7. Дано зображення правильної чотирикутної піраміди $SABCD$, бічне ребро якої (в оригіналі) дорівнює діагоналі квадрата основи $ABCD$. Побудувати зображення лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при бічному ребрі SA .

Оскільки діагональ квадрата BD (рис. 1.30) перпендикулярна у просторі осьовому перерізу піраміди SAC ($BD \perp AC$ і $BD \perp SO$, що безсумнівно), то $BD \perp SA$. Тому площину, перпендикулярну ребру SA , найкраще зобразити діагоналлю BD і перпендикуляром OL , опущеним у прямокутному трикутнику SAO з вершини прямого кута O на гіпотенузу SA . Основа цього перпендикуляра L буде вершиною шуканого лінійного кута BLD ($\angle BLD = \alpha$).

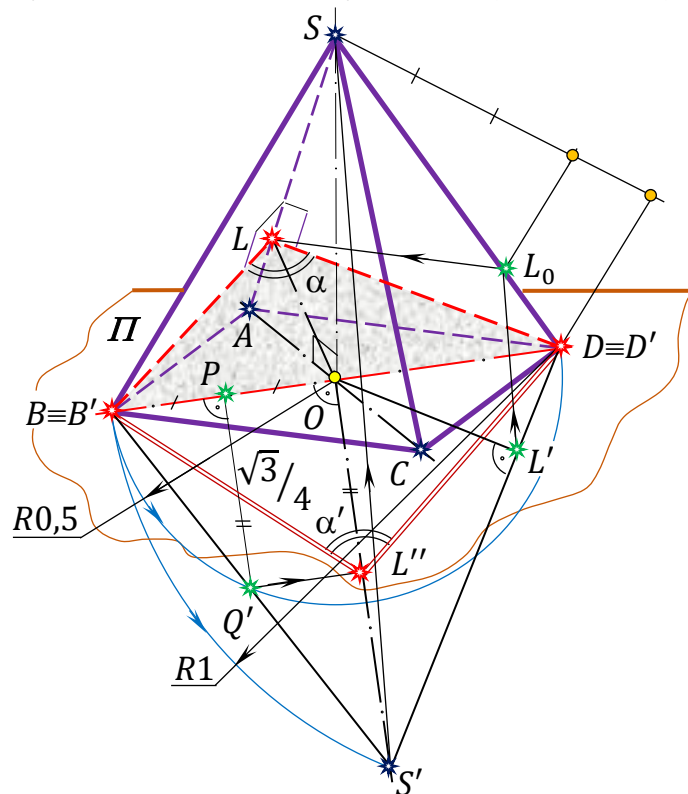


Рис. 1.30

Прості внутрішні взаємозалежності між елементами осьового перерізу піраміди SAC індукують найкоротший шлях до побудови точки L – без звертання до методу суміщення. Які ці залежності? Знайдіть їх і обґрунтуйте самостійно!

1-й спосіб розв'язання. На початку потрібно сумістити з картинною

площиною рівносторонній трикутник $S'B'D'$ за умови, що $BD \equiv B'D'$ – вісь суміщення. Далі, опустивши з точки $O \equiv O'$ перпендикуляр $O'L'$ на сторону трикутника $S'D'$, одержимо, як у планіметрії, графічне представлення визначального відношення відрізків на прямій, в якому шукана точка L розділяє ребро SA . Справді, якщо $L'L_0 \parallel S'S$, а $L_0L \parallel DA$, то $\frac{S'L'}{L'D'} = \frac{SL_0}{L_0D} = \frac{SL}{LA}$.

2-й спосіб розв'язання. Нехай $A'C' = B'D' = S'A' = 1$. Тоді $A'O' = \frac{1}{2}$. Далі, у прямокутному трикутнику $A'O'S$ матимемо: $(O'A')^2 = A'L' \cdot A'S' \Rightarrow A'L' = \frac{1}{4}$; $L'S' = A'S' - A'L' = \frac{3}{4}$. Отже, $A'L' : L'S' = AL : LS = 1 : 3$. Завершальний (графічний) етап побудови цілком очевидний і зрозумілий із рисунка.

Щоб знайти на моделі натуральну величину трикутника BLD , сумістимо його оригінал $B'L''D'$ із площиною зображень, обертаючи останній навколо тієї ж самої осі $BD \equiv B'D'$. Розділимо відрізок $B'O'$ точкою P' навпіл. Оскільки $B'D' = 4B'P'$, то $P'Q' = \sqrt{3}B'P' = \frac{\sqrt{3}}{4}B'D'$. Проте $B'D' = 1$, тому $P'Q' = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Повернемося до трикутника $A'O'S'$: $(O'L'')^2 = A'L'' \cdot L'S' = \frac{3}{16} \Rightarrow O'L'' = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Отже, $O'L'' = P'Q' = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Таким чином, $\angle B'L''D' = \alpha' \cong 98^\circ$ (як результат безпосереднього замірювання транспортиром) є шуканим.

У трикутнику $O'L''D'$ маємо: $\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \frac{O'D'}{O'L''} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1,1547 \Rightarrow \alpha' = 98^\circ 12'$.

Точка L'' може бути також побудована в перетині кола $\omega(O, r = OL')$ із променем OS' , що не потребує додаткових пояснень.

Звичайно, максимально вдало визначитися в кожній конкретній ситуації щодо того чи іншого методу розв'язання стереометричної задачі на побудову досить непросто, особливо на стадії формування і розвитку навичок та вмінь роботи з уявними просторовими об'єктами. Проте немає сумнівів, тривала і настійлива практика дасть позитивні результати за умов, що студент чи учень має хорошу геометричну базу і терпіння в навчанні. При цьому завжди слід пам'ятати про найбільш відповідальний етап процесу роботи над конструктивною задачею, найбільш творчу його частку – про пошук ключа до її розв'язання через грамотно, вдумливо і змістовно проведений аналіз. Суть цього обов'язкового і вирішального етапу полягає в осмисленому уявленні взаємозв'язків та теоретичному підкріпленні взаємних залежностей між окремими заданими в умові і шуканими в побудові геометричними фігурами. Неоціненну роль в образному пізнанні досліджуваної тривимірної фігури відіграють правильні й наочні проєкційні креслення, виконані швидко і якісно «від руки», а в деяких випадках – правильні, однак зовсім ненаочні комплексні креслення Г. Монжа, яким, як не прикро (на чому вже наголошувалося), не надають належної уваги у шкільній практиці. Досить часто для досягнення кінцевого (чи проміжного) результату в побудові, що притаманно й наступним у тексті задачам, звертаються до так званих «виносних креслень».

Важливо вміти кваліфіковано *переформулювати* пропозиції стереометрії на суто геометричний лад, адже їх помірковане *наочно-образне* моделювання

призване сприяти осмисленню та структурній систематизації матеріалу, який вивчається. *Графічні* та *графоаналітичні* методи розв'язування задач на обчислення, доведення і *побудову*, які реалізуються щоразу візуально, є чільними складовими процесу становлення в суб'єктів навчання динамічних стереотипів просторових уявлень, розвитку логічного мислення засобами геометрії, формування графічно-алгоритмічної культури.

Звісно, мова *геометрії* менш універсальна, ніж природна людська мова, проте їй притаманна виняткова якість – **наочність**. *Унаочнення* викладання й учіння є однією з необхідних умов успішного розвитку особистості.

Наочність, як **фундаментальний принцип дидактики**, був уперше сформульований чеським мислителем-гуманістом Я. А. Коменським. Він вважав, що не зі словесного тлумачення про речі, але з реального спостереження за ними *має розпочинатися всяке навчання*. «Золоте правило дидактики» відомого педагога свідчить про те, що **лише можна**, слід подавати для сприйняття чуттями, а саме: видиме – для сприйняття зором, чуване – слухом, запахи – нюхом, що підлягає смаку – смаком, підвладне дотику – чуттям дотику. Якщо які-небудь предмети відразу можна сприйняти кількома відчуттями, нехай вони схвачуються кількома відчуттями.

Погляди Я. А. Коменського підтримали і розвинули й інші великі педагоги минулого Й. Г. Песталоці та К. Д. Ушинський. Зокрема, К. Д. Ушинський стверджував, що *наочне подання фактів* – це таке учіння, яке будується не на абстрактних уявленнях і словах, а на конкретних образах, безпосередньо сприйнятих дитиною. Цей хід учіння, **від конкретного до абстрактного, від уявлення до думки** настільки природний і ґрунтується на таких прозорих психічних законах, що *відкинути його необхідність може лише той, хто взагалі відкидає потребу рахуватися в навчанні з вимогами людської природи в цілому і дитячої особливо*.

Психологічні дослідження стосовно використання різних засобів наочності проводили й інші знані педагоги минулого. Одні з них стверджували, що наочність навчання передбачає як широке використання відчуття візуальних, сприймань образів, так і постійне опертя на свідчення органів чуття, дякуючи яким досягається безпосередній контакт з дійсністю. Інші, в сучасному трактуванні дидактичного принципу наочності, наголошували на його ролі в підвищенні якості засвоєння знань й умінь, в удосконаленні управлінської діяльності вчителя. Резюмуючи наукові пошуки, дехто з них проголошував тези: *«наочність – це розуміння і активність»*. Усі вони кваліфікували *наочність* як *категорію психології і дидактики*, котра забезпечує зв'язок між конкретним і абстрактним, що сприяє розвитку мислення, а в багатьох випадках служить його надійною опорою.

В геометрії наочність є потужним засобом розуміння природи і сутності дисципліни.

3.2. Метричні задачі з мимобіжними прямими

Традиційно в підручниках для ЗЗСО геометрію означають виключно «як науку про *метричні властивості* геометричних фігур», не вважаючи за потрібне

(начебто задля лаконізму подання дефініції) додати «... і про *закономірності їх взаємного розташування*». В реальному житті, науці та техніці не часто оперують окремо взятими фігурами, більше – їх комбінаціями.

У ситуації з **мимобіжними прямими** суть важливо розуміти, «бачити» в уявленнях, що **позиційна** складова питання однозначно забезпечується двома **метричних** параметрами. Взаємне розміщення таких прямих вичерпно характеризують: *градусна міра кута і відрізок найкоротшої відстані* між ними.

Стосовно першого із двох зазначених параметрів, то його конструктивна сутність обґрунтовується методично просто. Означення кута вводиться традиційно: «*Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються, які паралельні даним мимобіжним прямим*» ([10], п. 31). Звідси прямо випливає, що для відшукування градусної міри кута між заданими мимобіжними прямими a і b (рис. 1.31), потрібно взяти на одній із них, приміром на прямій a , деяку точку P і в площині, визначеній точкою P й іншою прямою b , провести через точку P пряму c , паралельну прямій b . Прямі a і c у

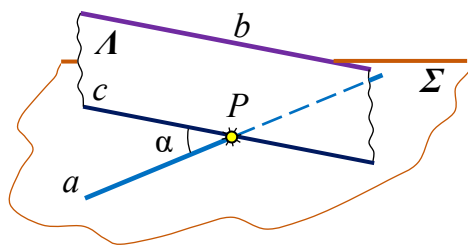


Рис. 1.31

перетині утворюють суміжні та вертикальні кути. Менший з них буде кутом між прямими a і c , тобто кутом, яким вимірюється кут між мимобіжними прямими a і b .

У підручнику доведено твердження, що градусна міра кута між мимобіжними прямими не залежить від вибору пари паралельних їм прямих, що перетинаються. Цей останній факт у навчально-педагогічному процесі означає, що вибір точки P на прямій a варто щоразу здійснювати осмислено, творчо – орієнтовно на якісне візуальне наочно-образне або ж обчислювальне вирішення сформульованої стереометричної пропозиції.

Задача 8. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$, бічні грані якої є квадрати, на ребрах AA_1 і BB_1 узяті відповідно точки P і Q – середини цих ребер. Знайти градусну міру кута між прямими B_1P і C_1Q .

Виконаємо у просторі паралельне перенесення відрізка C_1Q на вектор $\vec{QP} = \vec{B_1A_1}$ (рис. 1.32). Тут точка Q переміститься в точку P , а точка C_1 – у точку D_1 . Причому, за властивостями задіяного перетворення, $D_1P \parallel C_1Q$ і $D_1P = C_1Q$. Крім цього, $C_1D_1 = QP = B_1A_1$, отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – ромб із гострим кутом (B_1), рівним 60° , а кут D_1PB_1 й буде зображенням шуканого кута між заданими мимобіжними прямими B_1P і C_1Q .

Оскільки всі ребра даної призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні, то для зручності виконання обчислювальних операцій покладемо $A_1B_1 = AA_1 = A_1D_1 = 1$. З урахуванням умови задачі, матимемо $B_1P_1 = D_1P = \frac{\sqrt{5}}{2}$, а $B_1D_1 = 2B_1M$. Тепер, застосувавши до трикутника B_1PD_1 теорему косинусів, одержимо наступне: $B_1D_1^2 = B_1P^2 + D_1P^2 - 2B_1P \cdot D_1P \cdot \cos \alpha$. Звідки отримуємо $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$, а $\alpha \cong \cong 101^\circ 30'$. Менший із двох суміжних кутів, утворених мимобіжними прямими B_1P і C_1Q , $\beta = 180^\circ - \alpha = 78^\circ 30'$.

Щоб досягти цього ж результату *графічно*, потрібно виконати два

послідовні суміщення з картинною площиною – спочатку квадрата $A'A_1B_1B'$, а потім і трикутника $P''B_1''D_1''$ (див. рис.). У першому випадку віссю суміщення залишається сторона квадрата $A_1B_1 \equiv A'_1B'_1$, у другому – сторона трикутника $P'B_1 = P''B_1''$. У завершальній побудові оригінального рівнобедреного трикутника $P''B_1''D_1''$ (за трьома сторонами), його сторону $B_1''D_1'' = \sqrt{3}$ знаходимо будь-яким із відомих прийомів, взявши (для зручності) за одиницю довжини сторону квадрата $A'A_1B_1B'$ (рис. 1.32, а, б).

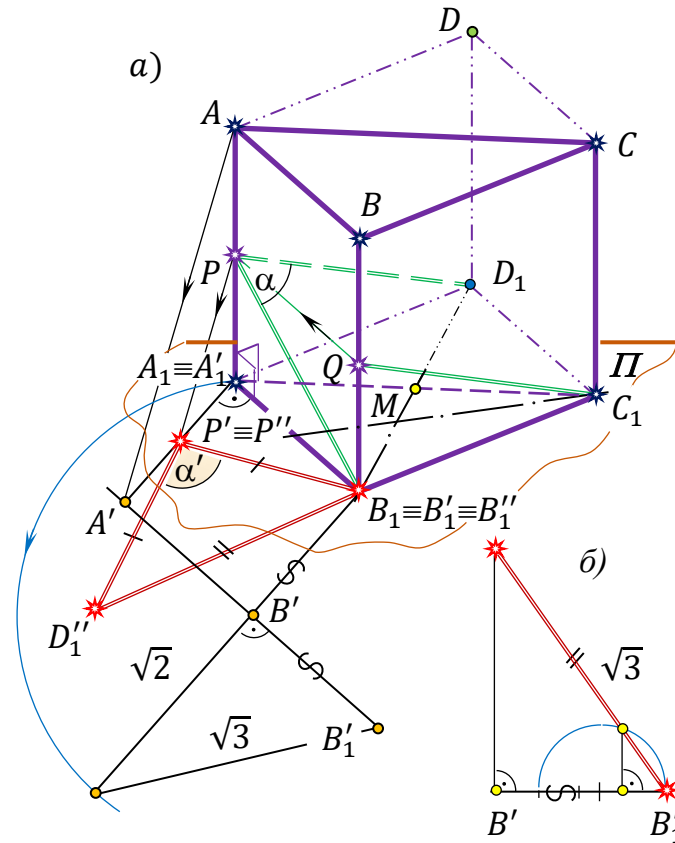


Рис. 1.32

Спробуйте самостійно знайти і графічний, і обчислювальний розв'язки задачі у випадку, коли вихідним рухом у просторі буде виконано, тепер уже, паралельне перенесення відрізка PB_1 на вектор \vec{PA} . Проаналізуйте і поясніть одержаний результат.

Задача 9. У чотирикутній піраміді $SABCD$ основа – паралелограм, із відношенням сторін $AB : BC = 1 : 2$ і гострим кутом, рівним 60° . Грань піраміди SAB перпендикулярна до площини основи і є правильним трикутником. Знайти кут між медіаною DM грані SAD і апофемою SK грані SAB .

Спочатку побудуємо (рис. 1.33) зображення шуканого кута між указаними мимобіжними прямими DM і SK . У розглядуваному випадку це зробити зовсім нескладно. Справді, потрібна нам площина (Λ) визначена, приміром, прямою SK і точкою M , яка належить іншій із двох заданих прямих (DM), на проєкційному кресленні вже є – це площина грані SAB . Проведемо в цій грані відрізок прямої MN , паралельно прямій SK , й одержимо шуканий кут у спотвореному поки що вигляді ($\angle DMN = \alpha$).

Тепер уже, виконавши досить прості розрахунки, знайдемо градусну міру

цього кута. Очевидно, що трикутник MND в оригіналі є прямокутним ($\angle N = 90^\circ$ за умовою і побудовою) і $MN = \frac{1}{2}SK$. Якщо покласти $AB = SA = 1$, то $MN = \frac{\sqrt{3}}{4}SK$. Крім цього, $AD = 2$ і $\angle NAD = 60^\circ$ (за умовою), а $AN = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}$. Тому за теоремою косинусів: $ND^2 = AN^2 + AD^2 - 2AN \cdot AD \cdot \cos \angle NAD = \frac{57}{16}$, звідки $ND = \sqrt{19} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Нарешті, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{ND}{MN} = \sqrt{19} \cong 4,3589 \Rightarrow \alpha \cong 77^\circ 6'$.

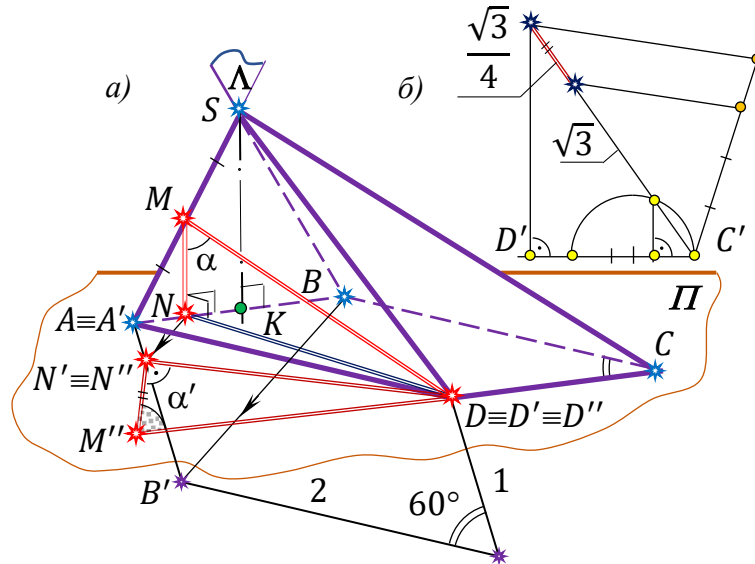


Рис. 1.33

Щоб досягти цього ж результату *графоаналітичним* методом, як у попередній задачі, виконаємо послідовно два суміщення з картинною площиною. Спочатку встановимо істинну форму паралелограма $ABCD$, а потім – трикутника MND . У першому випадку за вісь обертання виберемо сторону паралелограма $AD \equiv A'D'$, а у другому – сторону згаданого трикутника $N'D' \equiv N''D''$. У заключній побудові кут $D''N''M''$ справді дорівнює 90° , а катет $N''M''$ шуканого прямокутного трикутника, що знайдений наведеними вище розрахунками, дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{4}$ від відрізка одиничної міри, представленого на кресленні меншою із сторін паралелограма (напр., $A'B'$; див. рис. 1.33, б). Залучивши до справи транспортир, із точністю до побудови і замірювання знаходимо: $\angle N''M''D'' = \alpha' \cong 77^\circ$.

Напевне, що цю задачу можна також досить просто розв'язати виключно *графічним* методом. Як саме це зробити? Оцініть ситуацію і обґрунтуйте конструкцію доречних дій циркулем і лінійкою самостійно.

А зараз (тимчасово) залишимо осторонь задачі та знову повернемося до згадуваного підручника для ЗЗСО. Отож, поставимо собі за мету провести ретельний аналіз одного з *найскладніших і найбільш важливих метричних* понять (об'єктів) розділу «Стереометрія» – **спільного перпендикуляра** двох мимобіжних прямих, конкретизувати його суто **геометричне тлумачення**, виважено дати *конструктивне* означення.

Спочатку дослівно подаємо авторські означення з підручника: «Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на

цих прямих, перпендикулярний до кожної з них» ([10], п. 21). Проте очевидно, що таке **описове (дескриптивне)** означення обов'язково потребує доведення факту існування та єдиності спільного перпендикуляра двох будь-яких мимобіжних прямих. Саме це далі в тексті і обґрунтовує О. В. Погорелов, довівши, поряд із цим, що шуканий відрізок є спільним перпендикуляром пари паралельних площин, які завжди і, до того ж, єдиним чином можна провести через задані мимобіжні прямі: «Справді, нехай m і n – дані мимобіжні прямі (рис. 1.34). Проведемо через них паралельні площини Σ і Ω . Прямі, які перетинають пряму m і перпендикулярні до площини Ω , лежать в одній площині (Λ). Ця площина перетинає площину Σ по прямій m' , паралельній m . Нехай N – точка перетину прямих m' і n . Тоді пряма MN , перпендикулярна до площини Ω , перпендикулярна і до площини Σ , оскільки Σ паралельна Ω . Відрізок MN – спільний перпендикуляр до площин Σ і Ω , а отже, і до прямих m і n ». Далі у підручнику, методом «від супротивного», елементарно доведено єдиність перпендикуляра MN .

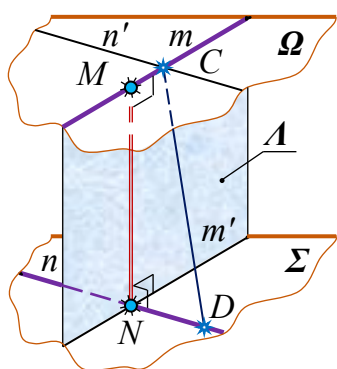


Рис. 1.34

Цікаво, що суто **геометричний зміст** відрізка MN цілком розкривається якраз у доведенні його існування. Адже останнє представляє собою нерозривний ланцюжок логічно осмислених дій із метою побудови цього відрізка уявно у просторі, а також, за вимоги дотримання властивостей паралельних проєкцій на проєкційному кресленні. Отже, це доведення є не чим іншим, як **побудовним (конструктивним)** означенням шуканого спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

На завершення пункту дається означення, яке необхідно придатне в обчислювальній геометрії: «Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює **відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі**».

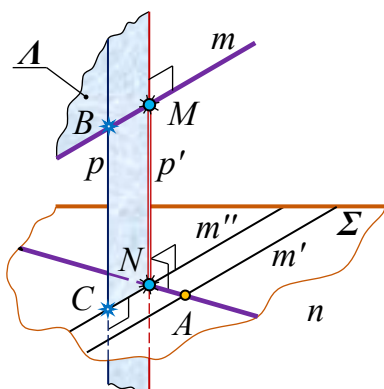


Рис. 1.35

У доповнення варто відтворити також у власних уявленнях ще й таку часто вживану (зокрема, в аналітичній геометрії) інтерпретацію останнього означення: «Нехай m і n – деякі мимобіжні прямі. Проведемо через них (відомим прийомом) єдино можливу пару паралельних площин Σ ($n \cap m'$) і Ω ($m \cap n'$). Прямі, які перетинають пряму m і перпендикулярні до площини Ω , лежать в одній і тій самій площині (Λ_1). Ця площина перетинає площину Σ по прямій m'' , паралельній m , а пряму n – у точці N .

У свою чергу, прямі, які перетинають пряму n і перпендикулярні до площини Σ , теж лежать в одній площині (Λ_2). Остання перетинає площину Ω по прямій n'' , паралельній n , а пряму m – у точці M . Тоді пряма MN перетину площин Λ_1 і Λ_2 перпендикулярна площинам Σ і Ω , оскільки Σ паралельна Ω . Відрізок MN – спільний перпендикуляр площин Σ і Ω , а отже, і прямих m та n ».

Практичних зручностей у вирішенні реальних тематичних пропозицій

конструктивними методами, гарантованої чіткості в системній реалізації схеми операцій у проєкціях можна досягти дещо скоригувавши й упорядкувавши сформульоване правило-орієнтир уявлених просторових операцій, чітко розписавши його за кроками виконання (рис. 1.35):

1). Проведемо через пряму n площину Σ , паралельну прямій t (на прямій n виберемо будь-яку точку A і через неї проведемо пряму t' , паралельну t ; площина Σ буде задана перетином прямих t' і n). 2). Проведемо через пряму t площину Λ , перпендикулярну площині Σ (на прямій t виберемо будь-яку точку B і через неї проведемо пряму r перпендикулярно Σ ; площина Λ визначатиметься перетином прямих t і r). 3). Побудуємо пряму лінію перетину введених площин Σ і Λ (знайдемо точку C перетину перпендикуляра r із площиною Σ і вже через цю точку проведемо пряму t'' , паралельну t'). 4). Знайдемо точку N перетину прямих t'' і n . 5). Через точку N проведемо у площині Λ пряму r' , паралельну r . 6). Знайдемо точку M перетину прямих r' і t . Відрізок MN – шуканий спільний перпендикуляр прямих t і n .

Саме цей алгоритм учитель зобов'язаний «прочитати між рядками» в будь-якому підручнику, повернути до нього пильну увагу учнів і залучати, при нагоді, до практичної діяльності – неухильного, грамотного використання в задачах конструктивної стереометрії.

Задача 10. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює a . На ребрі $D_1 C_1$ взято точку P_1 – середину цього ребра. Знайти відстань між прямими $B_1 D_1$ і $D P_1$.

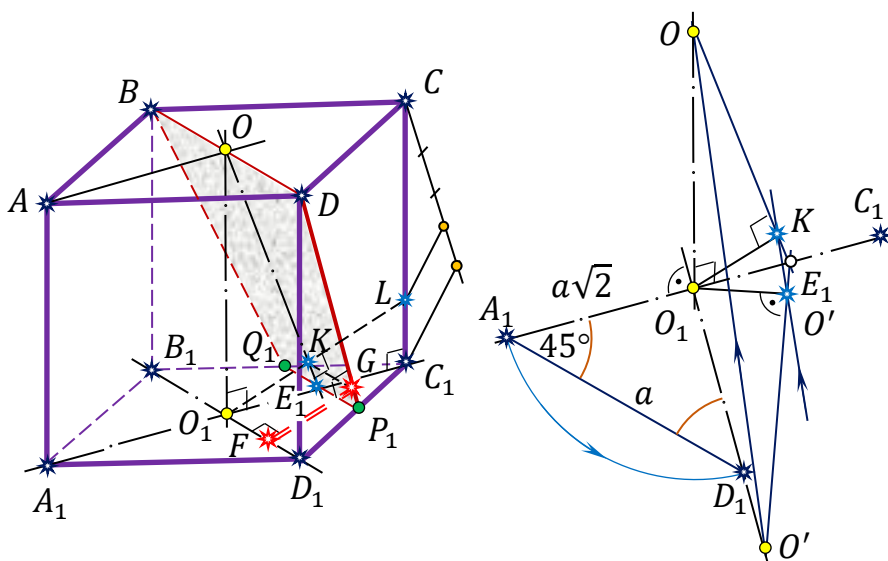


Рис. 1.36

Потрібно обчислити відстань між даними мимобіжними прямими $B_1 D_1$ і $D P_1$, яка вимірюється, як уже з'ясовано вище, відрізком відстані між паралельними площинами, що вміщують ці прямі. Проведемо (рис. 1.36) пряму $Q_1 P_1$ – середню лінію трикутника $B_1 C_1 D_1$. Тоді $Q_1 P_1 \parallel B_1 D_1$, а дві паралельні прямі $Q_1 P_1$ і BD визначають площину, яка проходить через одну із заданих прямих $D P_1$ і паралельна іншій – $B_1 D_1$. Тепер уже шукана величина рівна відстані від прямої $B_1 D_1$ до площини $\Sigma(Q_1 P_1 D)$. Щоб визначитися з останньою на моделі, достатньо з точки O_1 опустити перпендикуляр на площину Σ . Якщо це **креслення-картина**,

основу перпендикуляра (точку K) вибираємо будь-де, аби лише вона належала прямій (відрізку) OE_1 перетину площини $\Sigma(Q_1P_1D)$ із площиною $\Lambda(AA_1C_1C)$, адже Q_1P_1 – перпендикуляр до площини осьового перерізу куба $\Lambda(AA_1C_1C)$ ($Q_1P_1 \perp A_1C_1$, $Q_1P_1 \perp OO_1$). Помічаємо, що прямокутні трикутники OO_1E_1 і O_1KE_1 подібні ($\angle E_1$ – спільний). Тому матимемо таке: $\frac{O_1E_1}{O_1K} = \frac{OE_1}{OO_1}$, звідки $O_1K = \frac{O_1E_1 \cdot OO_1}{OE_1}$, де $O_1E_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $OO_1 = a$, а $OE_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1E_1^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Отже, $O_1K = \frac{a}{3}$.

Формально пошук результату розв'язання даної задачі на обчислення завершено. Проте умовою на зображення куба затрачено п'ять метричних параметрів ($A_1B_1 = A_1D_1$, $A_1B_1 \perp A_1D_1$, $AA_1 = A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1D_1$), тобто зображення є повним і метрично визначеним. А це означає, що ми могли б працювати із проєкційним рисунком не як із кресленням-картиною, а як із **кресленням-моделлю**, де сваволя виконавця неприпустима. Тобто, основу перпендикуляра O_1K на відрізку OE_1 можна та, навіть, потрібно будувати, а не вибирати довільно в тому разі, коли постановкою задачі очікується не обчислювальний, а *побудовний* результат, що більш важливо.

Графічний метод. Виконаємо послідовно два суміщення з картинною площиною (див. винесене креслення). Першим із них знайдемо справжню форму квадрата $A_1B_1C_1D_1$ в основі куба, а другим – справжню форму прямокутного трикутника OO_1E_1 . За вісь суміщення обох перетворень доцільно обрати діагональ квадрата $A_1C_1 = A'_1C'_1$, оскільки їй належить також один із катетів O_1E_1 трикутника, визначального у відшуканні розв'язку. Інший його катет OO_1 дорівнює (за умовою) стороні квадрата і, якщо $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, то $A_1D' = O_1O' = a$. Перпендикуляр O_1K' у суміщеному трикутнику $O'O_1E_1$ опустимо з вершини прямого кута (O_1) на гіпотенузу ($O'E_1$) звичним для площини прийомом, а його зображення O_1K побудуємо, скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки.

Графоаналітичний метод. Розглянемо у площині $\Lambda(AA_1C_1C)$ симетрії куба два прямокутні (в оригіналі) трикутники OO_1E_1 і O_1C_1L , де $L = O_1K \cap CC_1$. Вони подібні, оскільки їх відповідні сторони OO_1 і O_1C_1 , OE_1 і O_1L попарно перпендикулярні. Із пропорції $\frac{O_1C_1}{C_1L} = \frac{OO_1}{O_1E_1}$ маємо: $C_1L = \frac{O_1C_1 \cdot O_1E_1}{OO_1} = \frac{a}{4}$. Графічні операції в побудові точки L , а за нею й точки K – очевидні.

Якщо відрізок (O_1K) відстані від прямої B_1D_1 до площини $\Sigma(Q_1P_1D)$ на кресленні-моделі вже знайдено, то зовсім просто візуально завершити рисункову загальну геометричну схему побудови спільного перпендикуляра прямих B_1D_1 і DP_1 . Адже залишилося здійснити лише два заключні кроки, а саме, через точку K провести пряму, паралельну Q_1P_1 , до її перетину із прямою DP_1 у точці G , та через точку G провести пряму, паралельну O_1K , і зафіксувати точку F перетину цієї останньої прямої із прямою B_1D_1 . Відрізок FG й буде зображенням шуканого спільного перпендикуляра заданих мимобіжних прямих.

Так, у порівняно нескладній, типовій для ЗЗСО задачі, зосередивши увагу на кресленні-моделі, можна щоразу зримо розрізнити всі шість кроків загальногеометричного підходу до рисункової реалізації правила-орієнтиру дій

у відшуканні спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

Здавалося б, інші побудовні схеми годі й шукати. Однак геометрія якраз і цікава розмаїттям можливостей та змістовних варіацій у вирішенні питань конструктивно-генетичним методом.

При цьому, як підкреслювали знані геометри конструктивізму, поряд із тим методом побудови спільного перпендикуляра, який описано в стабільному підручнику (за авторством Кисельова А. П.), кожен із нас зможе «ще радніше» користуватися дещо іншим прийомом розв'язування задач такого типу.

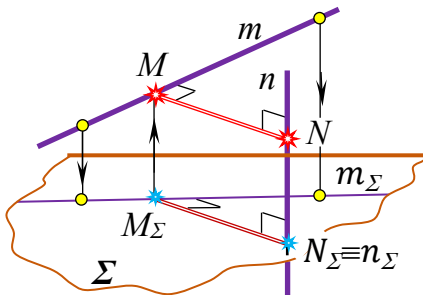


Рис. 1.37

Припустимо, що площина Σ розташована перпендикулярно до однієї із двох заданих мимобіжних прямих. Нехай це буде пряма n (рис. 1.37). За умови ортогонального проєкціювання на площину Σ , за напрямом прямої n , остання проєкціюється (виродиться) в точку N_Σ , а пряма t – у деяку пряму t_Σ . Якщо відрізок MN – спільний перпендикуляр заданих прямих t і n , то $MN \perp n$, а

отже, $MN \parallel \Sigma$. Цей факт означає, що сторона MN прямого кута NMt паралельна площині Σ , а відрізок перпендикуляра і, звичайно, прямий кут (згідно з теоремою про проєкціювання прямого кута) проєкціюються на неї без спотворення. Отже, $M_\Sigma N_\Sigma = MN$ і $\angle N_\Sigma M_\Sigma t_\Sigma = 90^\circ$. Звідси приходимо до принципово іншого побудовного правила-орієнтиру проведення спільного перпендикуляра MN мимобіжних прямих на бінарній моделі: **1).** Через вдало обрану (загалом, будь-яку) точку N_Σ прямої n проводимо площину Σ , перпендикулярну цій прямій. **2).** Будуємо ортогональну ($\parallel n$) проєкцію t_Σ прямої t на нововведену площину основи. **3).** Із точки $N_\Sigma \equiv n_\Sigma$ – виродженої проєкції прямої n і, водночас, основи точки $N \in n$ на площині Σ – за законами метрики проєкційного креслення опускаємо перпендикуляр на пряму t_Σ , чим визначимося з точкою M_Σ – основою точки M , а отже з основою $M_\Sigma N_\Sigma$ шуканого перпендикуляра MN на цій площині. **4).** Оберненим внутрішнім проєкціюванням ($\parallel n$) за відомою основою M_Σ знаходимо зображення точки M на прямій t . **5).** Проводимо пряму $MN \parallel M_\Sigma N_\Sigma$ і в її перетині із прямою n одержуємо точку N . Відрізок MN й буде розв'язком даної задачі.

Зауважимо, що цей останній підхід у побудові спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих, поданий у загальногеометричному вигляді, дуже часто кваліфікують як другий із трьох **надважливих наслідків** основної теореми метрики (теореми про проєкціювання прямого кута).

Задача 11. В основі чотирикутної піраміди з висотою SB лежить квадрат $ABCD$. Побудуйте спільний перпендикуляр між медіаною SM грані SAD та діагоналлю AC основи піраміди і обчисліть довжину перпендикуляра, якщо $SB = AB = 1$.

Очевидно, що визначитися із площиною Σ , перпендикулярною одній із заданих мимобіжних прямих (AC), нескладно (рис. 1.38): $\Sigma (SBD) \perp AC$, оскільки $SB \perp AC$ і $BD \perp AC$. Кінцева точка S медіани SM належить цій площині, а тому збігається зі своєю ортогональною проєкцією за напрямом $A \rightarrow C$; інша ж її точка

M проєкціюється в точку N діагоналі квадрата BD . Таким чином, ортогональною проєкцією медіани SM на нововведену площину проєкцій буде відрізок SN . Щоб із точки $O = AC \cap BD$, яка є виродженою (слід-) проєкцією на цю ж площину Σ діагоналі AC , опустити перпендикуляр на пряму SN , досить побудувати в прямокутному трикутнику SBN з вершини прямого кута на гіпотенузу висоту BT , а потім провести через точку O відрізок OH , паралельний BT . Що, власне, й зроблено нами на проєкційному кресленні методом суміщення трикутника SBD ($S'B' \equiv SB$ – вісь обертання) з картинною площиною. Оберненим проєкціюванням (за напрямом $C \rightarrow A$) шукаємо на медіані SM прообраз точки H – точку P . Нарешті, визначений на площині зображень відрізок PQ , паралельний і рівний відрізку OH , й буде шуканим спільним перпендикуляром заданих умовою мимобіжних прямих SM і AC .

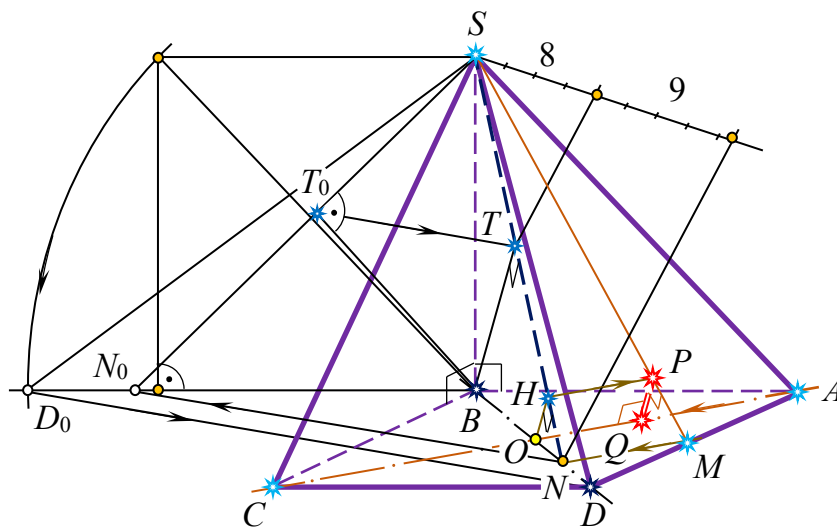


Рис. 1.38

Безумовно, за наявності якісного проєкційного креслення, як до наведеного щойно прикладу, останній підхід у пошуку розв'язань означеного типу задач об'єктивно виглядає естетично привабливішим, дещо зручнішим в уявленнях, хоч у використанні обох сформульованих правил-орієнтирів дій саме цю стереометричну конструкцію не можна віднести до найвищої категорії складності. Уважний читач напевно помітив, що перший із двох алгоритмів має на увазі проведення спочатку через SM площини $\Lambda(SMN) \parallel AC$, а потім – того самого відрізка OH у трикутнику SBN . Обґрунтовується такий стан речей просто, адже умовою задачі пропонується оперувати з уявно і конструктивно тривіальним багатогранником, в якому внутрішні взаємозалежності пізнаються легко, а обумовлені побудови циркулем і лінійкою є графічно невибагливими.

Для числового представлення довжини відрізка $PQ = OH$, потрібно лише пригадати відповідні геометричні залежності в прямокутному трикутнику SBN ($\angle B = 90^\circ$). Якщо в ньому покласти $SB = 1$, то $BN = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Тому $SN = \sqrt{SB^2 + BN^2} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$, $SB^2 = ST \cdot SN \Rightarrow ST = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$, а $BT = \sqrt{SB^2 - ST^2} = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Окрім цього, неважко помітити, що $\triangle BTN \sim \triangle OHN$, а тому маємо: $\frac{BN}{ON} = \frac{BT}{ON} \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

До цього не зашкодить також додати наступне. Оскільки $ST = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$, а $TN = SN - ST = \frac{9}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}$, то $ST : TN = 8 : 9$. Так просто одержане визначальне відношення дозволяє (з використанням узагальненої теореми про пропорційні відрізки) досить швидко, з найменшим числом графічних операцій і, відповідно, мінімумом побудовних ліній знайти на проєкційному рисунку точку T , а за нею й відрізок $OH = PQ$.

Таким чином, задачу розв'язано *графічно* і *графоаналітично*. Маємо також числове вираження відрізка PQ , а наведені умовиводи вказують на принципово важливе, особливе місце конструктивних перетворень у справі алгоритмізації розв'язань не лише позиційних, а й метричних задач. Не може бути сумнівів щодо обов'язково глибокого усвідомлення суб'єктом навчання загальної геометричної схеми побудовного етапу, акуратне і самостійне відтворення якої на проєкційному кресленні наштовхує на істинний шлях формальних обчислень, гарантує їх якісне рисункове представлення – оптимізує процес роботи креслярськими інструментами та забезпечує достовірний результат із точністю до замірювання.

Задача 12. Основою чотирикутної піраміди є прямокутник $ABCD$, в якому $AB = a$ і $AB : AD = 1 : 2$. Висота SO піраміди проєкціюється в точку O перетину діагоналей основи і $SO = AC$. Побудувати зображення і знайти довжину спільного перпендикуляра мимобіжних прямих, що задані ребрами CD і SA .

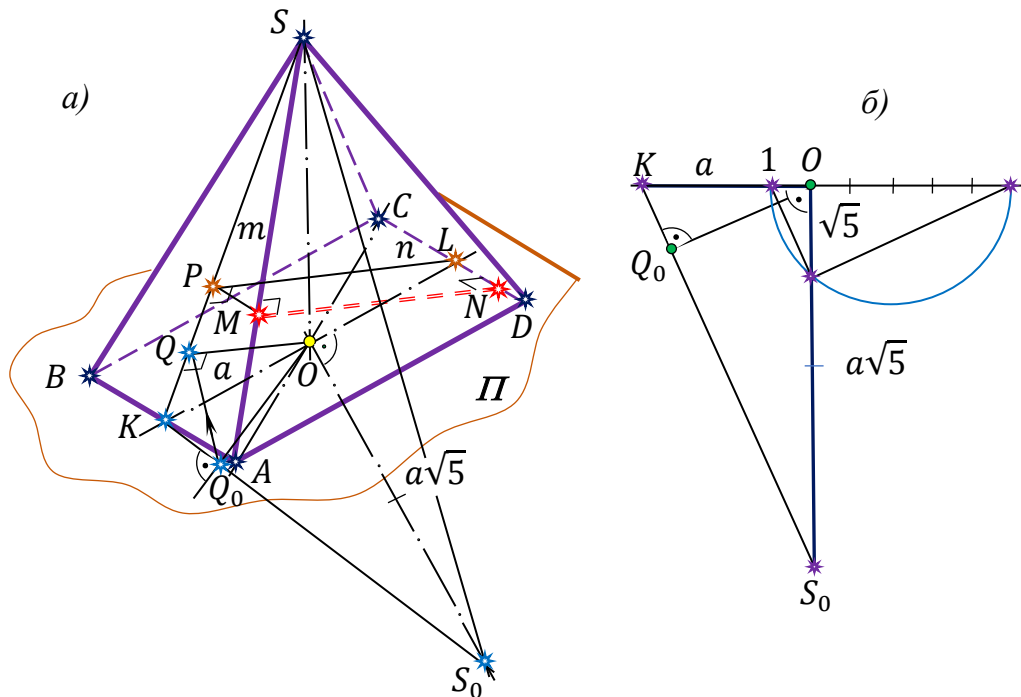


Рис. 1.39

Коли б, з яких завгодно суб'єктивних міркувань, задачу довелось розв'язувати першим із запропонованих вище методів, то, не докладаючи жодних зусиль (рис. 1.39), через задане ребро SA можна було б провести спочатку площину $\Sigma(SAB)$, паралельну іншому заданому ребру CD , а потім проєкціювати це ребро ортогонально на Σ . Останню операцію, яка виражається у проведенні перпендикуляра з будь-якої точки ребра CD на площину Σ , слушно графічно

відтворити у площині $\Omega(SKL)$ осьового перерізу піраміди (тут $CL = LD$), оскільки якраз у площині Ω істинну форму трикутника SKL легко знайти через елементарні аналітичні розрахунки і просту допоміжну побудову на винесеному кресленні (рис. 1.39, б). Тут, згідно з умовою задачі, $SO = AC$ і $AB = a$, тому $KO = OL = a$, а $SO = a\sqrt{5}$.

Цікавим у дослідженні можна вважати наступний факт. Якщо той хто розв'язує задачу схиляється до іншого методу, тобто розпочинає процедуру конструктивних операцій проведенням через деяку точку ребра CD перпендикулярної до нього площини, то краще всього це зробити саме в точці L , бо за таких обставин допоміжною буде та ж площина симетрії піраміди $\Omega(SKL)$. При цьому ребро SA проєкціюється ортогонально на площину Ω у відрізок SK , а ребро CD виродиться в точку L . Отже, й тут продовження задачі виражається в проведенні перпендикуляра LP із вершини L трикутника SKL на його протилежну сторону SK , про що ми вже вели мову вище.

Решта побудов добре зрозумілі з рисунка і залишаються ідентичними, незалежно від вибраного учнем методу графічних дій.

Тепер виконаємо завершальні обчислювальні операції.

Оскільки $OQ \perp SK$ і $LP \perp SK$, то $OQ \parallel LP$. Однак, $KO = OL$, тому OQ – середня лінія трикутника LPK , а $LP = 2OQ$. З іншого боку, відрізок OQ є висотою прямокутного трикутника SOK , проведеною на гіпотенузу SK із вершини прямого кута O . Тому $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = a\sqrt{6}$ і, у свою чергу, отримуємо:

$$OK^2 = KQ \cdot SK \Rightarrow KQ = \frac{a}{\sqrt{6}}. \text{ Таким чином, } OQ = \sqrt{OK^2 - KQ^2} = a\sqrt{\frac{5}{6}}. \text{ Нарешті,}$$

$$LP = MN = 2OQ = 2a\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Важко не помітити, що в побудові відрізка OQ не обов'язково користуватися суміщенням трикутника SOK із картинною площиною, адже місце розташування точки Q на відрізку SK легко розраховується. Справді, $QS = KS - KQ = a\sqrt{6} - \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{5a}{\sqrt{6}}$. Тому $KQ : QS = 1 : 5$, а $KP : PS = AM : MS = 1 : 2$. Тепер графічно завершити відшукування точки P на зображенні зовсім нескладно.

У будь-якому випадку розглядувана порівняно проста (в розумінні графіки і обчислювальних операцій) задача розв'язується **графоаналітичним** методом. Поряд із цим, на запитання «Чи не можна досягти такого ж результату винятково циркулем і лінійкою, без посилань до жодних формальних виражень?», відповідь однозначна: «Так, звичайно, що можна!». Гарантом переконливого твердження слугує метрична визначеність креслення вихідного стереометричного тіла. А от щодо деталей, які саме перетворення плоских фігур піраміди для цього варто виконати, за якими правилами і в якій послідовності? – належить дати відповідь вам, читачу. Проілюструйте суто графічний шлях до істини на окремо взятому проєкційному кресленні. Щоб таке зображення краще прочитувалося, доладно скористайтеся виносними кресленнями.

Задача 13. В основі прямого паралелепіпеда $EFGHABCD$ лежить паралелограм із гострим кутом при вершині A , рівним 45° . Побудувати спільний

перпендикуляр мимобіжних прямих, заданих діагоналлю AG і ребром DC паралелепіпеда, обчислити довжину побудованого перпендикуляра, якщо $AB = a$, $AB : AD = 1 : 2$, а бічне ребро паралелепіпеда $HD = \frac{\sqrt{7}}{2}AD$.

Задля визначеності в наступних апробаціях, відразу ж варто уточнити вихідні дані умови задачі, а саме, якщо $AB = a$, то $AD = 2a$ і $HD = \sqrt{7}a$.

Таким чином, у вирішенні поставлених побудовних і обчислювальних завдань зараз випадає оперувати з мимобіжними прямими AG і DC (рис. 1.40, а). Із тим, щоб у метрично визначеному просторі, згідно зі схемою останнього правила-орієнтира закономірних операцій, через точку D прямої DC перпендикулярно до неї провести допоміжну в побудові площину $\Sigma(HDKL)$, достатньо з указаної точки опустити перпендикуляр DK на пряму, яка вміщує сторону основи AB (оскільки $DC \parallel AB$). Обов'язкова на першому кроці уявлюваних пошуків площина Σ однозначно зображується на моделі перетином двох прямих DK і DH , адже DH уже перпендикулярна DC за умовою. Сумістивши з картинною площиною паралелограм $ABCD$, який лежить в основі даної призми, дійдемо очікуваного результату. Таку операцію неважко змодельовати циркулем і лінійкою, взявши за вісь суміщення сторону паралелограма $AD \equiv A'D'$ і врахувавши затрачені на нього метричні параметри, як-от: в оригіналі $\angle D'A'B' = 45^\circ$, а $A'B' = \frac{1}{2}A'D'$. Проведені опісля відрізки $D'K' \perp A'B'$ і DK ($K'K \parallel B'B$) – шукані. При цьому одна із заданих мимобіжних прямих (DC) вироджується на площину Σ , за напрямом внутрішнього проєкціювання $C \rightarrow D$, у точку D , а інша (AG) проєкціюється в пряму KH . Очевидно також, що $DKLH$ – прямокутник, проєкціювальний на площину основи $\Lambda(ABCD)$ ($HD \perp \Lambda$), тому, після суміщення, площина Σ вироджується на площину проєкцій у пряму $\Sigma' \equiv L'K'D'H'$ ($K' \equiv L'$, $D' \equiv H'$).

Щоб наступним змістовно значимим кроком опустити перпендикуляр із точки D на пряму KH , ще одним суміщенням, узявши за його вісь пряму $D'K' \equiv D''K''$, «покладемо» на площину зображень прямокутник $D''K''L''H''$, в якому $K''L'' = D''H'' = \sqrt{7}a$ (рис. 1.40, б). Перпендикуляр $D''P''$ до діагоналі прямокутника $K''H''$, проведений на зображенні як у планіметрії, буде оригінальним із точністю до подібності. Відтак, оберненим ходом, із використанням у даній призмі променя внутрішнього проєкціювання $PP_1 \perp \Lambda(ABCD)$ ($P' \equiv P'_1 \in \Sigma'$), будуюмо шукану точку P – основу перпендикуляра DP на пряму KH : 1). $P''P' \parallel L''L'$; 2). $P'_1P_1 \parallel B'B$; 3). $P_1P \parallel DH$.

Що ж стосується двох завершальних кроків у гарантовано достовірній реалізації обраної схеми просторових дій, то тут пряма, проведена через точку P паралельно DC , у перетині із прямою AG висіче точку M , яка зображатиме один із кінців шуканого перпендикуляра. Сам перпендикуляр одержимо, провівши пряму $MN \parallel PD$ до перетину із прямою DC у точці N .

Цими умовиводами, з відповідним рисунковим супроводом, зараз проілюстровано і вербально озвучено суто **графічний** метод побудови замовленого висновком задачі перпендикуляра MN .

Щоб установити функціональну залежність спільного перпендикуляра

$MN = PQ$ даних мимобіжних прямих AG і DC від відрізка $AB = a$, доцільно скористатися метрично розмірним прямокутним трикутником $H'D'K'$ ($\angle H' = 90^\circ$). У нього катет $H'D' = \sqrt{7}a$ (за умовою), а катет $D'K'$ просто виражається через a завдяки трикутнику $A'B'D'$, однією з висот якого якраз є відрізок $D'K'$: $D'K' = A'D' \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}a$. Тому, на останок формальних випробовувань, матимемо: $H'K' = \sqrt{(H'D')^2 + (D'K')^2} = 3a$ і, таким чином, отримаємо, що $S_{\Delta H'D'K'} = \frac{1}{2}D'K' \cdot H'D' = \frac{1}{2}H'K' \cdot D'P' \Rightarrow D'P' = \frac{D'K' \cdot H'D'}{H'K'} = \frac{\sqrt{14}}{3}a$.

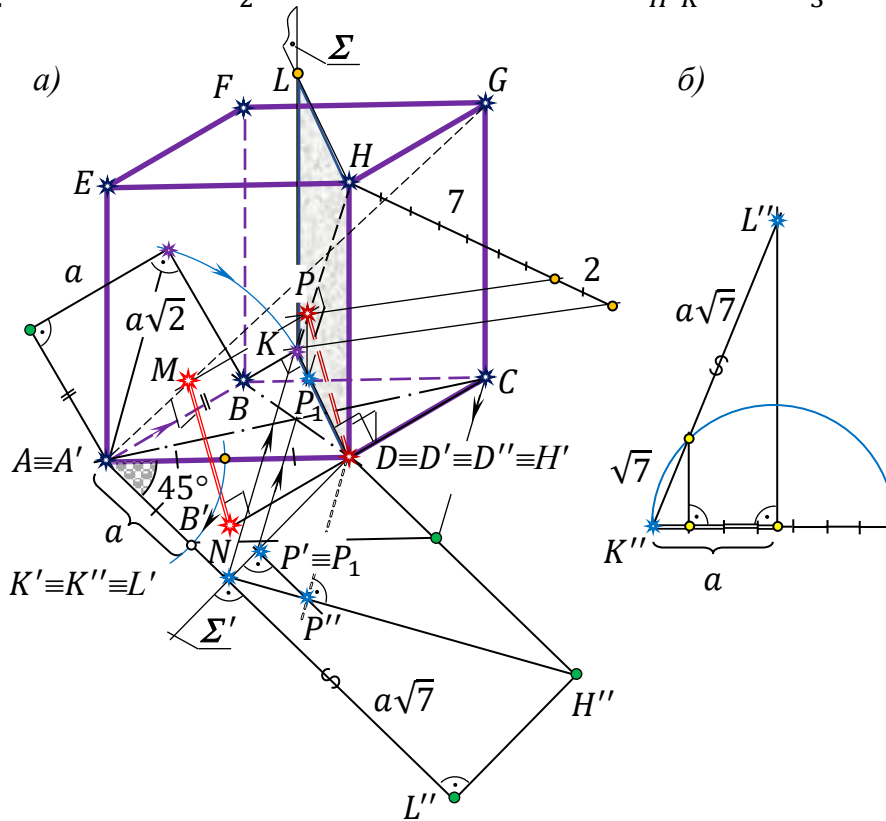


Рис. 1.40

Нарешті, точку K на промені AB , а потім і точку P на відрізку HK можна дуже просто розрахувати, а отже якісно й з економією за числом операцій подати на проєкційному рисунку графічний результат, посиляючись лише до елементарних геометричних фактів, зокрема до узагальненої теореми про пропорційні відрізки. Наразі, у трикутнику $A'B'D'$ $A'K' = D'K' = \sqrt{2}a$, а звідси прямо випливає, що коли в такому варіанті міркувань відрізок AB на рисунку 1.40, a обрати оригінальним й рівним a (за умовою), то діагональ квадрата, побудованого на AB як на стороні, дорівнюватиме $\sqrt{2}a$, й тому $AK_0 = AK$. Далі маємо, що $D'K' = \sqrt{2}a$, $H'D' = \sqrt{7}a$; проте, завдячуючи відомим середнім геометричним у прямокутному трикутнику $H'D'K'$, є істинною пропорція $\frac{K'P'}{P'H'} = \frac{(D'K')^2}{(H'D')^2} = \frac{2}{7}$. Уже в цих умовах, як відомо, результуючі рисункові операції на проєкційному кресленні очевидні й традиційно прості у відтворенні (див. рис. 1.40, a).

Хоч задачу й розв'язано, все ж не завадить підкреслити, що в останньому описаному випадку побудова спільного перпендикуляра MN мимобіжних прямих DC і AG помітно спростилася. Цими діями візуально реалізовано модель *графоаналітичного* методу, якому реально у шкільній практиці немає місця серед учнів і вчителів. Однак уміння через аналітичні вираження окремих елементів фігур досягати позитивних конструктивних результатів, мало б свідчити про глибоке розуміння взаємозв'язків і формальних взаємних залежностей всередині розглядуваного стереометричного об'єкта, чому й потрібно, врешті-решт, по-справжньому, на професійному рівні навчатися студентам – майбутнім учителям математики (геометрії).

У підсумку констатуємо, що перший крок у побудові спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих можна виконати або провівши через одну з них площину, паралельну іншій прямій, або ж раціонально вибравши на одній із заданих прямих деяку точку і провівши через неї площину, перпендикулярну саме до цієї прямої. Такі можливі варіанти конструкції за геометричним змістом принципово різняться один від одного, оскільки в першому випадку на проєкційному кресленні вирішується завжди елементарна і суто позиційна задача, а у другому – метрична, яка реалізовується просто лише за умов особливого (частинного) розташування всередині стереометричного тіла хоча б однієї із заданих мимобіжних прямих. В останній реалізації потрібно, щонайперше, помітити таке вдале розташування і виважено скористатися ним. Цікаво, що наступним побудовним кроком першого і другого правил-орієнтирів дій є **внутрішнє** ортогональне проєкціювання на нововведену площину іншої із двох заданих мимобіжних прямих (метрична задача) і побудова лінії перетину двох взаємно перпендикулярних площин. У загальному геометричному плані остання позиційна задача на перетин площин розв'язується простіше, знову ж таки, в реалізації алгоритму під першим номером. Такі умовиводи складають враження, що на практиці перший алгоритм у цілому (і завжди) практично більш привабливий. Однак це не так – все залежить від вихідних даних, від умови задачі та кваліфікації суб'єкта навчання. Тому, перш ніж приступити до безпосередніх дій креслярськими інструментами, варто глибоко і всебічно проаналізувати умову задачі в комплексі з попередньо виконаним *якісним* зображенням стереометричного тіла та його окремих елементів, і лише після цього зупинитися на певному методі її розв'язання.

Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації

Підсумовуючи, ще раз наголосимо, що правильні й наочні зображення на картинній площині, яким властива позиційна повнота, в загальному випадку характеризують оригінал недостатньо, не настільки вичерпно, як того вимагає метрика. Пояснюється цей факт напрочуд просто, адже на позиційно визначених проєкційних кресленнях відображаються лише ті інваріанти просторової фігури, які зберігаються при паралельному проєкціюванні.

Звернемося, приміром, до *паралелограма*. Його зображення на основній площині має, як відомо, властивість повноти. Однак лише за зображенням не можна встановити форму фігури, оскільки оригіналом (прообразом) паралелограма може бути який

завгодно інший паралелограм, зокрема прямокутник із будь-яким відношенням сторін, ромб із будь-яким можливим кутом при вершині та, нарешті, всякий квадрат.

Якщо ж зображення $ABCD$ паралелограма $A'B'C'D'$ доповнити умовою: $A'B' = B'C'$ чи, скажімо, $A'C' \perp B'D'$, то стає зрозуміло, що $ABCD$ – зображення ромба. Однак і цього співвідношення недостатньо для цілковитої визначеності форми оригіналу хоча б тому, що ромбів, відмінних за формою, теж безліч, зокрема квадрат є також ромбом із прямим кутом при вершині. Очевидно, що потрібно витратити ще один метричний параметр, наприклад, констатувати взаємну залежність між діагоналями цієї фігури пропорцією виду $A'C' : B'D' = 2 : 1$. Лише за таких обставин зображення плоскої фігури $ABCD$ разом із двома метричними параметрами, додатково (вербально чи в запису) накладеними на нього, однозначно визначає на плоскому екрані форму ромба-оригіналу. Спробуємо тепер дещо варіювати так введеними додатковими до зображення паралелограма $ABCD$ метричними параметрами. Нехай, на відміну від попереднього, $\angle A'B'C' = 90^\circ$ і $A'B' : B'C' = 1 : 3$. Ми певні, внесені корективи метричних характеристик фігури через основні загальні розумові дії (порівняння, абстрагування і узагальнення) миттєво, в чомусь навіть підсвідомо і мимовільно викликають в уявленнях студента (учня) образ іншої фігури – прямокутника $A'B'C'D'$ певної форми, визначеної саме цією останньою інформацією про накреслений паралелограм. Коли ж пропорцію подати в її цілком можливому частинному вигляді, тобто $\angle A'B'C' = 90^\circ$, а $A'B' : B'C' = 1 : 1$, то це засвідчує рівність суміжних сторін прямокутника, отож тут матимемо справу в оригіналі винятково із прямокутним ромбом – квадратом.

Аналогічні міркування можна провести стосовно зображення ABC деякого **трикутника**. Якщо його не обумовлювати додатковими метричними параметрами, то прообразом ABC може бути різносторонній трикутник $A'B'C'$ довільної форми, рівнобедрений – з будь-яким кутом при вершині, прямокутний – з яким завгодно гострим кутом і, звичайно, рівносторонній трикутник. Визначитися з формою різностороннього трикутника можна витрачаючи на його зображення різні комбінації метричних параметрів. Наприклад, $A'B' = \frac{1}{2}A'C'$ і $A'B' = \frac{1}{2}B'C'$ або, задавши на проєкційному кресленні трикутника (в допустимих межах, див. вище §2, задачу 3) точку O , яку домовимося вважати його ортоцентром, що фактично означає: $A'O' \perp B'C'$ і $B'O' \perp A'C'$, тощо. За умов $A'B' = B'C'$, $A'B' = 2A'C'$ відразу стає очевидним, що ABC зображає рівнобедрений трикутник певної форми. Якщо ж $\angle A'B'C' = 90^\circ$, а $A'B' = \frac{1}{3}B'C'$, то $A'B'C'$ – трикутник прямокутний і один з його катетів у три рази менший іншого. Нарешті, умови $A'B' = B'C'$, $B'C' = C'A'$ (або ж, $\angle A' = 60^\circ$ і $A'B' = A'C'$) без сумнівів визначають рівносторонній трикутник. Тут форма кожного із трикутників, як у випадку з паралелограмом, встановлена однозначно зображенням і строго двома затраченими на нього метричними параметрами.

Зауважимо, співвідношення між сторонами трикутника в якості параметрів, витрачених на зображення, неможна обирати довільно, щоб не порушити теорему про нерівність трикутника ([14], §7, п. 66).

Означення. Повне зображення Φ фігури Φ' називається метрично визначеним, якщо за ним можна відновити (змодельювати) фігуру Φ' із точністю до подібності.

Теорема. Для того, щоб зображення Φ плоскої фігури Φ' було метрично визначеним, необхідно і достатньо, щоб на нього було витрачено два метричні параметри.

Метричну визначеність просторових фігур можна досить наочно і просто обґрунтувати на прикладі проєкційного креслення $SABC$ трикутної піраміди

$S'A'B'C'$. Лише за кресленням, без додаткової метричної інформації про оригінал, нічого певного про піраміду сказати неможливо, оскільки, згідно з теоремою Польке-Шварца, плоский чотирикутник з його діагоналями здатний виконувати роль зображення якого завгодно тетраедра.

Нехай тепер, у частинному випадку, $SABC$ – зображення **правильної** трикутної піраміди. Очевидно, що така словесна інформаційна корекція суттєво конкретизує оригінал, вирізняє його із сукупності всіх можливих трикутних пірамід. Однак чи достатньо цієї інформації для визначеності багатогранника $S'A'B'C'$ із точністю до подібності? Виявляється, що недостатньо. І ось чому. Піраміда називається правильною, якщо її основа є правильний багатокутник, а основа висоти збігається з центром цього багатокутника. В такій піраміді, що очевидно, всі бічні ребра рівні. Зображення довільним трикутником ABC правильного трикутника $A'B'C'$, що лежить в основі піраміди, бере на себе затрату двох метричних параметрів: $A'B' = B'C'$, $B'C' = C'A'$. Зображення висоти піраміди, перпендикулярної в оригіналі до площини основи в точці O' – центрі трикутника – вимагає витратити ще два метричні параметри: $S'A' = S'B'$, $S'B' = S'C'$ ($S'O' \perp A'O'$, $S'O' \perp B'O'$). Усе ж, за таким проєкційним кресленням неможливо встановити місце розташування вершини піраміди S' на перпендикулярі, проведеному в точці O' до площини основи. В умовах такої поінформованості її можна вибрати де завгодно на прямій $S'O'$. Отже, однозначно відновити (змодельовати) правильну трикутну піраміду, як прообраз повного чотирикутника $SABC$, і в цьому випадку неможливо. Очевидно, для того, щоб піраміда $S'A'B'C'$ була цілком метрично визначена, до умов « $SABC$ – зображення правильної трикутної піраміди» обов'язково потрібно додати деякий метричний параметр стосовно висоти піраміди, який фіксував би у просторі її вершину S' , наприклад, $S'O' = A'B'$ або $S'A' = 2A'B'$ тощо. Тобто, до чотирьох метричних параметрів, закладених у слові «правильна», додається ще один – п'ятий параметр, який конкретизує місце розташування вершини.

Теорема. *Для того, щоб зображення Φ просторової фігури Φ' було метрично визначеним, необхідно і достатньо, щоб на нього було витрачено **п'ять** метричних параметрів.*

Ці визначальні метричні параметри просторової фігури обов'язково мають бути обумовлені умовою тієї чи іншої стереометричної задачі на побудову.

Акцентуємо: *Якщо на площині дошки (зошита) метрично визначено будь-яку плоску (просторову) фігуру, то метрично визначено всю площину (весь простір) і на проєкційних кресленнях таких геометричних фігур неприпустима сваволя у виконанні побудов метричного характеру, тобто побудов, пов'язаних із проведенням перпендикулярних прямих і площин, вимірюванням відрізків і кутів, встановленням істинної форми плоских фігур, довільно розташованих на площині чи в просторі.*

Особливою метричною задачею в умовах навчального процесу, змістовою за строгістю виконання побудовних операцій є також моделювання зображенням комбінації двох фігур на метрично визначеному кресленні. До таких, зокрема, відносяться розглянуті вже раніше задачі (див. ч. I) на вписання (описання) багатокутників і багатогранників встановленої форми в коло і кулю, конус, циліндр (навколо кола і кулі, конуса, циліндра) відповідно.

Розв'язуючи метричні задачі торкаються переважно властивостей оригіналу, які не зберігаються при паралельному проєкціюванні, але обов'язково є інваріантами перетворення подібності: 1) *властивості прямих і площин утворювати між собою певні кути, зокрема (і в першу чергу) бути взаємно перпендикулярними*; 2) *відношення довжин*

відрізків на не паралельних прямих; 3) відношення градусних мір кутів між прямими, площинами, прямими і площинами. Наприклад, властивості променя бути бісектрисою кута чи площини бути бісекторною площиною двогранного кута є метричними. При цьому не варто забувати, що метричні задачі, як правило, вміщують у собі одну або кілька позиційних задач, які базуються на інваріантах паралельного проєкціювання. В цілому пам'ятайте, що для ефективного розв'язання будь-якої стереометричної задачі на побудову потрібно відшукувати такі співвідношення між елементами оригіналу, які зберігаються (інваріантні) при паралельному проєкціюванні на картинну площину.

У переважній більшості випадків метрична задача зводиться до фіксації на зображенні визначальних елементів: певної точки або ж напряду певної прямої. Місце розташування цих елементів можна встановити чи через виконання тільки графічних операцій (графічний метод), чи скориставшись якимись допоміжними, по можливості найпростішими і в найменшому об'ємі аналітичними розрахунками (графоаналітичний метод). У першому випадку можливі різні прийоми: відшукування потрібних співвідношень усередині (чи на поверхні) стереометричного об'єкта і побудова шуканої фігури безпосередньо на зображенні; відшукування потрібних співвідношень через побудову справжньої форми деякої плоскої фігури (наприклад, шляхом суміщення її з картинною площиною); встановлення взаємно однозначної відповідності між фігурою і її зображенням (вторинною проєкцією); побудова такої ортогональної проєкції на площині дошки (зошита), де шуканий відрізок, кут, плоска фігура зображується без спотворення тощо. Графоаналітичний метод передбачає певні формальні виведення взаємних залежностей між визначальними відрізками з використанням конкретних фактів, властивостей геометричних фігур, сформульованих у відомих аксіомах, теоремах чи розглянутих у раніше розв'язаних задачах.

Критерієм розв'язуваності метричної задачі на побудову на позиційно і метрично визначеному кресленні є врахування і використання на зображенні проєкційних і метричних властивостей оригіналу.

Правило-орієнтир розв'язування метричної задачі

1. Встановіть факт повноти і метричної визначеності зображення.
2. Проаналізуйте умову задачі та, першочергово, встановіть обґрунтовані взаємні залежності між заданими і шуканими геометричними фігурами.
3. Сформулюйте правило-орієнтир просторових пошуків і дій та, у зв'язку з цим, зорієнтуйтеся з методом розв'язання задачі.
4. Скориставшись кардинальними проєкційними особливостями зображення і врахувавши всі витрачені на нього метричні параметри, сформулюйте алгоритм графічних операцій, які доцільно виконати безпосередньо на моделі.

Примітка. Якщо деінде не вдається відразу помітити потрібні особливості розташування та формальні взаємозалежності між умовою та висновком задачі, які порівняно швидко реалізуються на самому зображенні, то передбачте винесені креслення і (або), частково, допоміжні аналітичні розрахунки, що оптимізують алгоритм розв'язання.

5. Виконайте фактичні побудови і виділіть результат.

Тут суттєво, що методологічна концепція розв'язування метричних задач на умовних проєкційних кресленнях не вимагає якихось спеціальних знань із нарисної геометрії, а процес розв'язування здійснюється через звичайні графічні чи графоаналітичні операції, які мають місце в курсі геометрії ЗЗСО. Вчителю математики про це обов'язково потрібно пам'ятати.

Контрольні запитання

1. Поясніть, чому в уявлюваному і рисунковому оперування фігурами геометрії на практиці недостатньо, щоб їх зображення були позиційно визначеними.
2. Які властивості геометричних фігур і їх взаємного розміщення у просторі є інваріантними при паралельному проєкціюванні?
3. Перерахуйте окремо інваріанти руху і подібності. Як кваліфікують фігури, що мають однакову форму?
4. Яке зображення в геометрії називається метрично визначеним (умовним)?
5. Як гіпотетично позиційно визначене (повне) зображення геометричної фігури можна «зробити» метрично визначеним?
6. Що означає термін «параметраж зображення»?
7. Обґрунтуйте простими, всім зрозумілими прикладами метричну визначеність плоских геометричних фігур.
8. Обґрунтуйте простими, всім зрозумілими прикладами метричну визначеність просторових геометричних фігур.
9. Перерахуйте найпростіші алгебричні побудови лінійкою і циркулем.
10. Які відрізки, описані формулами, можна побудувати лінійкою і циркулем?
11. Які дві взаємно обернені задачі розглядаються в побудові відрізків, описаних формулами?
12. Поясніть роль так званих «середніх геометричних» в алгебричних побудовах. Наведіть переконливі приклади.
13. Пригадайте місце теореми Польке-Шварца в теорії та практиці стереометричних побудов.
14. Як покроково інтерпретується метод суміщення з картинною площиною плоских фігур загального розташування?
15. Які відомі геометричні перетворення фігур залучаються до реалізації методу суміщення?
16. Назвіть дві основні метричні задачі. Чому вони віднесені до класу основних?
17. Чи знаєте Ви інші методи в метричній геометрії плоских фігур, окрім методу суміщення?
18. Чому так важливо «бачити» внутрішні взаємозв'язки і співвідношення між даними в умові задачі та шуканими елементами геометричних фігур?
19. Що таке «конструктивний компонент» у задачах стереометрії на обчислення? Яка його роль? Обґрунтуйте прикладами.
20. Що мають спільного і чим помітно різняться графічний, графоаналітичний та обчислювальний способи розв'язування стереометричних задач?
21. Дайте означення кута між:
 - прямими, які перетинаються;
 - прямою і площиною;
 - мимобіжними прямими;
 - двома площинами.
22. Якими метричними параметрами характеризується взаємне розташування двох мимобіжних прямих?
23. Дайте дескриптивне означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.
24. У чому полягає специфіка подання конструктивного означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих у підручниках для ЗЗСО? Дайте покроковий

алгоритм операцій в його реалізації.

25. Наслідком якого твердження є ще одне (друге) конструктивне означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих? Яка роль цього означення? Дайте покроковий алгоритм операцій у його реалізації.

26. Що називається відстанню між мимобіжними прямими? Поясніть роль цього означення в обчислювальних задачах стереометрії.

27. Сформулюйте правило-орієнтир візуального розв'язування метричної задачі графічним методом.

Тренувальні вправи і завдання

1. Паралелограм $ABCD$ є зображенням квадрата, в площині якого задані також точка P і пряма p . Потрібно змоделювати зображенням перпендикуляр, опустивши його з точки P на пряму p .

2. Накреслений еліпс ω є зображенням кола, у площині якого задані також точка P і пряма p . Потрібно змоделювати зображенням перпендикуляр, опущений із точки P на пряму p .

3. Трикутник ABC є зображенням рівнобедреного трикутника, висота якого дорівнює основі. Потрібно побудувати зображення висот трикутника і центра описаного кола.

4. Дано зображення ABC прямокутного трикутника $A'B'C'$, один катет якого у два рази більший іншого ($A'B' : A'C' = 2 : 1$). Побудувати у площині трикутника точки, рівновіддалені від катетів та розташовані від точки A' – вершини прямого кута – на відстані, що дорівнює відрізку висоти трикутника, проведеної з цієї ж вершини на гіпотенузу.

5. На кресленні дано зображення трикутника ABC , причому відомо, що в оригіналі $\angle B'A'C' = 30^\circ$, $\angle C'B'D' = 20^\circ$, а задана точка D' належить відрізку $A'C'$. Побудувати точку P , що є зображенням центра P' уписаного у трикутник $A'B'C'$ кола.

6. Дано зображення рівнобедреного трикутника з кутом при вершині, рівним 36° . Побудувати зображення центрів уписаного і описаного кіл.

7. Побудувати на зображенні ромба зображення його висоти, якщо градусна міра гострого кута ромба рівна 45° .

8. На зображенні рівнобедреного прямокутного трикутника побудувати зображення квадратів, що лежать у площині трикутника, якщо їх сторонами взяти: 1) катети трикутника; 2) гіпотенузу трикутника.

9. Дано зображення трикутника, сторони якого в оригіналі знаходяться у відношеннях $15 : 18 : 21$. Побудувати зображення висот трикутника.

10. Дано зображення кола і трикутника, описаного навколо нього. Побудувати зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

11. Дано зображення $EFGABC$ похилої призми, в основі якої лежить рівносторонній трикутник ABC , а вершина G проєкціюється в точку O – середину ребра $AB = \sqrt{5}$. Побудуйте нормальний переріз призми і знайдіть площу трикутника перерізу, якщо $GO = 2CO$.

12. В основі піраміди $SABC$ лежить (в оригіналі) прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), а її висота проєкціюється у вершину B . Побудуйте кут, утворений гранями SAB і SAC , якщо $SB = BC = AC = a$. Через середину ребра BC перпендикулярно ребру SA проведіть січну площину Σ . Знайдіть площу фігури перерізу.

Ще шість задач, умови яких записані нижче, пропонуємо читачеві розв'язати

самостійно, причому в кожній із пропозицій обов'язково варто подбати про відшукування всіх можливих їх розв'язків як графічним, так і графоаналітичним методами.

13. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ ребро основи дорівнює 1, а висота багатогранника – в півтора рази менша ребра основи. Через вершини C , A_1 і B_1 проведено площину Σ . Знайдіть відстань від вершини C_1 до площини перерізу $\Sigma(CA_1B_1)$.

14. Точки M' і N' розташовані будь-де на бічних ребрах правильного тетраедра. Побудувати на поверхні тетраедра геометричне місце точок, рівновіддалених від точок M' і N' .

15. На ребрах A_1B_1 і CC_1 правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, в якій $AA_1 : A_1B_1 = 1 : 2$, узято відповідно точки P і Q – середини цих ребер. Побудувати геометричне місце точок на поверхні призми, рівновіддалених від точок P і Q .

16. У правильній шестикутній піраміді бічне ребро відноситься до сторони основи як $\sqrt{13} : 2$. Знайти на поверхні піраміди геометричне місце точок, рівновіддалених від площини основи і бічної грані піраміди.

17. В основі піраміди $SABC$ лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із прямим кутом C . Кожне бічне ребро утворює із площиною основи кут 45° . Знайдіть кут між медіаною AM грані SAB і площиною грані SBC .

18. В основі прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежить паралелограм із гострим кутом A при вершині, рівним 60° . Знайдіть кут між діагоналлю $B_1 D$ паралелепіпеда і його бічною гранню $CC_1 D_1 B$, якщо $AB : AD : AA_1 = 2 : 1 : 3$.

Приклади міркувань у покроковому моделюванні задач

1. Паралелограм $ABCD$ є зображенням квадрата, у площині якого задані також точка P і пряма p . Потрібно змодельовати зображенням перпендикуляр, опустивши його з точки P на пряму p .

Безсумнівно, це – одна з можливих моделей (інтерпретацій) вище детально (в рисунковому представленні) опрацьованої нами першої основної метричної задачі в площині загального розташування. Однак у цій ситуації метричну визначеність площини Σ забезпечує зображення квадрата $ABCD : A'B' = B'C'$; $\angle A'B'C' = 90^\circ$.

1-й спосіб розв'язання. В його основу покладено метод суміщення, що добре видно з рисунка 1.41. Коментарі до побудовних операцій ідентичні вище наведеним у задачі №2, §2.

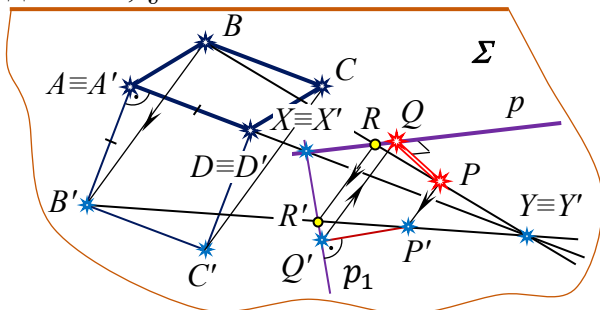


Рис. 1.41

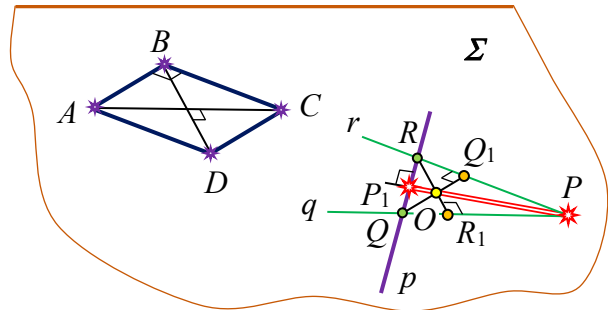


Рис. 1.42

2-й спосіб розв'язання. Дві пари спряжених (взаємно перпендикулярних в оригіналі) напрямів визначені на площині зображень умовою задачі (рис. 1.42): $A'B' \perp B'C'$ (сторони квадрата), $A'C' \perp B'D'$ (діагоналі квадрата). Як і в задачі 2, побудова шуканого перпендикуляра PP_1 , що зображає разом із прямою $QR \equiv p$ третю пару

взаємно перпендикулярних прямих, ґрунтується на «принципі висот» – твердженні, що висоти трикутника, які перетинаються в одній точці та розглядаються попарно з відповідними їм сторонами цього ж трикутника, утворюють три пари перпендикулярних прямих. Усі ж графічні дії в своїй сукупності повторюють, по суті справи, вже виконані нами раніше побудови на рисунку 1.10.

3-й спосіб розв’язання. Проведемо із вершини D на проєкційному кресленні квадрата (рис. 1.43, а) промінь $p_1 \parallel p$ ($M = p_1 \cap BC$) і побудуємо зображення перпендикуляра, проведеного, наприклад, із точки C на пряму DM .

Щоб встановити послідовність кроків у здійсненні графічних операції у проєкціях картинної площини, звернемося до квадрата-оригіналу (рис. 1.43, б).

Припустимо, що перпендикуляр $C'L'$ до прямої $D'M'$ уже проведено за відомим площинним правилом. Розглянемо прямокутні трикутники $C'B'L'$ і $D'C'M'$. Очевидно, що вони рівні, оскільки $C'B' = D'C'$ (за умовою) і $\angle B'C'L' = \angle C'D'M'$ (як кути, відповідні сторони яких перпендикулярні). З рівності трикутників випливає, що $C'M' = B'L'$, а отже, $\frac{C'M'}{M'B'} = \frac{B'L'}{L'A'}$. Тепер неважко зрозуміти, що для побудови перпендикуляра $L'C'$, рисунково відоме (задане) відношення відрізків $\frac{C'M'}{M'B'}$ на стороні квадрата $C'B'$ слід перенести на його суміжну сторону $B'A'$. Це зручно зробити виконавши такі операції. Провівши $M'N' \parallel B'A'$, одержимо $\frac{C'M'}{M'B'} = \frac{D'N'}{N'A'}$. Після цього проведемо $N'L' \parallel D'B'$. У результаті, отримаємо: $\frac{D'N'}{N'A'} = \frac{B'L'}{L'A'}$. Отже, остаточно: $\frac{C'M'}{M'B'} = \frac{B'L'}{L'A'}$.

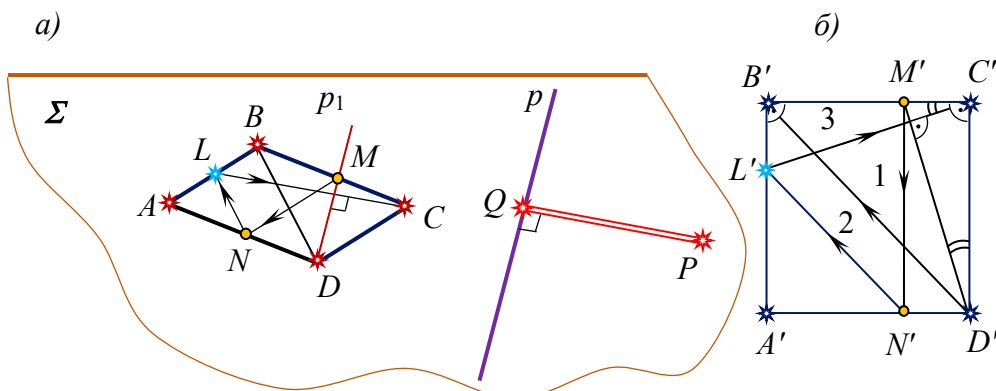


Рис. 1.43

Пам’ятаючи, що відношення відрізків на прямій та паралельність прямих є інваріантами паралельного проєціювання, здійснюємо відповідні графічні дії безпосередньо на зображенні (рис. 1.43, а). Ці побудови досить прості й не потребують додаткових пояснень.

Після того, як пряма LC , перпендикулярна в оригіналі до DM , уже буде побудована, для завершення процесу розв’язання задачі залишиться лише через точку P провести пряму $PQ \parallel LC$.

2. Накреслений еліпс ω є зображенням кола, у площині якого задані також точка P і пряма p . Потрібно змодельовати зображенням перпендикуляр, опущений із точки P на пряму p .

Проведемо дві будь-які паралельні хорди еліпса ω і поділимо їх точками M і N навпіл, тоді діаметр CD кривої ω , який визначається на кресленні точками M і N , буде спряженим до вказаних хорд (рис. 1.44, 1.45). Тому, провівши через середину відрізка CD ще один діаметр, паралельний згаданим хордам, дістанемо пару спряжених діаметрів еліпса CD і AB . В оригіналі, як відомо, ці діаметри взаємно перпендикулярні.

Аналогічно можна побудувати ще одну будь-яку пару спряжених діаметрів. Порівнюючи з уже розв'язаними схожими задачами, стає зрозуміло, що зображення еліпса цілком метрично визначає площину рисунка Σ .

1-й спосіб розв'язання. Виберемо, наприклад (рис. 1.44), діаметр $CD \equiv C'D'$ за вісь суміщення кола ω' із площиною дошки (зошита) Σ , на якій еліпс ω є його паралельною проєкцією. Після повороту на певний кут коло ω' , потрапивши на площину Σ , зобразиться у натуральну величину, а діаметр кола $A'B'$, перпендикулярний діаметру $C'D'$, буде суміщенням діаметра еліпса AB . Отже, в цьому випадку на кресленні визначено не лише вісь суміщення $CD \equiv C'D'$, а ще й дві пари точок, відповідних у перспективно-афінній відповідності: $A \leftrightarrow A'$ і $B \leftrightarrow B'$, що дозволяє за вже відомою схемою (див. попередні задачі) побудувати зображення перпендикуляра PQ , опущеного із заданої точки (P) на задану пряму (p).

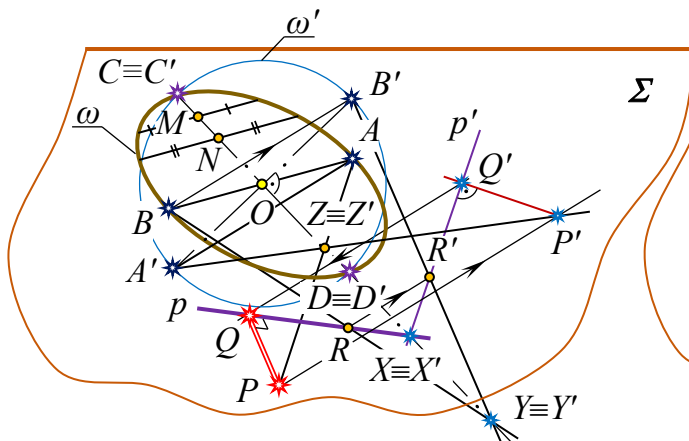


Рис. 1.44

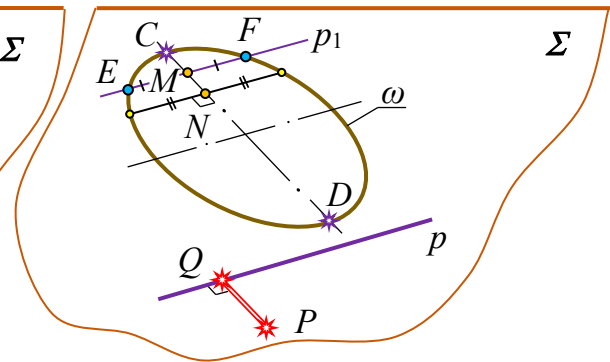


Рис. 1.45

2-й спосіб розв'язання. Проведемо (рис. 1.45) яку завгодно пряму p_1 , що перетинає еліпс у двох точках E, F і паралельна заданій прямій p . Побудуємо діаметр CD еліпса ω , спряжений хорді EF . Очевидно, що в оригіналі CD і EF взаємно перпендикулярні, тому відрізок PQ , що паралельний до CD , й буде шуканим перпендикуляром.

4. Дано зображення ABC прямокутного трикутника $A'B'C'$, один катет якого у два рази більший іншого ($A'B' : A'C' = 2 : 1$). Побудувати у площині трикутника точки, рівновіддалені від катетів та розташовані від точки A' – вершини прямого кута – на відстані, що дорівнює відрізку висоти трикутника, проведеної з цієї ж вершини на гіпотенузу.

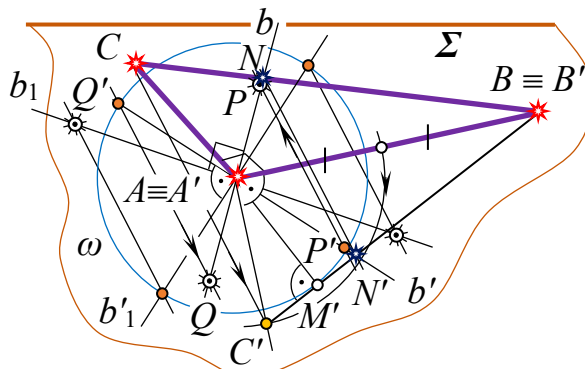


Рис. 1.46

Напевне, що зображення заданого трикутника на рисунку 1.46 є метрично визначеним, адже: $A'B' = 2A'C'$, $\angle A' = 90^\circ$. Отже, методом суміщення ($A'B' \equiv AB$ – вісь руху) неважко відтворити на картинній площині істинну форму трикутника-оригіналу $A'B'C'$. Якщо ще й пригадати, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є його бісектриса, а геометричним місцем

точок, рівновіддалених від точки, – коло, з центром у цій точці, то ретельно виконана побудова, яку ми зумисне пропонуємо детально обґрунтувати читачеві самостійно, уявляється надто простою.

5. На кресленні зображено трикутник ABC , причому відомо, що в оригіналі $\angle B'A'C' = 30^\circ, \angle C'B'D' = 20^\circ$, а дана точка D' належить відрізку $A'C'$. Побудувати точку P , що зображає центр P' вписаного у трикутник $A'B'C'$ кола.

Очевидно, що для розв'язання задачі досить рисунково встановити істинну форму прообразу накресленого трикутника ABC , скориставшись, як і раніше, методом суміщення з картинною площиною фігури, подібної оригіналу, (рис. 1.47).

Нехай $AC \equiv A'C'$ – справжня (до подібності) сторона оригінального трикутника. Тоді, з одного боку, точку B' слід шукати на промені a , який у вибраній півплощині відносно променя AC утворює з ним $\angle aAC = 30^\circ$. З іншого боку, відрізок $D'C' \equiv DC$ із шуканої точки B' видно під кутом 20° . Тому побудуємо спочатку сукупність усіх точок (ГМТ) у вибраній півплощині, з яких згаданий відрізок видно під заданим кутом ([1, 5], гл. II, §3, приклад 1), а потім знайдемо точку B' перетину променя a з дугою кола, яка вміщує кут у 20° . Завершення графічного шляху розв'язання задачі в так встановленому на площині Σ спорідненні ($AC \equiv A'C'$ – вісь відповідності, $B \leftrightarrow B'$ – пара відповідних точок) є очевидним: $A'B'C'$ – шуканий трикутник.

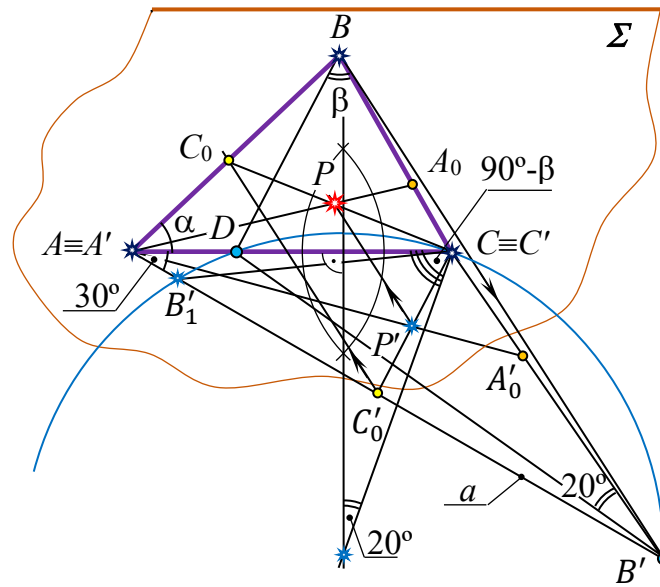


Рис. 1.47

Уважно оглянувши рисунок за кроками побудови, помічаємо (див. відшукування точки B'_1), що задача в цій конкретній ситуації має два розв'язки. Однак, напевне, вихідні дані умови задачі припускають варіант, коли буде лише один розв'язок, або ж (можливо) не буде жодного. Залишаємо право на строге проведення дослідження цієї конструктивної задачі за читачем.

6. Дано зображення рівнобедреного трикутника з кутом при вершині, рівним 36° . Побудувати зображення центрів вписаного і описаного кіл.

1-й спосіб розв'язання. Графічно, методом суміщення, розв'язок задачі відшукується досить просто. Справді, нехай $A'B'C'$ – рівнобедрений трикутник (рис. 1.48), в якого $A'C' = B'C'$ і $\angle C' = 36^\circ$. Напевне, що задані умовою два метричні параметри цілком визначають форму трикутника. Суміщаємо трикутник-оригінал із картинною площиною шляхом обертання точки C' навколо його основи (осі) $A'B' \equiv AB$. Тут, після суміщення, $\angle A' = \angle B' = 72^\circ$, а висота $C'D$ ($A'D = DB'$) трикутника розташовується під прямим кутом до $A'B'$. Добре зрозумілі із проєкційного креслення побудовні операції стосовно відшукування в оригіналі ($\triangle A'B'C'$) і наступного перенесення на зображення ($\triangle ABC$) центра $O'(O)$ вписаного і центра $Q'(Q)$ описаного

кіл, виконуються через посилання до часто вживаних вище, всім відомих тверджень, які стосуються саме цих геометричних понять і об'єктів.

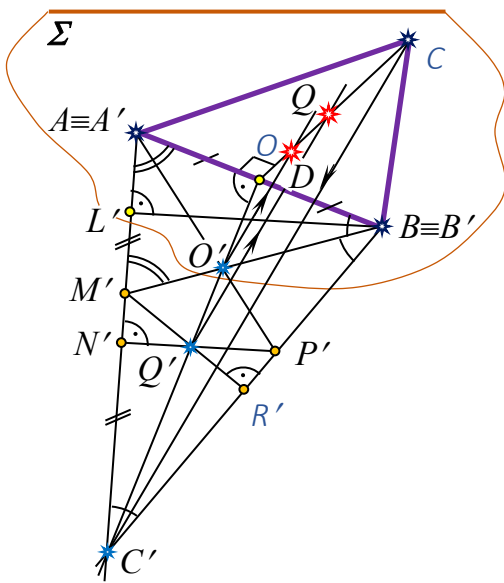


Рис. 1.48

2-й спосіб розв'язання. Ретельно осмислюючи умову задачі та рисунок 1.48 до неї, помічаємо, що в оригіналі бісектриса кута B' (як і кута A'), градусна міра якого дорівнює 72° , ділить його на два рівні кути – по 36° кожний. Тому трикутник $B'A'M'$ (як і трикутник $A'P'B'$) – рівнобедрений і $A'B' = M'B'$ ($B'A' = P'A'$). Отже, трикутники $B'A'M'$ і $C'B'A'$ подібні. З подібності трикутників випливає: $\frac{C'A'}{A'B'} = \frac{A'B'}{A'M'}$. Проте трикутник $B'M'C'$ теж рівнобедрений із кутом при основі, рівним 36° . Тому $B'M' = B'A' = M'C'$ і, за таких обставин, записана пропорція приймає вид: $\frac{C'A'}{C'M'} = \frac{C'M'}{A'M'}$. Якщо ще й врахувати, що $A'M' = C'A' - C'M'$, та покласти, наприклад, $C'A' = 1$, то одержимо: $\frac{1}{C'M'} = \frac{C'M'}{1 - A'M'}$. Звідси $(C'M')^2 +$

$C'M' - 1 = 0$. Розв'язавши останнє квадратне рівняння, матимемо $C'M' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тепер уже просто знаходимо $A'M' = 1 - C'M' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, й тому отримаємо $C'M':M'A' = CM : MA = (\sqrt{5} + 1) : 2$. Подати графічно записане відношення відрізків (за будь-якої одиниці довжини) зовсім нескладно (див. рис. 1.49, б). Останні «штрихи» у процесі побудови точки M , а зрештою, і точки O , замовленої висновком задачі, добре зрозумілі з рисунка 1.49, а.

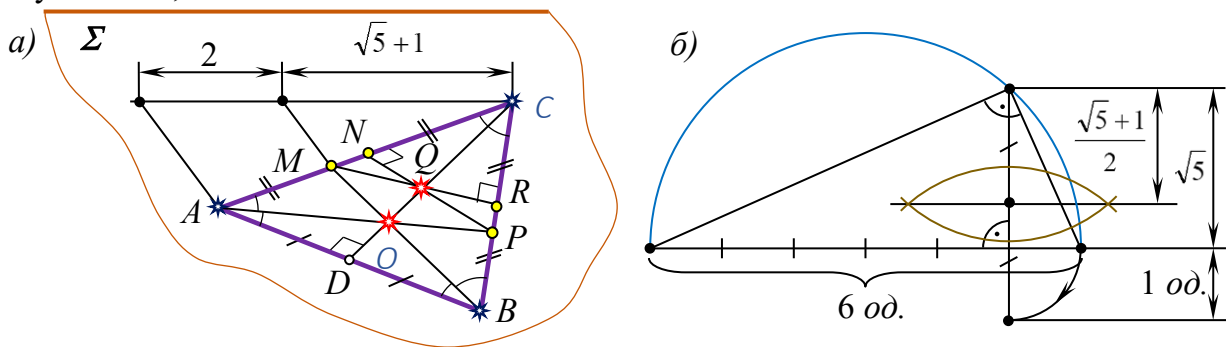


Рис. 1.49

Для відшукування точки Q на відрізку CD , ще раз повернемося до трикутника $B'M'C'$ (див. рис. 1.48). Він, на чому вже наголошувалося, рівнобедрений ($\angle B' = \angle C' = 36^\circ$), тому $C'M' = M'B'$, а відрізок $M'R'$ ($C'R' = R'B'$) є одночасно медіаною, бісектрисою і висотою цього трикутника. Важливо також, що $C'O'$ – бісектриса кута C' (за умовою і побудовою), тобто всі її точки рівновіддалені від сторін кута C' , тому точка $Q' = M'R' \cap C'O'$ є рівновіддаленою від точок C' і B' . З аналогічних міркувань, проведених стосовно трикутника $C'P'A'$, випливає, що точка Q' рівновіддалена також від точок C' і A' . Отже, Q' – центр кола, описаного навколо трикутника $A'B'C'$. На рисунку 1.49, а $AN = NC$ і $BR = RC$, тобто точки N і R є основами серединних перпендикулярів сторін AC і BC відповідно, тому точку Q знаходимо в їх перетині або з відрізком CD , або з відрізком NP , або – MR , що, врешті, однаково.

Примітка. Цікавим у графічному представленні цієї задачі виявився факт

($A'C' : A'B' = A'B' : A'M'$) особливого розташування точки M' на стороні $A'C'$. Остання, як з'ясувалося, є точкою «золотого перерізу» («золотого поділу») цього відрізка. Отже, $C'M' : M'A' \cong 8 : 5 \cong 13 : 8 \cong \dots \cong 1,618$.

Крім цього, повертаючись до §2, задачі 2 і задач 1, 2, розв'язаних щойно вище, запитасмо в читача: «Чи коректною в конструктивній геометрії буде пропозиція відшукування форми накресленого трикутника, коли зображено, до того ж, точку перетину його медіан?» Обґрунтуйте відповідь.

11. Дано зображення $EFGABC$ похилої призми, в основі якої лежить рівносторонній трикутник ABC , а вершина G проєкціюється в точку O – середину ребра $AB = \sqrt{5}$. Побудуйте нормальний переріз призми і знайдіть площу трикутника перерізу, якщо $GO = 2CO$.

Зіставляючи метричні параметри елементів призми (рис. 1.50, а), помічаємо, що відрізки CO і OM у ролі суміжних сторін паралелограма $NCOM$ (див. винесене креслення) однозначно визначають зображення квадрата-оригіналу $N'C'O'M'$, у площині якого бічне ребро призми $C'G'$ є січним. Воно висікає на стороні квадрата $M'N'$ деяку точку P' . Тепер, за вже відомою схемою (див. задачу 1), опускаємо з точки O' перпендикуляр $O'L'$ на $C'G'$. Очевидно, що трикутник $A'B'L'$ й буде шуканим нормальним перерізом даної призми.

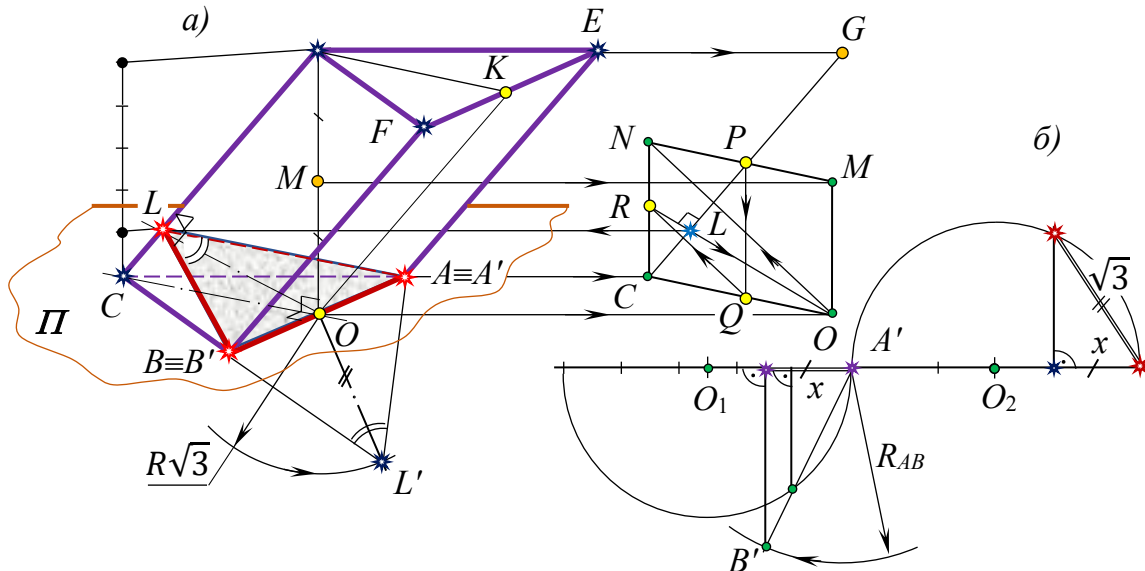


Рис. 1.50

Щоб знайти на площині зображень справжню форму трикутника ABL і обчислити його площу, скористаємося добре відомими співвідношеннями, спочатку в основі призми – у трикутнику ABC , а потім – у прямокутному трикутнику COG , в якому відрізок OL є його висотою, проведеною з вершини прямого кута O на гіпотенузу CG .

Отож: $AB = BC = \sqrt{5}$ за умовою, тому $BO = \frac{\sqrt{5}}{2}$ і $CO = \sqrt{CB^2 - BO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, а $GO = \sqrt{15}$. Крім цього, $CG = \sqrt{CO^2 + OG^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $CO^2 = CL \cdot CG \Rightarrow CL = \frac{3}{2\sqrt{3}}$; $LG = CG - CL = \frac{6}{\sqrt{3}}$ і $CL : LG = C'L' : L'G' = 1 : 4$. Цей результат, до речі, дає можливість відомим прийомом розв'язати задачу на побудову точки L графоаналітично (див. рис. 1.50, а). Нарешті, у прямокутному трикутнику LOG $LO^2 = CL \cdot LG \Rightarrow LO = \sqrt{3}$. Урахувавши, що $AB \equiv A'B'$, у наступному перетворенні графічно (рис.1.50, б) встановимо, щонайперше, одиницю довжини, відповідну саме тому відрізку, який на кресленні в операції суміщення залишиться без зміни. А потім, на базі так знайденого

одичного відрізка (x), будемо відрізок $O'L' = \sqrt{3}$. Узявши до уваги, що $O'L' \perp A'B'$, тепер можемо зобразити шуканий рівнобедрений трикутник $A'B'L'$ (рис.1.50, а). Тут $S = \frac{1}{2} A'B' \cdot O'L' = \frac{\sqrt{15}}{2}$ кв. од. Задачу розв'язано.

Спробуйте самостійно за проведеними щойно розрахунками знайти градусну міру двогранного кута при ребрі CG . Заміряйте на проєкційному кресленні транспортиром кут $A'L'B'$ і оцініть точність виконаних побудов. Осмисліть і реалізуйте також графічний метод відшукування форми трикутника $A'L'B'$ (підказ: покладіть на площину зображень трикутники ABC і COG , узявши за вісь обертання пряму $CO \equiv C'O'$).

12. В основі піраміди $SABC$ лежить (в оригіналі) прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), а її висота проєціюється у вершину B . Побудуйте кут, утворений гранями SAB і SAC , якщо $SB = BC = AC = a$. Через середину ребра BC перпендикулярно ребру SA проведіть січну площину Σ . Знайдіть площу фігури перерізу.

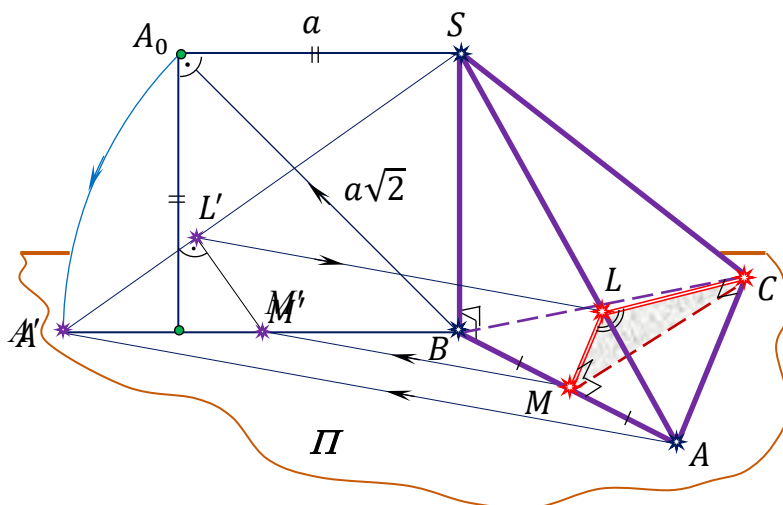


Рис. 1.51

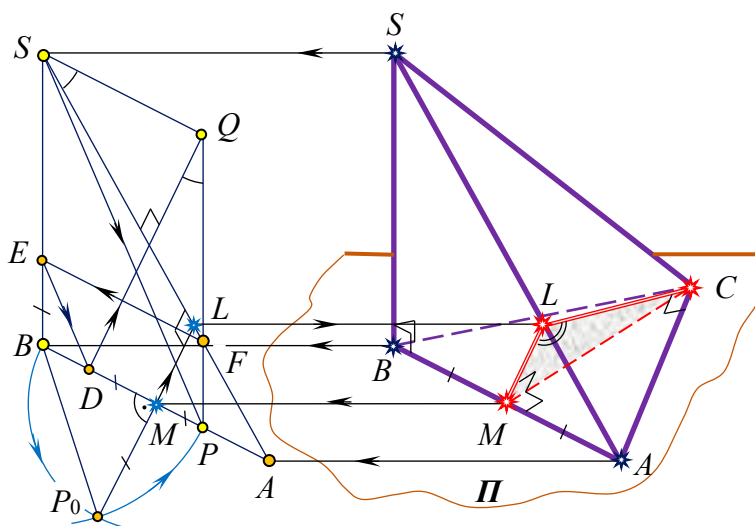


Рис. 1.52

3-й спосіб розв'язання. У прямокутному трикутнику $S'A'B'$ виконаємо прості аналітичні розрахунки (рис. 1.53). Якщо $S'B' = a$, а $A'B' = a\sqrt{2}$, то $S'A' = a\sqrt{3}$. Нехай $B'N'$ – перпендикуляр, опущений із вершини прямого кута B' на гіпотенузу $S'A'$. Тоді, як уже відомо, $(A'B')^2 = A'N' \cdot A'S'$; $(a\sqrt{2})^2 = A'N' \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow A'N' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Далі матимемо $S'N' = S'A' - N'A' = \frac{a}{\sqrt{3}}$ і $S'N' : N'A' = SN : NA = 1 : 2$. Отже, точка N на проєкційному

кресленні піраміди ділить відрізок SA у відношенні $1 : 2$, а ML – середня лінія трикутника ABN , яка обов'язково паралельна BN .

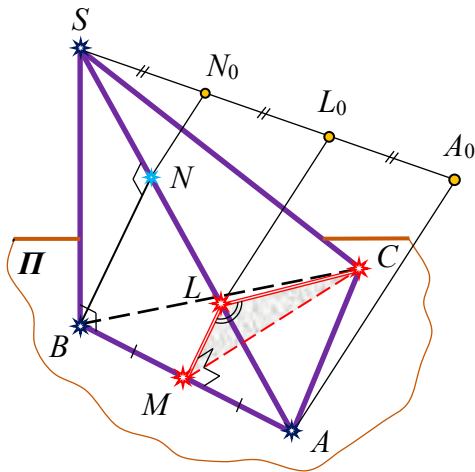


Рис. 1.53

Попередньо підсумовуючи, можемо зробити цікавий висновок, а саме, незалежно від того, якому із трьох запропонованих методів у пошуку результату надається пріоритет, незаперечним залишається факт нетрадиційного, однак вдалого вибору на зображенні піраміди учнем основної площини (творчий момент) і зведення однієї конструктивної задачі до іншої, більш простої в даному конкретному випадку.

Виконавши будь-яким із трьох описаних вище способів проміжну побудову, легко знайдемо на кресленні (рис. 1.54) зумовлений вихідними даними переріз піраміди $SABC$ площиною Σ , яка проходить через середину T ребра основи BC перпендикулярно бічному ребру SA . Для цього досить у гранях ABC , SAB і SAC (якраз у такій послідовності) провести відрізки прямих TP , PQ і QR , паралельно відповідним сторонам (CM , ML і LC) трикутника CML , а потім замкнути фігуру перерізу відрізком RT у грані SBC . Плоский чотирикутник $TPQR$ буде шуканим, й це не викликає сумнівів.

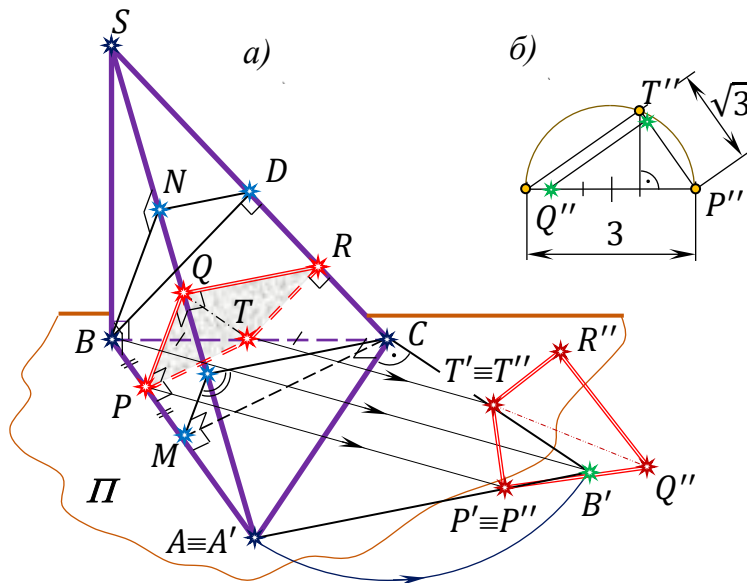


Рис. 1.54

Щоб обчислити площу чотирикутника $TPQR$, залишилося виразити всі його сторони через a . Одна з них (TP) є середньою лінією прямокутного трикутника CBM , тому $TP = \frac{1}{2} CM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Для вдалого вираження через a трьох інших його сторін, задіємо ще один переріз піраміди площиною, паралельною січній площині Σ , який проведемо через його вершину B . Тут сторони останнього трикутника перерізу BN , ND і DB будуть паралельні відповідно відрізкам PQ , QR і RT , тобто тим сторонам розглядуваного чотирикутника, з якими випало визначитися. Отже, $PQ \parallel ML \parallel BN$, а $BN^2 = SN \cdot NA$, де $SN = \frac{a}{\sqrt{3}}$ і $NA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Тому $BN = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Окрім цього, трикутники APQ і ABN подібні за побудовою і $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BN}$, де $AP = \frac{3}{4} AB$. Тому $PQ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Аналізуючи рисунок, констатуємо,

що PQ є середньою лінією трапеції $MBNL$, а QR – середньою лінією трапеції $LNDC$. Але ж ND – середня лінія трикутника SLC (за побудовою), а отже, $SD = DC$ і $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким чином, TR є середня лінія ще одного трикутника CBD , де $TR = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Нарешті, у прямокутному трикутнику SQR ($\angle Q = 90^\circ$ за побудовою), почергово знаходимо: $SQ = QA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $SR = \frac{3}{4}SC = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$. Тому $QR = \sqrt{SR^2 - SQ^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Помічаємо, що чотирикутник $TPQR$ є дельтоїдом, тобто дві пари його суміжних сторін рівні: $RT = TP$ і $PQ = QR$, а $\Delta PQT = \Delta RQT$. Тому $S_{TPQR} = 2S_{\Delta TPQ}$. Однак, як уже показано вище, $TP \perp PQ$. Таким чином, $S_{\Delta TPQ} = \frac{1}{2}TP \cdot PQ = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ і $S_{TPQR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Щоб графічно встановити на проєкційному рисунку справжню форму чотирикутника $TPQR$, потрібно, по-перше, сумістити з картинною площиною рівнобедрений прямокутний трикутник $A'B'C'$, обертаючи його, приміром, навколо прямої $AC \equiv A'C'$, і, по-друге, сумістити наступним рухом із цією ж площиною прямокутний трикутник $T''P''Q''$, залишивши без змін на кресленні його катет (вісь суміщення) $T'P' \equiv T''P''$ і врахувавши, що $T''P'':P''Q'' = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{6}}{4} = \sqrt{3} : 3$ (див. рис. 1.54, б).

Суттєво помітити, що такого ж результату можна досягти через суміщення з картинною площиною відразу двох граней заданої піраміди $A'B'C'$ і $A'B'S'$, де за вісь обертання резонно обрати їх спільне ребро $AB \equiv A'B'$ (побудову виконайте самостійно).

Очевидно (рис. 1.54, а), що істинна форма чотирикутника перерізу $TPQR$ визначає також натуральну величину двогранного кута при ребрі SA , який можна заміряти транспортиром. Тут $\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha' = 60^\circ$. Задачу розв'язано повністю.





*«При вивченні наук, приклади
корисніші від правил»*

Ісаак Ньютон

ВНУТРІШНЄ ПРОЕКЦІЮВАННЯ ЯК МЕТОД МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§1. Дві реалізації метричних задач стереометрії. Метод внутрішнього проєкціювання на одну площину проєкцій

Як уже зазначалося, консерватизм у навчанні геометрії здолати надто важко. Сьогодні, як і в минулі роки, шкільний курс переважно вміщує лише метричні задачі на обчислення, й ця вада найбільш притаманна розділу «Стереометрія». Тут об'єктивно, адекватно поставленим освітянським цілям проєкційному рисунку відводиться допоміжна, другорядна роль, хоч формально й має місце думка, що правильно виконане зображення фігури (чи комбінації кількох просторових фігур) є ключем до успіху. Прикро інше, у процесі розв'язування **задач на кресленнях-картинах** звичні формально-логічні (алгебричні) перетворення і викладки, числові підрахунки часто-густо нівелюють, затьмарюють їх геометричну сутність, не додають новизни в міркуваннях. Суб'єкт учіння елементарно виділяє стрижневу плоску фігуру і далі працює за правилами планіметрії. Він мало аналізує просторову ситуацію, не вникає в проблеми взаємних розташувань різних елементів геометричних фігур. Ігнорує, нарешті, **повну загальність** в обранні способу розв'язання задачі. Тому в усякому випадку лише обчислювальна реалізація стереометричної задачі далеко не на всі сто відсотків відповідає призначенню найпершої з наук: *розвивати просторові уявлення, формувати навички наочно-образного й логічного мислення засобами геометрії*.

А чи не можна переформулювати умову задачі так, щоб рисунок справді став найважливішим засобом результативного пошуку шляху її розв'язання? Творче переосмислення тривимірних об'єктів, демонстрування на моделі у візуальних побудовних перетвореннях присутніх міжелементних залежностей вимагає від учня неабияких навичок поєднання продуктивного уявлення інваріантних взаємозв'язків між визначальними геометричними фігурами з їх закономірним площинним представленням.

Найменше, що в змозі зробити вчитель математики, це щоразу «перекладати» на мову геометрії тексти звичайних задач із численних збірників, переважно переформулювавши їх висновки з наступним відшукуванням розв'язків не лише обчислювально, а й конструктивно. При цьому в якості «інструменту» графічної діяльності учня буде корисним, найперше, метод суміщення та його обов'язковий результат – закономірні виносні креслення.

Ми більш ніж упевнені, поліпшити зацікавленість геометрією, умовно кажучи, невимушено заохочувати учня до активного використання її методів на

практиці, активізувати природні задатки просторового мислення, додаючи навичок творчості, можна винятково сміливим переорієнтуванням пріоритетів у навчанні – з обчислювальних стандартизованих прийомів і способів – на методологічно нетипові побудовні, які характеризуються суто геометричним тлумаченням, образним уявленням і діяльнісним рисунковим супроводом.

За змістом і формою подання фактів та у плані їх осмисленого сприйняття лише такі підходи всеохоплююче висвітлюють внутрішні природні зв'язки між окремими елементами стереометричних фігур, сприяють їх ефективному «баченню» через уявлення, удосконалюють професійні вміння й навички, тренують розум розмаїтістю умоглядних логічних схем. Адже не секрет, що Знання ніколи не можна дати в готовому вигляді. Вони завжди завойовуються через включення їх у ту чи іншу діяльність, у чому була переконана З. І. Слєпкань. Інтенсивне розв'язування задач є невід'ємним і обов'язковим компонентом діяльності учня у процесі вивчення геометрії. Завдяки задачам, у більшій мірі, учні усвідомлюють геометричну дійсність, навчаються співвідносити одні елементи багатovidу фігур з іншими, отримують вирішальний поштовх у розуміння і сприйнятті зумовлених просторових залежностей. У задачах, розв'язуваних на бінарних моделях, неначе в реальному житті відпрацьовуються стереотипи доречного застосування істинних тверджень для пошуку геометричного результату. Тобто, тільки задачі конструктивного характеру візуалізацією уявлюваних перетворень додають практичного досвіду просторового наочно-образного мислення.

Розглянемо спочатку одну із задач на обчислення, яка може бути типовим зразком виваженої геометризації й унаочнення схожих пропозицій.

Задача 1. *У правильній чотирикутній піраміді зі стороною основи a побудовано переріз, що проходить через вершину основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра. Знайти його площу, якщо бічне ребро піраміди утворює з її висотою кут 30° ([7], р. VI, §3, задача 3).*

Спочатку зробимо кілька принципових методичних зауважень по суті авторського подання задачі в зазначеній книзі.

1. Рисунок 200 першоджерела [7] є кресленням-картиною (точку N на ребрі SC вибрано довільно), чого, загалом, цілком досить для його аналізу, тобто для ефективного використання в якості «ключа» до відшукування шляху розв'язання задачі на обчислення. Саме такі допоміжні проєкційні креслення є надто часто вживаними в стереометрії ЗЗСО.

2. Пояснення стосовно побудови чотирикутника $AKNL$ перерізу піраміди площиною описані геометрично слабко, не переконливо, оскільки з них не зрозуміло, як у гранях SBC і SCD перпендикулярно SC проведені відрізки KN і LN , а саме, де на ребрах SB і SD узяті точки K і L ?

3. Кут у 30° між бічним ребром і висотою піраміди дає можливість швидко і якісно виконати проєкційний рисунок, як креслення-модель. Справді, зовсім неважко помітити, що $\angle ASC = 60^\circ$, а трикутник ASC – рівносторонній. Тому відрізок AN є не лише висотою, а ще й медіаною цього трикутника ($AN \perp SC$, $SN = NC$). Отже, одна із прямих, визначальних для січної площини і фігури перерізу, вже побудована. Далі, AN перетинає висоту піраміди SO в точці Q .

Провівши через точку Q пряму, паралельну BD , в її перетині з ребрами SB і SD знаходимо відповідно точки K і L – ще дві вершини чотирикутника перерізу $AKNL$. Пряма KL є другою з визначальних прямих (які перетинаються) січної площини і шуканої фігури перерізу. Вона теж перпендикулярна SC , адже $KL \parallel BD$, а $BD \perp AC$ (діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом); AC , у свою чергу, вміщує проєкцію OC ребра SC на площину основи піраміди, тому, згідно з теоремою про три перпендикуляри, $SC \perp BD$. Якраз такими поясненнями мали б формуватися чіткі посилання на теорему «про два перпендикуляри».

Таким чином, в оригінальному варіанті, в найпростішій стереометричній ситуації **конструктивною складовою задачі просто знехтували!** Чому? – важко зрозуміти.

4. Завдячуючи тому ж куту з умови ($\angle ASO = 30^\circ$), обчислювальний етап задачі (відсутній у книзі) – тривіальний. Оскільки $AN \perp KL$ (за теоремою про проєкціювання прямого кута), чотирикутник $AKNL$ є дельтоїдом і $S_{AKNL} = \frac{1}{2} AN \cdot KL$. Відрізок $AN = a \sqrt{\frac{3}{2}}$ знаходимо як висоту рівностороннього трикутника ASC зі стороною $AC = a\sqrt{2}$ (SO і AN – висоти та ще й медіани цього трикутника).

Урахувавши, що трикутники SKL і SBD – подібні, а $SQ = \frac{2}{3} SO$, матимемо $KL = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$. Остаточо знаходимо: $S_{AKNL} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Тепер зумисне ускладнимо умову задачі та наповнимо висновок винятково геометричним змістом («перекладемо» на мову геометрії), чим унаочнимо її та додамо стереометрії. Далі будемо говорити: «*геометрично підсилимо*» чи «*геометризуємо*» задачу.

Задача 1*. *Правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і висотою $1,5a$ перетнули площиною, яка проходить через вершину основи і є перпендикулярною до протилежного бічного ребра. Побудувати переріз піраміди площиною, встановити форму та обчислити площу фігури перерізу; побудувати розгортку зрізаної піраміди та виготовити модель.*

Очевидно, що така уявлювана інтерпретація спершу тривіальної ситуації з указаною пірамідою, міняє місцями пріоритети, а саме, на перший план виступає конструктивна, суто геометрична складова в розв'язанні задачі, адже спочатку потрібно строго змодельювати фігуру перерізу піраміди площиною, встановити її оригінальну форму або, що однаково, знайти зображувальну площу з точністю до подібності та ще й побудувати розгортку зрізаної піраміди і власноруч оформити (склеїти) останню її моделлю. Формально-обчислювальний етап теж не забутий, оскільки умовою передбачено вираження площі чотирикутника $AKML$ формулою – функцією від a .

Уявімо собі, що піраміда $SABCD$ (рис. 1.55) перемістилась у просторі так, що діагональ AC її основи «лягла» на площину зображень (дошка, аркуш паперу). Рух, як відомо, не змінює форму і розміри фігури. Тобто, тепер уже $AC \equiv A'C'$ зображується в натуральну величину (або ж, із точністю до подібності). Але ж усім відомо, що $AC = a\sqrt{2}$, тому гіпотенуза AP рівнобедреного прямокутного

прямокутному трикутнику, маємо: $\frac{SO^2}{OC^2} = \frac{SM}{MC} \Rightarrow SM:MC = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9:2$.
 Skorиставшись теоремою про пропорційні відрізки ([14], §6, п. 60), простим графічним прийомом знаходимо точку M на проєкційному кресленні піраміди (див. рис. 1.55). Нарешті, через точку A проводимо пряму, що паралельна OM , до перетину з ребром SC у точці N ; як завершити накреслення чотирикутника перерізу ми вже знаємо. Напевно, що у вираженні результату задачі, завдяки цьому методу, число ліній на зображенні піраміди помітно зменшується – рисунок краще прочитується.

Зараз же ми знову спонукаємо читача до елементарних уявлень. Якщо осьовий переріз піраміди ASC уже суміщено із площиною зображень, то площина перерізу $\Sigma(AKNL)$, перпендикулярна ребру SC , вироджується в пряму лінію $A'N' \equiv \Sigma'$. Тобто, за умови, що одна з діагоналей дельтоїда ($A'N'$) уже зображена в натуральну величину, інша (KL), після повороту навколо $A'N'$ на 90° і суміщення площини Σ' із площиною рисунка, розташується на прямій n , яка перпендикулярна прямій $A'N'$ у точці $Q' = A'N' \cap O'S'$. Відрізок K_0L_0 ($K_0'L_0'$), паралельний $AC \equiv A'C'$, дорівнює відрітку KL в оригіналі, оскільки вони обидва є діагоналями квадрата – перерізу піраміди площиною, яка проходить через точку Q паралельно її основі $ABCD$. Тож відклавши $KL = K_0'L_0'$ на прямій n та з'єднавши послідовно точки $A' \rightarrow K' \rightarrow N' \rightarrow L'$, отримаємо переріз піраміди площиною в натуральну величину.

Щоб знайти діагональ AN чотирикутника перерізу в формальному вираженні, врахуємо, що трикутник ASC – рівнобедрений, а тому $SA = SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$, а AN , що є його висотою, зобразиться проведеною з вершини A на бічну сторону SC . Нехай (для зручності виражень) $NC = x$, тоді $SN = SC - x$, а $(AN^2 = SC^2 - (SC - x)^2, AN^2 = AC^2 - x^2) \Rightarrow 2SC \cdot x = AC^2$ і $x = NC = \frac{2a}{\sqrt{11}}$. Тому $AN = \frac{3\sqrt{2}a}{\sqrt{11}}$. Для формального відшукування ще однієї діагоналі KL дельтоїда $AKNL$, доречно скористаємося двома парами подібних трикутників: $\Delta SNQ \sim \Delta SOC \Rightarrow SQ = \frac{SN \cdot SC}{SO} = \frac{7a}{6}$, а $\Delta SKL \sim \Delta SBD \Rightarrow KL = \frac{BD \cdot SQ}{SO} = \frac{7\sqrt{2}a}{9}$. Таким чином, $S_{AKNL} = \frac{1}{2} AN \cdot KL = \frac{7\sqrt{11}a^2}{33}$.

Насамкінець, на завершення досить об'ємної, насиченої геометричними фактами та конструктивними перетвореннями задачі, пропонуємо цікаву (лише частково передбачувану умовою) **практичну роботу**.

1. Заміряйте «на око» лінійкою з міліметровими поділками (з точністю до соті долі сантиметра) на рисунку 1.55 довжину діагоналі AC в основі даної піраміди: $AC = a\sqrt{2} = 11,79 \text{ см} \Rightarrow a = \frac{11,79}{\sqrt{2}} \text{ см}$.

2. Підставте значення знайденого a в щойно одержану формулу площі чотирикутника: $S_{AKNL} = \frac{7\sqrt{11}a^2}{33} \cong 48,9 \text{ (см}^2\text{)}$. (*)

2. Заміряйте на тому ж рисунку довжину кожної з діагоналей дельтоїда, зображеного в натуральну величину: $AN = 10,63 \text{ см}$, $KL = 9,15 \text{ см}$.

4. Обчисліть площу фігури перерізу за довідниковою формулою:

$$S_{AKNL} = \frac{1}{2} \cdot 10,63 \cdot 9,15 \cong 48,63 \text{ (см}^2\text{)}. (**)$$

5. Порівняйте результати (*) і (**), зробіть відповідні висновки¹.

6. За суміщеннями трикутника ASC та дельтоїда $AKNL$ побудуйте на цупкому папері (методом триангуляції; див. далі, для прикладу, §2, задачі 3, 4) розгортку зрізаної піраміди (рис. 1.55); склейте модель.

Із цим, власне, побудовно-обчислювальні дієства, проведені нами в критично-порівняльному стилі над найпершою задачею розглядуваного пункту, вичерпано. Тут ставилося за мету очевидячки продемонструвати, як можна звичайну, елементарну пропозицію шкільної стереометрії усвідомлено переформулювавши її умову, змістовно наповнити, подати цікаво озвученими завданнями та уявлювано-динамічними прийомами наочно-образного вирішення останніх у закономірних реалізаціях на проєкційних кресленнях і, навіть, із задумом зробити таке моделювання стереометричних задач передбачувано рекламаційним. Адже фахівцям відомо, що успіх у пізнанні першопредмету, зацікавленість ним досягається не стільки числом, скільки вмінням, глибиною, якістю мислення геометричними образами у власноруч вирішених питаннях, а також їх **постановкою**, зумисним орієнтуванням на прикладну значущість чи життєву доцільність.

Змістовно, влучно трактувала і описувала сутність поняття «метод (спосіб) розв'язання задач» проф. З. І. Слєпкань. Вона говорила, що *озброєння учнів методами та способами розв'язання задач, навчання їх самостійному пошуку розв'язань задач – одна з важливих проблем шкільної математичної освіти*. Методи та способи розв'язування визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями, вміннями, засобами, які є в розпорядженні учнів на даному етапі навчання. Коли йдеться про методи чи способи розв'язання задач, то маються на увазі деякі приписи, вказівки про способи дій суб'єкта, який розв'язує задачу, які потрібно виконати, щоб розв'язати задачу. Воістину, краще не скажеш!

У вчителя чи студента-математика термін «внутрішнє проєкціювання за напрямом бічних ребер» асоціюється виключно з побудовами на позиційно визначених проєкційних кресленнях перерізів багатогранників площиною. Їм із власного досвіду добре відомі також методи перетворень фігур на площині й у просторі, координатний чи векторний методи, які мали б бути належно впроваджені в курсі метричної геометрії ЗЗСО. Однак у задачах на побудову, доведення і обчислення ще не знайшов свого постійного місця **метод внутрішнього проєкціювання** в його загальному розумінні. Першопричиною такого стану речей є недостатнє оволодіння суб'єктами математичної освіти геометричною суттю цієї специфічної конструктивної операції, яка виконується в уявленнях та відтворюється на проєкційному кресленні, нестача досвіду, навичок у його використанні, недооцінка, врешті, ролі і місця в стереометрії відомої теореми про три перпендикуляри, яку не без підстав інколи називають **основною теоремою евклідової метрики**. Нагадаємо її формулювання ([15], п.

¹ Заміри відрізків AC , AN і KL «зняті» з рисунка, виконаного циркулем і лінійкою на папері формату А4 авторами.

19): «Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проєкції, то вона перпендикулярна до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проєкції похилої». Мимоволі, а можливо й зумисне, О. В. Погорелов в оберненій теоремі не вимагає категорично, щоб пряма на площині проходила через точку перетину похилої із площиною. І це не дивно, адже прямий кут можуть утворювати не лише прямі, що перетинаються, а й мимобіжні прямі. У практичній стереометрії не менш уживаною є **узагальнююча теорема про три перпендикуляри**: «Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проєкції похилої чи до прямої, яка їй паралельна, перпендикулярна до самої похилої». І навпаки: «Пряма, проведена на площині перпендикулярно до похилої чи до прямої, яка їй паралельна, перпендикулярна до її проєкції». Саме цей штрих у підручнику не акцентується і тому учні, що сприйняли теорему однобоко, не в змозі користуватися нею в широкому розумінні. Такі принципові недомовки мали б предметно пояснювати учням учителі.

Розпочинаючи демонстрацію методу внутрішнього проєкціювання на рівні учня середнього загальноосвітнього навчального закладу, доречно насамперед глибоко проаналізувати природу метрики куба, оскільки в задачах шкільного курсу стереометрії це одна з найпростіших і найбільш «уживаних» фігур, а елементарні геометричні взаємозалежності всередині тіла, підгледіти які зовсім нескладно, при вирішенні більшості просторових проблем спричиняють спрощення графічних операцій і зведення метричних перетворень до позиційних. Що ж стосується текстів умов задач, то їх ми будемо брати не лише з підручника «Геометрія 7-11» О. В. Погорелова, а й також із збірників математичних задач для вступників до вищих навчальних закладів і деяких методичних посібників, написаних на допомогу вчителям математики та методистам.

Задача 2. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі, яка з'єднує дві інші вершини ([10], §5, задача 36).

Відразу підкреслимо, що у підручнику цій задачі присвоєно «зірочку». Проте очевидно, що в такому формулюванні вважати її стереометричною можна лише умовно, оскільки вона відразу ж зводиться до планіметричної. Для цього досить (рис. 1.56) вершину куба A_1 і діагональ AC_1 віднести до прямокутного трикутника AA_1C_1 ($\angle A_1 = 90^\circ$), в якому катет $AA_1 = a$, катет $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, а гіпотенуза $AC_1 = a\sqrt{3}$. Залишилося скористатися або відомими формулами площі трикутника, або його середніми геометричними, щоб знайти шукану відстань A_1O як висоту, проведену з вершини прямого кута A_1 на гіпотенузу AC_1 :

$$A_1O = a\sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ Й це все. Майже «усні» міркування!}$$

Задача, що має характер вправи, за змістом і новизною стереометричних залежностей малоінформативна, тому в 11-му класі її умову варто було б подавати в іншому звучанні, а саме: «Ребро куба дорівнює a . **Опустіть** перпендикуляр із вершини куба на його діагональ, що з'єднує дві інші вершини. Знайдіть довжину цього перпендикуляра». Можна припустити, що саме таке

геометричне підсилення висновку й мав на увазі автор, відносячи задачу до вищої категорії складності.

Зрозуміло, що більш потужне змістове формулювання умови задачі має на увазі, щонайперше, певні уявні та графічні стереометричні перетворення, які конструктивно пов'язують шуканий відрізок A_1O з елементами куба, й лише потім – алгебричне вираження і обчислення довжини останнього.

1-й спосіб розв'язання. Наголосимо спочатку на *загальній геометричній* схемі пошуку шляху розв'язання задачі: **1)** через точку A_1 потрібно провести геометричне місце прямих простору (площину Σ), перпендикулярних прямій AC_1 ; **2)** знайти точку O перетину проведеної площини Σ і даної прямої AC_1 ; **3)** з'єднати точки A_1 і O .

Цікаво, що площина $\Sigma(A_1DB) \perp AC_1$ будується дуже просто, якщо послатися на узагальнену теорему про три перпендикуляри, двічі скориставшись при цьому в уяві (і на рисунку) *внутрішнім ортогональним проєкціюванням*. Справді, AC_1 проєкціюється на ліву грань куба AA_1D_1D за напрямом $B \rightarrow A$ в діагональ AD_1 цієї грані. Але ж, $DA_1 \perp AD_1$, що безсумнівно. Отже, пряма DA_1 перпендикулярна прямій AD_1 , яка є проєкцією похилої AC_1 , тому вона перпендикулярна й самій похилій: $DA_1 \perp AC_1$. Аналогічно обґрунтовуємо факт перпендикулярності прямих AC_1 і BD ($C \rightarrow B$).

Точка O перетину діагоналі AC_1 із площиною $\Sigma(A_1DB)$ будується за класичним алгоритмом дій у три кроки, де в якості площини-посередника зручно взяти площину діагонального перерізу куба $\Lambda(AA_1C_1C)$, оскільки Σ і Λ уже мають одну спільну точку A_1 ; другу їх спільну точку Q знаходимо ввівши в розгляд, як посередник, площину верхньої грані тіла $\Omega(ABCD)$: **1)** $\Sigma(A_1DB) \cap \Omega(ABCD) = DB$; **2)** $\Lambda(AA_1C_1C) \cap \Omega(ABCD) = AC$; **3)** $AC \cap DB = Q$; **4)** A_1Q ; **5)** $O = A_1Q \cap AC_1$.

До діла *зауважимо*. На першому кроці операцій від нас вимагалось через точку A_1 провести площину, перпендикулярну діагоналі куба AC_1 . Логічно правильно, згідно з теоремою про два перпендикуляри, цю площину задавати двома прямими, що перетинаються і містять точку A_1 . До того ж, оскільки точка A_1 і відрізок AC_1 – елементи куба, то й шукані прямі теж мають бути його елементами. В геометрії, як відомо, в пошуку істини користуються методом перебору і відсівання гіпотетичних припущень. Зупиняються на тих із них, які задовольняють висунутим вимогам, решту відкидають. Отже, із точки A_1 виходять три ребра куба: A_1D_1 , A_1B_1 і AA_1 . Чи перпендикулярне хоча б одне з них діагоналі AC_1 ? Ребро AA_1 , як сторона прямокутника AA_1C_1C , який є діагональним перерізом куба, не може бути перпендикулярним його ж власній діагоналі AC_1 . Той факт, що ребра A_1D_1 і A_1B_1 не перпендикулярні A_1C_1 , доводиться з посиланнями на ту саму узагальнену теорему про три перпендикуляри з використанням схожих зв'язків і внутрішніх проєкціювань на грані AA_1D_1D і AA_1B_1B відповідно. Врешті нами з'ясовано, що прямими, перпендикулярними діагоналі AC_1 , є діагоналі A_1D і A_1B граней куба.

2-й спосіб розв'язання. Міркуючи просторовими категоріями, суть важливо помітити, що багатогранники ADA_1B і C_1DA_1B уособлюють дві правильні трикутні піраміди зі спільною основою DA_1B . Вони співвісні, їх висоти,

проведені з вершин A і C_1 , розташованих у різних півпросторах відносно площини основи, належать одній-єдиній прямій (діагоналі куба, $AO + OC_1 = AC_1$), яка перпендикулярна площині основи і, що природно, проходить через точку перетину медіан – центр рівностороннього трикутника DA_1B : $O = A_1Q \cap DP$. **Увага!** В цьому випадку задача коректно і строго розв'язується виключно в уявленнях, а її графічна кінцівка – елементарна.

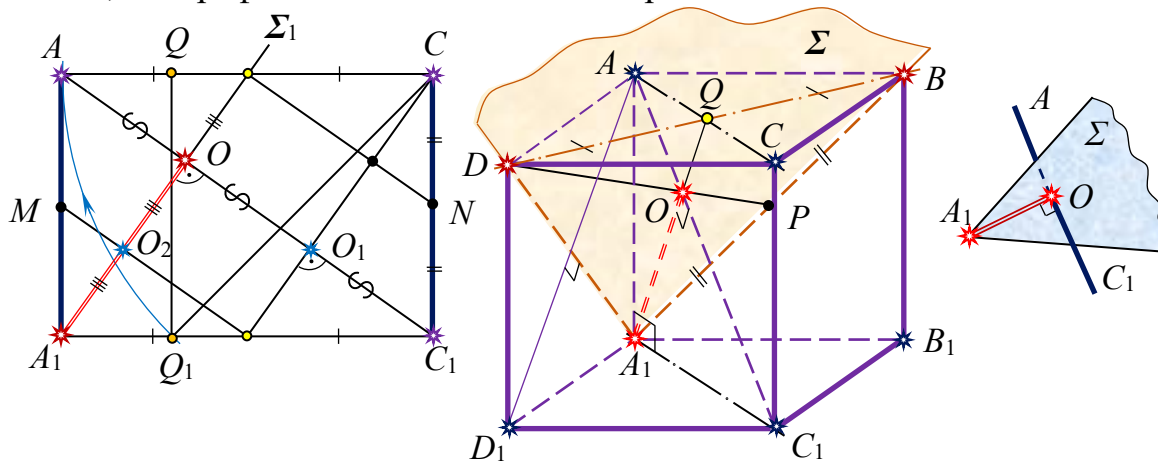


Рис. 1.56

3-й спосіб розв'язання. Можна розмірковувати ще й так: провівши у прямокутнику AA_1C_1C (див. винесене креслення діагонального перерізу куба) $CQ_1 \parallel QA_1$, $QN \parallel AC_1$ і $Q_1M \parallel AC_1$, матимемо: $AQ = QC = A_1Q_1 = Q_1C_1$. Звідси, за теоремою Фалеса: $A_1Q_2 = Q_2O = OQ$. Отже, точка O не лише належить медіані A_1Q рівностороннього трикутника A_1DB , а ще й ділить її у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини A_1 . Це ще один варіант доведення того, що основою висоти правильної трикутної піраміди AA_1DB є точка O , а $AC_1 \perp \Sigma(A_1DB)$. До речі, з тих самих міркувань випливає: $AO = OO_1 = O_1C_1$, тобто точки O і O_1 розділяють діагональ куба AC_1 на три рівні частини, що теж варто особливої уваги.

4-й спосіб розв'язання. Напевно, що на винесеному кресленні точка O розділяє відрізок A_1Q у тому ж відношенні, в якому однойменна точка ділить його однойменний відрізок на зображенні куба. Отож, у вдалому посиланні до винесеного креслення діагонального перерізу AA_1C_1C куба, можна з успіхом ще й так вирішити питання побудови перпендикуляра, опущеного з його вершини A_1 на діагональ AC_1 .

5-й спосіб розв'язання. Нарешті, у прямокутному трикутнику AA_1C_1 точка O , як основа перпендикуляра, опущеного з вершини A_1 прямого кута на гіпотенузу AC_1 , може бути надто просто розрахованою суто алгебрично, адже $\frac{AA_1^2}{A_1C_1^2} = \frac{AO}{OC_1} \Rightarrow \frac{AO}{OC_1} = \frac{1}{2}$. Графічне завершення побудови на проєкційному кресленні очевидне.

Відрізок A_1O – шуканий. Завершальний (обчислювальний) етап задачі тривіальний: $A_1O = \frac{2}{3}A_1Q = \frac{2}{3}a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$, що надто добре видно з рисунка.

Таким чином, елементарна в розумінні формальних виражень задача із

шкільного підручника, яку нами у висновку переформульовано з наголосом на її геометричну сутність, розв'язується у просторі та на проєкційному кресленні *п'ятьма різними* побудовними прийомами. При цьому до справи залучаються уявлення, зокрема, у виконанні операцій внутрішнього проєкціювання, доречні поняття і факти, необхідно вилучені з пам'яті суб'єкта навчання, навички рисункових реалізацій наочно-образних схем просторових дій. Вміння шукати і знаходити методологічно несхожі варіанти моделювання стереометричних пропозицій є, на нашу думку, ознакою мислячої особистості, проявом творчого оволодіння предметом «Геометрія», а факт системного включення компонентів конструктивізму в навчальний процес школи є дієвим чинником впровадження елементів розвивального навчання.

Озвучена теза є стрижневою в підборі та пошуку методів бінарного моделювання алгоритмів розв'язання й наступних задач стереометрії.

Задача 3. *Відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює d . Знайдіть повну поверхню куба.*

Суттєво, що в цій задачі **побудовний** етап є найважливішим і без його якісного виконання не так просто в уявленнях, а потім і формально виразити через d ребро куба $AB = x$, до чого, власне, зводиться етап обчислень.

1-й спосіб розв'язання (рис. 1.57). Нехай A_1B і B_1C – діагоналі суміжних граней куба, які не перетинаються. Нагадаємо [10]: «Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра, яка рівна відстані між паралельними площинами, котрі проходять через ці прямі». З конструктивного означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих безпосередньо впливає правило-орієнтир побудовного етапу розв'язання задачі: 1) через пряму A_1B проведемо площину $\Sigma(A_1BD)$, паралельну прямій B_1C ($A_1D \parallel B_1C$); 2) через точку C прямої B_1C проведемо пряму n , перпендикулярну до площини Σ ; 3) знайдемо точку P перетину прямої n і площини Σ ; 4) у площині Σ через точку P проведемо пряму p , паралельну прямій A_1D (і, отже, $p \parallel B_1C$); 5) знайдемо точку M перетину прямих p і A_1B_1 ; 6) через точку M проведемо пряму q , паралельну прямій n ; 7) зафіксуємо точку N перетину прямих q і B_1C . Відрізок MN – шуканий спільний перпендикуляр прямих A_1B і B_1C .

На шляху графічної реалізації цього правила-орієнтиру дій на кресленні-моделі, об'єктивно найскладнішим за змістом є третій крок у побудові точки P перетину прямої n і площини Σ (ОПЗ-1). Тут, найперше, потрібно мати добру просторову уяву. Скориставшись попередньою задачею, маємо: $C_1A \perp \Sigma$. Але ж і $n \perp \Sigma$, тому $n \parallel C_1A$, а пара паралельних прямих, як відомо, визначають єдину площину Λ . Уявимо собі, що площини Σ і Λ перетнуті третьою площиною-посередником (ОПЗ-2) верхньої основи куба ($ABCD$). Очевидно, що прямі DB і CA будуть лініями перетину площини ($ABCD$) із площинами Σ і Λ відповідно. Тому точка O в перетині DB і CA є ще однією спільною точкою (крім уже відомої нам точки: $O_1 = C_1A \cap \Sigma$) для площин Σ і Λ . Отже, OO_1 – їх лінія перетину, яка й встановлює на n шукану точку P .

Легко помітити, що площина $\Lambda(n \parallel C_1A)$ є також площиною діагонального перерізу куба (CC_1A_1A). Але ж саме вона обиралася посередником у побудові

точки перетину діагоналі C_1A з перпендикулярною їй площиною Σ (див. задачу 2, 1-й спосіб розв'язання).

Отже, моделюючи точку P , ми двічі вводили в розгляд вдало розміщені площини-посередники. Спочатку проєкціювальну площину особливого розташування (зримо малозрозумілого) $\Lambda(n \parallel C_1A)$, а потім площину рівня $(ABCD)$. Хоч це були лише побудовні кроки усталеного способу міркувань, а згадані площини існують реально незалежно від нас, все ж «побачити» їх та скористатися ними початківцю порівняно важко. Можливо привабливішими для учня будуть наступні умовиводи. Розглянемо діагональний переріз куба площиною (CC_1A_1A) , яка визначена діагоналлю C_1A і вершиною C . Вона вміщує в собі перпендикуляр n , бо $C \in n$ і $n \parallel C_1A$. З іншого боку, площина (CC_1A_1A) перетинає площину $\Sigma(A_1BD)$ по прямій A_1O ($O = CA \cap BD$). Таким чином, матимемо, що прямі n і A_1O лежать в одній площині (CC_1A_1A) , а їх спільна точка P буде перетином перпендикуляра, проведеного з точки C , із площиною $\Sigma(A_1BD)$. Тут, розв'язуючи ОПЗ-1 у три кроки, матимемо $C_1A_1 \equiv n_1$ є вторинною проєкцією перпендикуляра n на площину основи $(A_1B_1C_1D_1)$ і, водночас, виродженою проєкцією площини-посередника.

Напевне, що $CP = NM = d$. Обчислення (вираження через d) довжини ребра куба x доречно провести за такою схемою: $\triangle OCP = \triangle OAO_1$ ($OC = OA$, $\angle OAO_1 = \angle OCP$, $\angle AOO_1 = \angle COP$). Звідси випливає, що $AO_1 = CP = d$. Крім цього, згідно з висновками задачі 2, паралельні прямі CO_2 і A_1O розділяють діагональ куба C_1A на три рівні частини, тому $C_1A = 3d$. У трикутнику AA_1C_1 $\angle A_1 = 90^\circ$, $AA_1 = x$, $A_1C_1 = x\sqrt{2}$, а елементарні закономірні вираження забезпечують остаточний результат: $x = d\sqrt{3}$ і $S_n = 18d^2$.

Наведений шлях розв'язання задачі на *обчислення* не оптимальний і, якби не очікуваний із задумом максимум у демонстрації загальногеометричної схеми конструктивних дій, одержати формальне представлення сторони куба через відрізок $MN = d$ ($x = d\sqrt{3}$) можна було б значно простіше та швидше, ввівши у використання не одну, а двійку паралельних площин $\Sigma(A_1BD)$, $\Omega(CB_1D)$ і їх спільний перпендикуляр – діагональ куба C_1A , що тепер уже очевидно; обов'язково добудуйте самостійно проєкційний рисунок і виконайте обчислення, адже цей прийом одержання формального результату найбільш прийнятний в умовах сучасного шкільного навчання.

Примітка. Куб нараховує вісім вершин і чотири діагоналі, кожна з яких має дві перпендикулярні площини. Причому, площина $\Sigma(A_1BD)$ «вибирає» три вершини; площина $\Omega(CB_1D)$ – ще інші три; дві вершини, що залишилися, належать діагоналі C_1A , яка перпендикулярна цим площинам. Ураховуючи ознаку паралельності двох площин, цей факт сприятиме щоразу оперативній побудові перпендикулярних площин будь-якій із діагоналей куба.

2-й спосіб розв'язання. Задачу конструктивної стереометрії на відшукування спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих слід віднести до переліку стрижневих, базових. Щойно *графічно* на проєкційному кресленні куба (рис. 1.57) було ще раз відтворено класичну модель в її розв'язанні. Інколи ж, як

відомо, надають пріоритет іншому методу: вводять у розгляд певну площину, перпендикулярну одній із заданих мимобіжних прямих, а далі, *внутрішнім проєкціюванням* за напрямом цієї ж прямої, зводять просторову задачу на перпендикулярність до площинної. Цікаво, що деінде остання конструкція видається більш компактною.

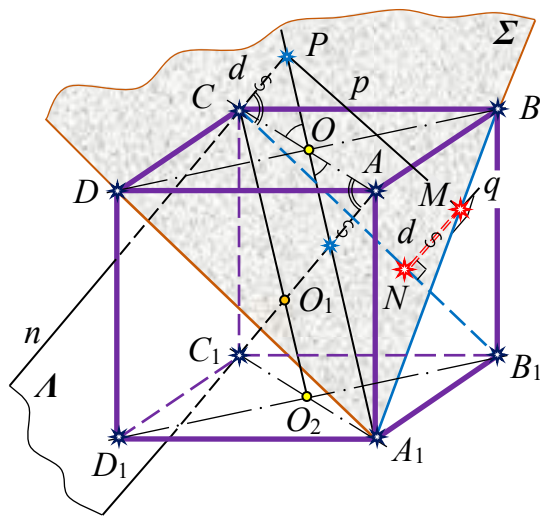


Рис. 1.57

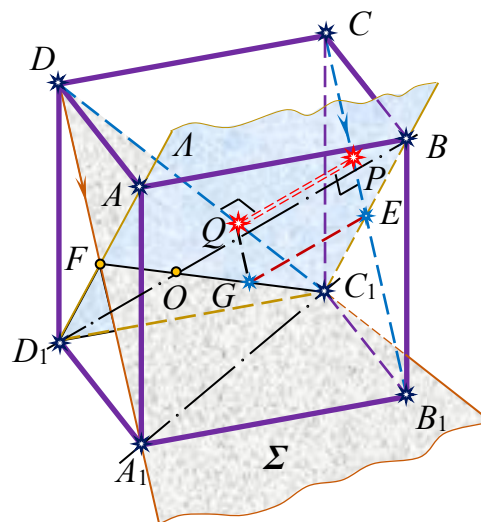


Рис. 1.58

Отже, площину Λ , перпендикулярну діагоналі CB_1 у грані куба CC_1B_1B (рис. 1.58), побудовно зручно задати (творчий момент) його діагональним перерізом ABC_1D_1 ($BD_1 \subset \Lambda(ABC_1D_1)$, $CB_1 \perp C_1B$, $CB_1 \perp D_1C_1$), оскільки Λ вміщує ще й точку C_1 діагоналі C_1D , яка мимобіжна з CB_1 і належить грані DD_1C_1C , що суміжна із гранню CC_1B_1B . CB_1 у внутрішньому ортогональному проєкціюванні за напрямом $C \rightarrow B_1$ і вироджується на площину Λ в точку E , а C_1D відбивається у відрізок C_1F , що визначає пряму перетину площини Λ із площиною $\Sigma(DA_1C_1)$, перпендикулярно розміщеною до діагоналі BD_1 (див. задачу 2). Тепер опустити перпендикуляр із точки E на пряму C_1F неважко. Він, по-перше, паралельний до BD_1 і, по-друге, матиме своєю основою точку G у перетині з C_1F , що очевидно. Оберненим проєкціюванням за напрямом $B_1 \rightarrow C$ легко знаходимо спільний перпендикуляр PQ заданих мимобіжних прямих CB_1 і C_1D .

Обчислення довжини спільного перпендикуляра PQ , якщо сторона куба дорівнює одиниці, майже усні. Адже відомо, що $BO = \frac{2}{3}BD_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, а EG – середня лінія трикутника C_1OB , тобто $EG = PQ = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Другий спосіб у розумінні виконавця побудови безсумнівно простіший описаного вище першого способу. Однак, як і варто було чекати у випадку куба, в конструктивному вираженні обидва способи у визначальних побудовах, поставлених *спеціальним* чином, зливаються. Такі реалізації, без жодних виключень і доповнень, лише **вербально** та в **уявленнях** тлумачать по різному. Справді, в першому способі дій площина $\Sigma(DA_1C_1)$ містить діагональ DC_1 і паралельна діагоналі CB_1 ($DA_1 \parallel CB_1$), а EG – перпендикуляр, що проведений з точки $E \in CB_1$ до площини Σ . Для відшукування точки G – основи перпендикуляра – зручно скористатися площиною-посередником $\Lambda(ABC_1D_1)$. Таким чином, *одні*

і ті ж побудови, виконані децю в іншій послідовності на рисунку 1.58, й по іншому достовірно обґрунтовані із залученням одних і тих самих геометричних фігур усередині куба **індукують два різні методи в пошуку шляху розв'язання розглядуваної задачі**. Умовно кажучи, принципово різні методи на даній конкретній моделі візуально ототоженні.

3-й спосіб розв'язання. Нехай в ролі мимобіжних прямих двох суміжних граней куба AA_1B_1B і BB_1C_1C , заданих умовою задачі, будуть відповідно їх діагоналі AB_1 і BC_1 (рис. 1.59). Діагональ CA_1 куба є похилою до обох указаних граней. Проекціюємо CA_1 ортогонально на ліву грань куба за напрямом $C \rightarrow B$ в іншу її діагональ $BA_1 \perp AB_1$, а на передню грань за напрямом $A_1 \rightarrow B_1$ – у діагональ $CB_1 \perp BC_1$. Тоді, згідно з узагальненою теоремою про три перпендикуляри, $CA_1 \perp AB_1$ і $CA_1 \perp BC_1$.

Далі, взявши до уваги встановлений факт, виконаємо ще одне внутрішнє косокутне проєкціювання прямих AB_1 і BC_1 за напрямом $C \rightarrow A_1$, тепер уже на площину основи куба $A_1B_1C_1D_1$. Із цим, через точки A та B проведемо проєкціювальні промені, паралельні CA_1 , і відкладемо на них відрізки AA_0 і BB_0 , рівні CA_1 . A_0 й B_0 – точки перетину променів *внутрішнього проєкціювання* з основною площиною, а A_0B_1 і B_0C_1 , що перетинаються в точці M , є виродженими (слід-) проєкціями двох проєкціювальних площин $\Sigma(AA_0 \cap AB_1)$ і $\Lambda(BB_0 \cap BC_1)$. Перша з них проєкціює AB_1 , а друга – BC_1 . Відомо, що дві проєкціювальні площини мають у своєму перетині проєкціювальну пряму. Проведемо через точку M пряму n , паралельну напрямку $A_1 \rightarrow C$ оберненого внутрішнього проєкціювання, а отже, паралельну A_0A та B_0B ; зафіксуємо точки P, Q перетину останньої з діагоналями AB_1, BC_1 : $P = n \cap AB_1, Q = n \cap BC_1$. Оскільки n – спільна пряма площин Σ і Λ , а $AB_1 \subset \Sigma, BC_1 \subset \Lambda$, то точки P і Q обов'язково реально існують. У свою чергу, $n \parallel CA_1$, а $CA_1 \perp AB_1$ і $CA_1 \perp BC_1$. Тому відрізок PQ , перпендикулярно розташований до AB_1 і BC_1 , – шуканий спільний перпендикуляр заданих мимобіжних прямих.

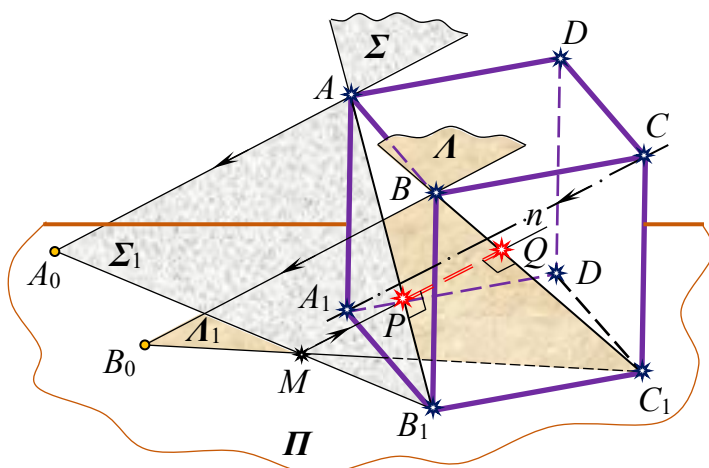


Рис. 1.59

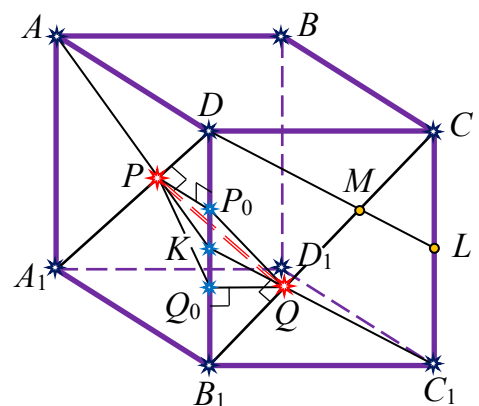


Рис. 1.60

4-й спосіб розв'язання. Нехай на етапі **аналізу** відрізок PQ (рис. 1.60) задовольняє умову задачі – є істинно спільним перпендикуляром діагоналей A_1B і B_1C . Знову ж таки, проєкціюємо внутрішнім чином відрізок PQ на передню

BB_1C_1C та ліву AA_1B_1B грані куба. Його проєкціями будуть відрізки QP_0 ($PP_0 \perp BB_1$) і PQ_0 ($QQ_0 \perp BB_1$) відповідно. З урахуванням висновку оберненої теореми про три перпендикуляри, $QP_0 \perp B_1C$ і $PQ_0 \perp A_1B$. Тоді трикутники B_1QP_0 і BPQ_0 – прямокутні й рівнобедрені, що очевидно, адже $\angle P_0B_1Q = \angle Q_0PB = 45^\circ$ (за умовою). Однак у рівнобедрених трикутників висоти QQ_0 і PP_0 є одночасно медіанами, а тому: $B_1Q_0 = Q_0P_0 = P_0B$. Останнє ж означає, що точки Q_0, P_0 ділять ребро куба BB_1 на три рівні частини і, згідно з теоремою Фалеса, $B_1Q = \frac{1}{3}B_1C$, а $BP = \frac{1}{3}BA_1$.

Звичайно, встановленим фактом можна з успіхом скористатися в **побудові** точок P і Q . Проте простіше з'єднати точку K – середину відрізка BB_1 – із вершинами куба C_1 і A , а потім, у перетині відрізків C_1K й AK із діагоналями B_1C та BA_1 , зафіксувати шукані точки P і Q : $P = AK \cap A_1B$, $Q = C_1K \cap B_1C$.

Доведення правомірності такої побудови досить просте [17]. Проведемо пряму BL , паралельну прямій KC_1 . Нехай $M = BL \cap B_1C$. Тоді матимемо таке: $B_1Q = QM = MC$ і $B_1Q = \frac{1}{3}B_1C$. Якщо $QQ_0 \perp BB_1$, то $B_1Q_0 = \frac{1}{3}BB_1 = QQ_0$. Аналогічно ($PP_0 \perp BB_1$) доводимо, що $BP_0 = \frac{1}{3}BB_1 = PP_0$. Звідси випливає, що $B_1Q_0 = Q_0P_0 = P_0B = \frac{1}{3}B_1B$. Розглянемо тепер трикутник B_1QP_0 . В ньому медіана QQ_0 рівна половині гіпотенузи B_1P_0 . Отже, трикутник B_1P_0Q – прямокутний ($\angle Q = 90^\circ$, оскільки це кут, що спирається на діаметр B_1P_0 кола з центром у точці Q_0). Так само доводимо, що $PQ_0 \perp A_1B$.

Етапу **дослідження** задача не потребує, адже спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих завжди існує і, до того ж, він єдиний ([15], §2, п. 21).

Довжину ж відрізка PQ можна знайти, наприклад, із прямокутного трикутника QPC (на рис. відрізок PC не показано), в якому PQ – його катет, а $QC = \frac{2}{3}B_1C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Тут $PC^2 = PB^2 + BC^2 = \frac{11}{9}$, а $PQ = \sqrt{PC^2 - QC^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 4. У правильній трикутній призмі, всі ребра якої рівні, побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох її бічних граней. Обчислити відстань між діагоналями, якщо ребро призми дорівнює одиниці.

1-й спосіб розв'язання. Нехай у призмі $ABCKLM$ (рис. 1.61) діагоналі AL і BM належать відповідно граням $AKLB$ і $BLMC$. Скористаємося спочатку класичним прийомом дій, тобто – конструктивним означенням спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих, сформульованим у всім відомому підручнику з геометрії [10].

Отже, на самому початку віднесемо діагональ AL до площини Σ , яка паралельна іншій діагоналі BM . Для цього через точку A проведемо пряму, паралельну BM , і знайдемо у два кроки точку A_0 – слід останньої прямої на площині основи призми KLM : $AA_0 \parallel BM$; $AA_0 = BM$. Наступною дією, згідно з обраною схемою уявлюваних операцій, наприклад, із точки M діагоналі BM опустимо перпендикуляр на площину $\Sigma(ALA_0)$. Одна з найперших (основних) метричних задач, яка на проєкційному кресленні завжди вирішується не так-то просто, у випадку даної трикутної призми, бічні грані якої – квадрати, побудовно

спрощується, оскільки введена нами площина Σ перпендикулярна площині $(AKMC)$ третьої бічної грані. Справді, пряма LA_0 , що вміщує медіану LO рівностороннього трикутника KLM в основі призми, перпендикулярна до двох прямих площини $(AKMC)$, які перетинаються: KM і AK (адже призма – пряма, а LO є також висотою трикутника KLM). Більше того, площини $\Sigma(ALA_0)$ і $(AKMC)$ мають у своєму перетині пряму AO , що визначається вершиною A квадрата $AKMC$ і точкою O – серединою його сторони KM ($KO = OM$). Тому пряма KH ($H \in MC$ і $MH = HC$), що очевидно, розміщена перпендикулярно AO і якщо точка D є перетином відрізків AO і KH , то KD – відрізок перпендикуляра, опущеного з точки K на площину $\Sigma(ALA_0)$.

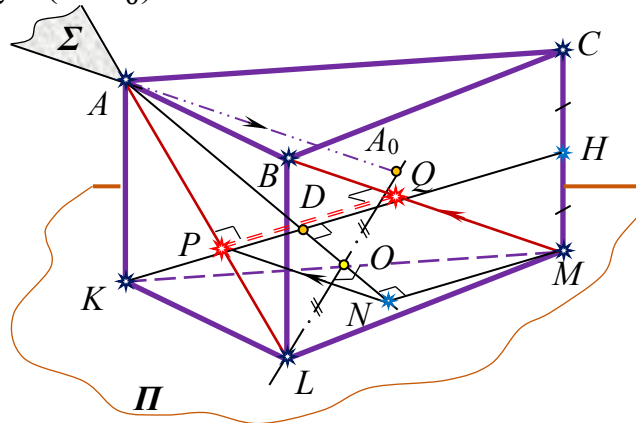


Рис. 1.61

Таким чином, залишається лише у площині квадрата $AKMC$ провести з точки M , паралельно KD , ще один перпендикуляр MN на цю ж саму площину Σ , а потім, за напрямом $M \rightarrow B$, внутрішньо зсунути його в розташування шуканого спільного перпендикуляра PQ , кінці якого займуть своє місце на заданих мимобіжних прямих AL і BM .

Оскільки $PQ = KD$ ($\triangle KDO = \triangle MNO$ і $MN = PQ$), подальші обчислення у прямокутному трикутнику AKO не потребують детальних пояснень: $AK = 1$, $KO = \frac{1}{2}$ і $AO = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Далі, $KO^2 = OD \cdot OA \Rightarrow OD = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, а $AD = AO - OD = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тому $KD = \sqrt{AD \cdot OD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Крім цього, $AD : DO = 4 : 1$ і $AO : ON = 5 : 1$, що дозволяє графоаналітичним методом суттєво спростити і пришвидшити графічні випробовування.

2-й спосіб розв'язання. Щоб наступні побудови на проєкційному кресленні (рис. 1.62) за схемою іншого із двох відомих просторових алгоритмів дій були переконливі й більш зрозумілі, доповнимо задану трикутну призму до чотирикутної, в основі якої тепер уже лежатиме ромб $KLMN$ із гострим кутом, рівним 60° . Площину Λ , перпендикулярну одній з діагоналей (напр., BM), визначимо на рисунку рівнобедреним трикутником XLC , вершиною X якого виберемо посередині відрізка AK . Основа цього трикутника LC перпендикулярна BM , оскільки вони обидві – суть діагоналі квадрата $BLMC$. Висота трикутника XU теж перпендикулярна BM , адже $XU \parallel KY_1$ і $XU = KY_1$, а KY_1 – висота рівностороннього трикутника KLM , яка (у свою чергу) перпендикулярна двом прямих грані $BLMC$, що перетинаються LM і BL . Отже, пряма XU

перпендикулярна площині грані $BLMC$, остання ж уміщує в собі діагональ BM . Інша (LA), із двох заданих діагоналей в суміжних гранях призми, внутрішнім ортогональним проєкціюванням за напрямом $B \rightarrow M$ відбивається на площину $\Lambda(XLC)$ у відрізок LF . Точку F у грані $AKND$ шукаємо як перетин двох променів AF і XF ($AF \parallel BY$, $XF \parallel LY$). Тепер уже можна побудувати повний переріз призми $ABCDKLMN$ площиною Λ . Ним буде прямокутна трапеція $XLCE$ ($\angle C = 90^\circ$), в якій точка F – середина її меншої основи XE ($XF = FE$). Останнє твердження випливає з того, що XE є середньою лінією рівнобедреного трикутника AKD .

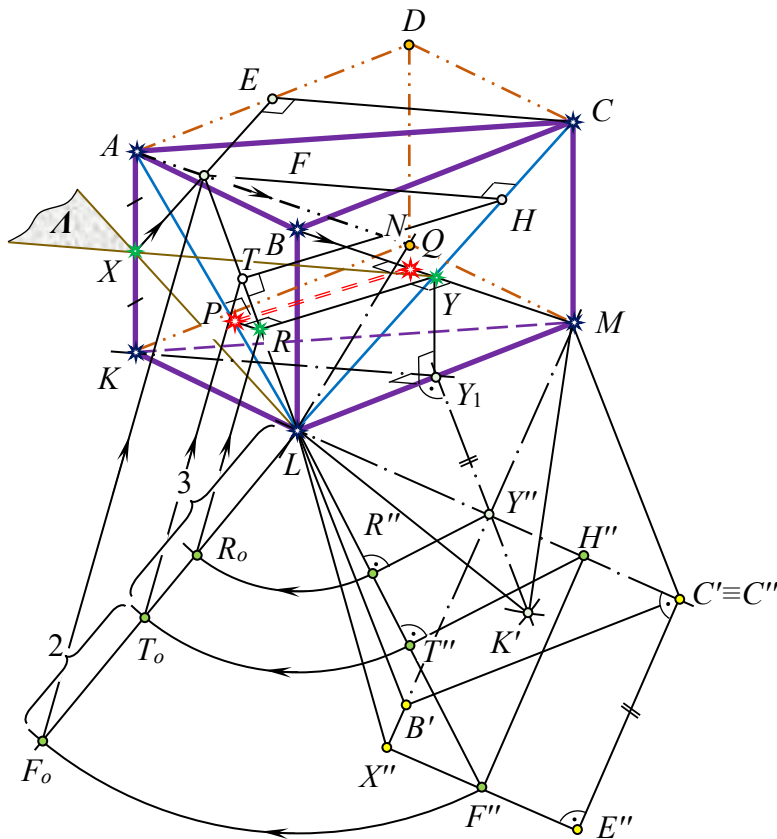


Рис. 1.61

Найпростіше опустити перпендикуляр із точки Y на відрізок LF графоаналітичним методом, адже прямокутний трикутник LHF ($\angle H = 90^\circ$, $FH \parallel XY$) уже є метрично розмірним, а саме – $LH = \frac{3}{4}LC = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $FH = XY = KY_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Звідси матимемо: $LF = \sqrt{LH^2 + FH^2} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

Оскільки HT – перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута H на гіпотенузу LF трикутника LHF , то $LH^2 = LT \cdot LF \Rightarrow LT = \frac{9}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}}$, а $TF = LF - LT = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}}$ і $LT : TF = 3 : 2$. Шуканий перпендикуляр YR буде паралельним до HT .

Оберненим проєкціюванням усередині призми за напрямом $M \rightarrow B$ легко знаходимо розв'язок задачі – спільний перпендикуляр PQ заданих мимобіжних прямих AL і BM (тут $RP \parallel MB$ і $PQ \parallel RY$).

Графічний результат досягається шляхом встановлення істинної форми трапеції $XLCE$. Для цього потрібно виконати два послідовні суміщення з

картинною площиною : 1) площин трикутника KLM і квадрата $BLMC$, де віссю руху вибираємо їх спільну пряму $LM \equiv L'M'$; 2) площини трапеції $XLCE$, обертанням останньої навколо прямої $L'C' \equiv L''C''$. Добудова трикутника $L''X''C''$ ($X''Y'' = Y_1K'$) до трапеції $L''X''E''C''$ та відшукування точок T і R на зображенні призми достатньо добре зрозумілі.

Щоб обчислити довжину відрізка YR , потрібно спочатку знайти катет TH у прямокутному трикутнику FHT : $TH = \sqrt{HF^2 - TF^2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, а потім, із подібності трикутників LYR і LHT , записати пропорцію $\frac{LY}{LH} = \frac{YR}{HT}$, з якої прямо випливає, що $YR = \frac{LY \cdot HT}{LH} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Отже, задачу розв'язано повністю.

Порівнюючи щойно відтворені на картинній площині два відомі правила-орієнтири дій в одержанні графічного результату – відрізка PQ як спільного перпендикуляра заданих мимобіжних прямих, помічаємо, що на цей раз перший з підходів виявився простішим, як у плані гіпотетичних пошуків виконавця в осмисленні просторової ситуації (етап **аналізу** задачі на побудову), так і в його наступній конструктивній реалізації на правильному й наочному рисунку в паралельних проєкціях.

3-й спосіб розв'язання. Уважно аналізуючи рисунок 1.61, помічаємо, що пряма KH перпендикулярно розташована у просторі до кожної із заданих діагоналей AL і BM (проєкціюйте останні відрізки на грань $AKMC$ і скористайтеся теоремою про три перпендикуляри). Як за таких обставин, виключно методом *внутрішнього косокутного проєкціювання* на площину основи призми, рисунково оригінально, просто, лише в кілька кроків відобразити на картинній площині результат розв'язання задачі? Виконайте самостійно проєкційне креслення призми і спробуйте побудувати шуканий перпендикуляр PQ (підказ: проведіть через точку H нормальний переріз призми, а далі порівняйте із задачею 3 – третій спосіб розв'язання).

Задача 5. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC , довжина гіпотенузи якого $AB = 4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC піраміди перпендикулярне площині основи і дорівнює 2. Знайдіть градусну міру кута і відстань між прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC , а друга – через точку C і середину ребра AB .

Очевидно, що висновок задачі неважко відразу ж переформулювати з наголосом на конструктивне її розв'язання². Однак у такій ситуації робити це не обов'язково, оскільки так чи інакше без дії вдалого *внутрішнього проєкціювання* уявити визначальні залежності між заданими і шуканими геометричними фігурами надто важко.

Отже, нехай SM і CN – задана пара мимобіжних прямих (рис. 1.63). Відстань між ними визначається, як відомо, перпендикуляром, опущеним із будь-якої точки прямої CN на площину Σ , яка паралельна CN і містить SM . Площину Σ доцільно

² «Побудуйте спільний перпендикуляр прямих, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC , а друга – через точку C і середину ребра AB . Знайдіть градусну міру кута і відстань між указаними мимобіжними прямими».

задати перетином прямих SM і MK , де $MK \parallel CN$, адже цим перетином визначається ще й шуканий кут між мимобіжними прямими SM і CN . У ролі площини проєкцій *внутрішнього ортогонального проєціювання* за напрямом $N \rightarrow C$ зумисне виберемо (творчий момент) площину Λ , яка проходить через бічне ребро піраміди SC паралельно ребру її основи AB . Тоді точка C буде слід-проєкцією прямої NC , пряма ж SM_0 – слід-проєкцією площини Σ (SMK), а шуканий спільний перпендикуляр PQ заданих прямих проєціюється на вибрану площину проєкцій Λ у натуральну величину – як висота CP_0 прямокутного трикутника SCM_0 , проведена з вершини прямого кута C на гіпотенузу SM_0 . У цьому трикутнику $SC = 2$, а $CM_0 = \sqrt{2}$ ($CM_0 = NK$, бо CM_0KN – прямокутник). Тому $SM_0 = \sqrt{6}$, $CP_0 = PQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. У свою чергу помічаємо, що трикутник SM_0M теж прямокутний ($\angle M_0 = 90^\circ$). У нього $M_0M = \frac{1}{2}CN = \sqrt{2}$. Отже, матимемо: $\text{tg } \angle M_0MS = \sqrt{3}$ і $\angle M_0MS = 60^\circ$.

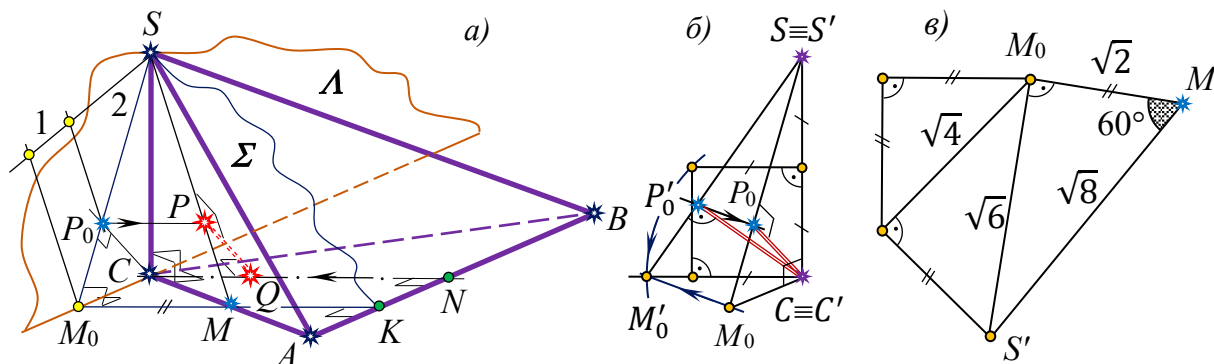


Рис. 1.63

Задачу на обчислення розв'язано. Проте на вже пройденому нами шляху виконано «левоу частину» побудовних операцій, щоб швидко і якісно завершити її розв'язання конструктивно. Зокрема, точка P_0 на відрізку SM_0 однозначно визначається відношенням: $\frac{SC^2}{CM_0^2} \frac{SP_0}{P_0M_0} = \frac{2}{1}$, що легко обґрунтовується. Завершення *графоаналітичного* дійства для точки P_0 очевидне.

Якщо ж точка P_0 побудована, то зображення відрізка PQ встановлюється оберненим проєціюванням за напрямом $C \rightarrow N$, де $PQ \parallel P_0C$ і $PQ = P_0C$.

Цього ж результату (за відомою вже схемою) можна також досягти суто *графічно* – суміщенням із площиною зображень прямокутного трикутника SCM_0 , обравши в якості осі обертання ребро піраміди $SC \equiv S'C'$ (див. рис. 1.63, б) й узявши до уваги, що $S'C' = 2$, $C'M'_0 = \sqrt{2}$, $C'P'_0 \perp S'M'_0$.

Далі, подібний оригіналу трикутник $S'M_0M$ найкраще відтворити поруч із основним рисунком на так званому «винесеному кресленні» шляхом обертання навколо осі M_0M і суміщення із площиною дошки (зошита) його зображення – трикутника SM_0M . У трикутнику $S'M_0M$ (рис. 1.63, в) $\angle M_0 = 90^\circ$, катети M_0M і $S'M_0$ дорівнюють відповідно $\sqrt{2}$ і $\sqrt{6}$, а $\angle M = 60^\circ$. Шуканий результат при належному викреслюванні можна навіть заміряти транспортиром та порівняти з попередніми аналітичними (числовими) обрахунками. Думається, що їх злиття безсумнівно принесе певне моральне задоволення тому хто розв'язує задачу.

Задача 6. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого дорівнює 1. Точки P і M – середини ребер $A_1 B_1$ і $B B_1$ відповідно, а точка O – центр грані $B B_1 C_1 C$. Через точку O провести пряму, яка перетинає пряму $A_1 M$ у точці H і пряму $C_1 P$ – у точці K . Обчислити довжину відрізка HK .

Зауважимо, що незвична метрична задача на обчислення вміщує в собі обов'язкову для розв'язання на проєкційному кресленні комплексну позиційну задачу на побудову.

На самому початку (рис. 1.64) уявлених пошуків потрібно подбати про повну загальність способу проведення через точку O прямої, яка перетинала б дві задані мимобіжні прямі $A_1 M$ і $C_1 P$. Це рекомендується зробити, наприклад, так: 1) визначимося спочатку із площиною Σ , що задається прямою $A_1 M$ і точкою O , яка не належить прямій; 2) побудуємо точку K перетину іншої прямої $C_1 P$ із площиною Σ ; 3) у площині Σ проведемо пряму OK ; 4) знайдемо точку перетину H прямих OK і $A_1 M$.

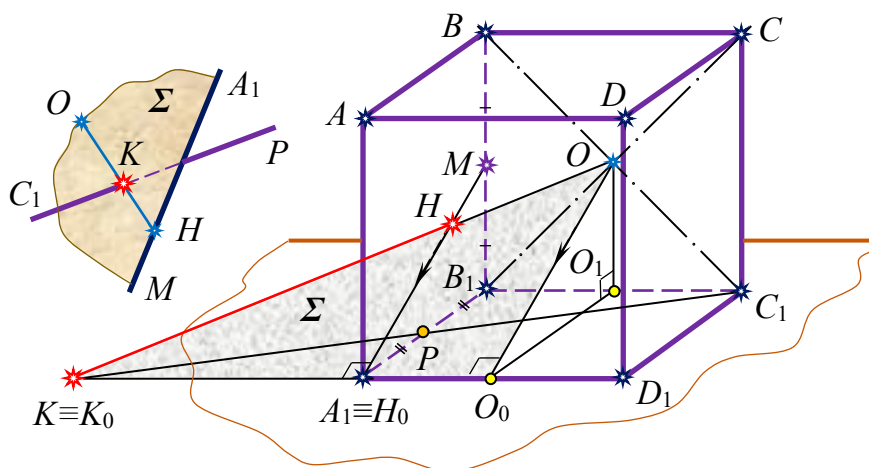


Рис. 1.64

Якраз цей алгоритм зручно відтворити на картинній площині шляхом внутрішнього косокутного проєкціювання обраних геометричних об'єктів на площину основи куба ($A_1 B_1 C_1 D_1$) за напрямом $M \rightarrow A_1$. Очевидно, що тут відрізок MA_1 вироджується в точку A_1 , а площина $\Sigma(O, MA_1)$ – у пряму $A_1 D_1$. Пряма ж $C_1 P$, як така, що належить площині проєкцій, проєкціюється сама в себе. Оскільки слід-проєкція $A_1 D_1$ проєкціювальної площини Σ має збиральну властивість (будь-яка точка, пряма чи плоска фігура, що належить площині, має свою проєкцію на її слід-проєкції), то точку K , спільну для прямої $C_1 P$ і площини Σ , знаходимо в перетині прямих $A_1 D_1$ і $C_1 P$. Пряма OK у перетині з $A_1 M$ висікає іншу із двох шуканих точок – H . Таким чином, **побудовний** етап задачі завершено повністю.

На етапі **обчислень** звертаємо увагу на те, що відрізок KH є гіпотенузою прямокутного трикутника KHA_1 ($\angle A_1 = 90^\circ$), подібного іншому прямокутному трикутнику KOO_0 . Тому $\frac{KH}{KO} = \frac{KA_1}{KO_0}$ і $KH = \frac{KO \cdot KA_1}{KO_0}$. Щоб визначитися з відрізками KO , KA_1 і KO_0 , потрібно розглянути ще два прямокутні трикутники. У трикутнику OO_1O_0 $\angle O_1 = 90^\circ$, $OO_1 = 0,5$, $O_1O_0 = 1$ і $OO_0^2 = \frac{5}{4}$, а у трикутнику KC_1D_1 $A_1P = \frac{1}{2} A_1 B_1$. Але ж, $A_1 B_1 = C_1 D_1$ і $A_1 B_1 \parallel C_1 D_1$, тому $A_1 P$ – середня лінія цього

трикутника і $KA_1 = A_1D_1 = 1$, а $KO_0 = 1,5$. Отже, $KO = \sqrt{KO_0^2 + OO_0^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Нарешті, $KH = \frac{\sqrt{14}}{3}$, що й є числовим результатом задачі.

Задача 7. Довести, що будь-яка площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер трикутної піраміди, ділить її на дві рівновеликі частини.

Нехай $SABC$ – задана трикутна піраміда (рис. 1.65), а точки P і Q – середини мимобіжних ребер SC і AB відповідно. Очевидно, що пряма PQ є віссю пучка площин $\Sigma(PQM)$ (M – третя біжуча точка січної площини, яка ковзає по ребру SA), кожна з яких ділить піраміду на два багатогранники.

Серед останніх варто окремо виділити площину трикутника SQC ($M \equiv S$), результатом розбиття якою вихідної фігури є дві складові трикутні піраміди $SAQC$ і $SBQC$ із спільними площиною основи (ABC) та вершиною S , а отже, – спільною висотою. Оскільки $AQ = QB$ і висота у трикутників AQC і BQC , проведена з вершини C на протилежну сторону ($AQ \subset AB$, $QB \subset AB$), одна і та ж, то $S_{AQC} = S_{BQC}$. Тому $V_{SAQC} = V_{SBQC}$ (*). Якщо ж $M \equiv A$, то в перерізі даного багатогранника січною площиною (APQ) одержимо трикутник APB , а трикутні піраміди $SABC$ і $PABC$ матимуть спільну основу – трикутник ABC . Тому маємо $h_{PABC} = \frac{1}{2}h_{SABC}$, оскільки $SP = PC$. Отже, $V_{PABC} = \frac{1}{2}V_{SABC}$, а це означає що й інша із двох площин частинного розташування (APQ) теж розбиває задану піраміду на дві рівновеликі складові частини.

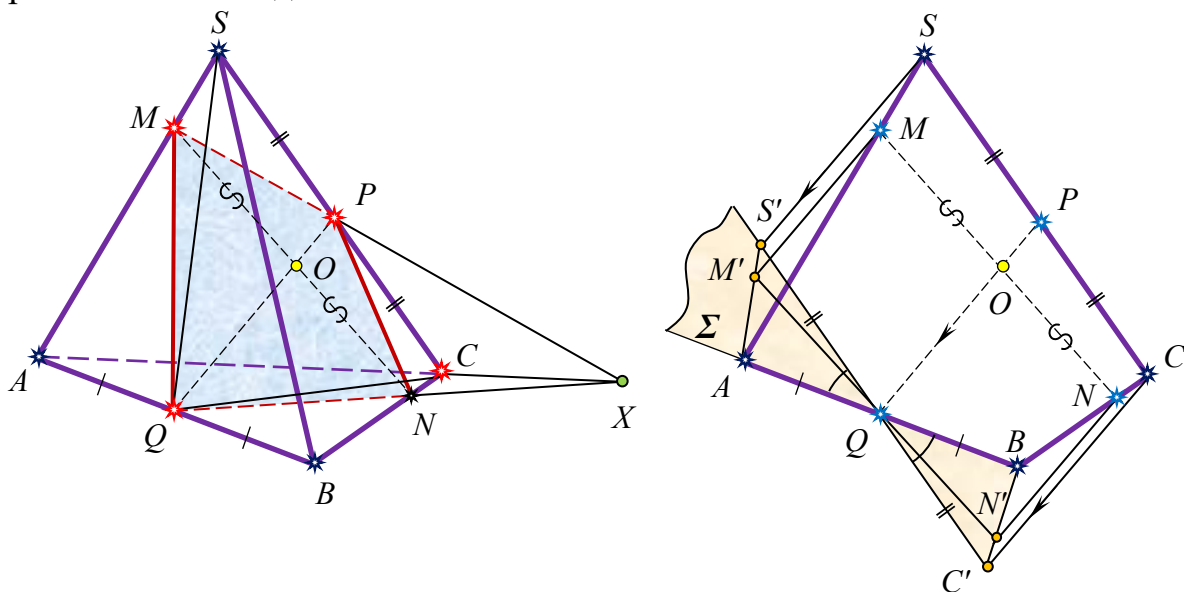


Рис. 1.65

У продовження доведення розглянемо загальний випадок. Нехай тепер M – будь-яка точка ребра SA , відмінна від його кінців, а площина перерізу піраміди Σ визначається біжучим трикутником MPQ ³. У такому розбитті піраміди $SABC$ матимемо два нестандартні багатогранники $SBMPNQ$ і $ACMPNQ$ зі спільною основою. Навіч маємо: $V_{SBMPNQ} = V_{SBQC} + V_{SMQP} - V_{CNQP}$; $V_{ACMPNQ} = V_{SAQC} + V_{CNQP} - V_{SMQP}$ (**). Якби рівновеликість пірамід $SMQP$ і $CNQP$ була доведена,

³ Побудова чотирикутника перерізу $MPNQ$ методом слідів очевидна з рисунка.

то, з урахуванням рівностей (*) і (**), задачу було б розв'язано. Оскільки відрізок похилої (SC) до площини перерізу ($MPNQ$) точкою P ділиться навпіл, відстані до цієї площини від точок S і C рівні, отже розглядувані піраміди мають рівні висоти. Щоб довести рівновеликість їх основ – трикутників MPQ і NPQ , досить довести, що відрізки MO і NO рівні. Справді, в цьому випадку $S_{MOP} = S_{NOP}$ і $S_{MOQ} = S_{NOQ}$, що безсумнівно, а $S_{MPQ} = S_{MOP} + S_{MOQ}$ і $S_{NPQ} = S_{NOP} + S_{NOQ}$.

Той факт, що $MO = NO$ доведемо методом *внутрішнього косокутного проєкціювання* ребра SC за напрямом PQ на площину ($S'C'AB$), яка містить ребро AB і паралельна SC (див. виносне креслення). Тут $S'C' = SC$ і $S'C' \parallel SC$, точка M' – проєкція точки M – належить $S'A$, точка N' – проєкція точки N – належить $C'B$, а $M'N'$ обов'язково містить точку Q . Із рівності трикутників AQS' і BQC' ($S'Q = OC'$, $AQ = QB$, $\angle AQS' = \angle BQC'$) випливає, що $\angle S'AQ = \angle C'BQ$; у свою чергу, з рівності трикутників AQM' і BQN' ($\angle A = \angle B$, $\angle M'QA = \angle N'QB$, $AQ = BQ$), матимемо: $M'Q = N'Q$. Але ж поділ відрізка в заданому відношенні є інваріантом паралельних проєкцій, тому $MO = NO$, що і потрібно було довести. Отже, $S_{MPQ} = S_{NPQ}$ і $V_{SMQP} = V_{SNQP}$, а це, врешті-решт, й доводить рівновеликість багатогранників $SBMPNQ$ і $ACMPNQ$.

А зараз, у контексті щойно доведеного геометричного факту методом **внутрішнього проєкціювання**, наведемо приклад його прямого застосування до розв'язання вже знайомої нам цікавої задачі на обчислення.

Задача 8. Піраміда $SABC$ об'ємом 5 дм^3 перетнута площиною $\Sigma(KLM)$. Знайти площу фігури перерізу, якщо точка K належить ребру AS і $AK = 0,5AS$, точка L – ребру AC і $AL = 0,4AC$, точка M – ребру BC і $BM = 0,5BC$, а відстань від вершини A до площини перерізу дорівнює 1 дм .

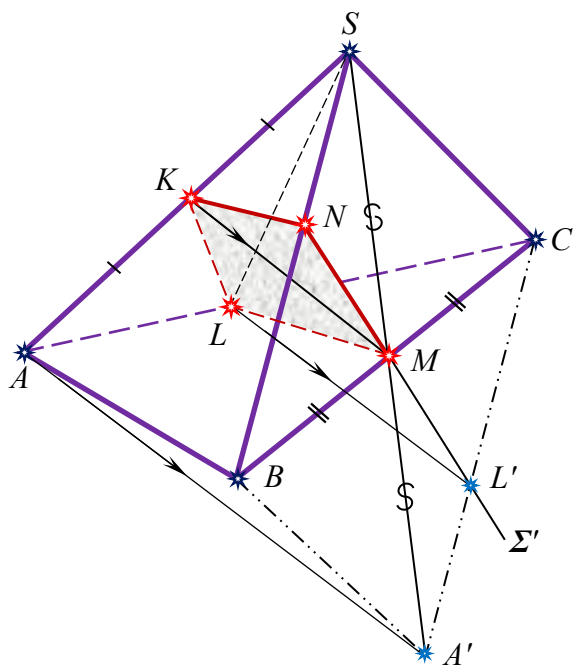


Рис. 1.66

Щоб оптимально змодельовати на проєкційному кресленні фігуру перерізу піраміди $SABC$ (рис. 1.66) площиною $\Sigma(K, L, M)$, зручно скористатися методом *внутрішнього проєкціювання* за напрямом $K \rightarrow M$ на площину її правої грані SBC . Тут, що вже було обґрунтовано, піраміда зображується паралелограмом $SBA'C$, а площина перерізу – своєю виродженою проєкцією ML' , яка відразу ж у перетині з ребром SB визначає четверту вершину N чотирикутника перерізу.

Для проведення *обчислювального* етапу, згідно з висновком попередньої задачі, $V_{SCKLMN} = V_{ABKLMN} = \frac{1}{2} V_{SABC} = 2,5 \text{ (дм}^3\text{)}$. Далі, з'єднаємо пари точок

S і M , S і L відрізками прямих, чим розіб'ємо багатогранник $SCKLMN$ на дві піраміди $SKLMN$ і $SLMC$. Оскільки піраміди $SLMC$ і $SABC$ мають спільні вершину

S та площину основ (ABC), то в них і висота спільна. Крім цього, $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{6} CA \cdot CB \cdot \sin \angle C \cdot H = 5$ (дм³) (згідно до умови задачі). У свою чергу, маємо $V_{SLMC} = \frac{1}{3} S_{LMC} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot 0,6AC \cdot 0,5CB \cdot \sin \angle C \cdot H$, тому врешті-решт знайдемо: $V_{SLMC} : V_{SABC} = 0,3$ і $V_{SLMC} = 1,5$ (дм³). Але $V_{SKLMN} = 2,5$ (дм³), отже $V_{SKLMN} = 1$ (дм³). Якщо врахувати, що відстань від точки S (як і від точки A – за умовою) до площини перерізу рівна 1 дм, то скориставшись формулою об'єму піраміди $SKLMN$ легко отримаємо: $S_{KLMN} = 3$ (дм²). Задачу розв'язано.

Задача 9. Знайти об'єм тетраедра, кожна грань якого – трикутник зі сторонами a, b і c , де a, b, c – різні додатні числа.

Доведемо спочатку, що об'єм усякого тетраедра (рис. 1.67) дорівнює $\frac{1}{3}$ (третині) площі S його ортогональної проєкції на площину, паралельну будь-якій парі мимобіжних ребер, помноженій на відстань d між цими ребрами, за умови, що проєкція, про яку йдеться, є чотирикутником.

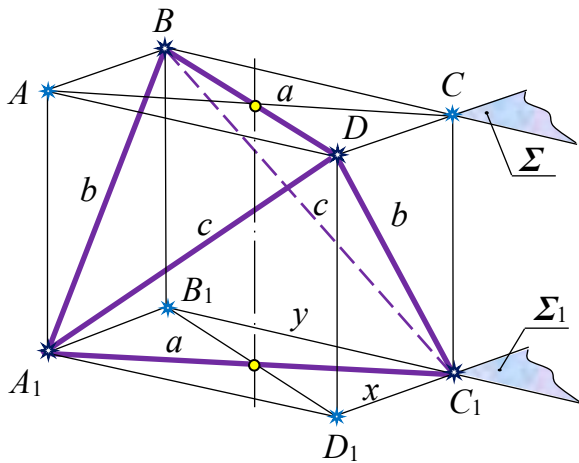


Рис. 1.67

Для визначеності у просторі уявимо собі, що ребра BD і A_1C_1 (див. рис.) – горизонтальні. Проведемо через кожне з ребер пару горизонтальних площин ($\Sigma \parallel \Sigma_1$), а через усі вершини тетраедра – вертикальні проєкціювальні промені. Одержимо пряму чотирикутну призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ із площею основи S й висотою d . Отже, об'єм призми рівний $S \cdot d$. Щоб виділити із призми заданий умовою тетраедр BDA_1C_1 , потрібно лише в уявленнях відігнути від неї

чотири рівновеликі піраміди: A_1ABD , C_1CDB , $BA_1B_1C_1$, $DA_1D_1C_1$ (тут, напр., $V_{A_1ABD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S \cdot d$). У сумі об'єм перерахованих пірамід рівний $\frac{2}{3} \cdot S \cdot d$. Таким чином, $V_{BDA_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot d$. (*)

Із умови задачі та рисунка до неї вочевидь впливає, що кожне з ребер однієї пари мимобіжних сторін тетраедра має довжину a , іншої – довжину b , а ще іншої – довжину c . Його **внутрішньою** проєкцією на площину основи призми (Σ чи Σ_1), яка паралельна двом ребрам, рівним a (BD і A_1C_1), є прямокутник (паралелограм із рівними діагоналями), суміжні сторони якого позначимо через x і y . Відрізки x, y та висоту призми $d = \rho(BD, A_1C_1)$ виразимо через a, b і c

шляхом розв'язання системи рівнянь:
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + d^2 = b^2, \\ y^2 + d^2 = c^2 \end{array} \right\}$$
 Нарешті, підстановкою

знайдених x, y і d у рівність (*) (за умови, що $S = x \cdot y$), одержимо результат: $V_{BDA_1C_1} = \frac{1}{12} \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$.

Задачу розв'язано повністю.

Задача 10. На картинній площині дано (накреслено) трійку паралельних⁴ прямих a, b і c та трійку неколінеарних точок K, L і M , які не належать цим прямим. Побудуйте трикутник ABC відповідно з вершинами на прямим a, b і c так, щоб кожна із прямих, визначених сторонами трикутника, проходила через одну з точок K, L, M .

Маємо випадок **нетипової** планіметричної задачі на побудову, адже, як для шкільної навчальної практики, її графічне розв'язання достатньо просто здійснюється винятковим прийомом.

Отже (рис. 1.68), задано трійку паралельних прямих a, b і c та трійку неколінеарних точок K, L і M , що **не** належать цим прямим. Нехай трикутник ABC задовольняє умову задачі, тобто точка A належить прямій a , точка B належить прямій b , а точка C належить прямій c і, до того ж, пряма AB містить точку K , пряма BC містить точку L , а пряма AC містить точку M .

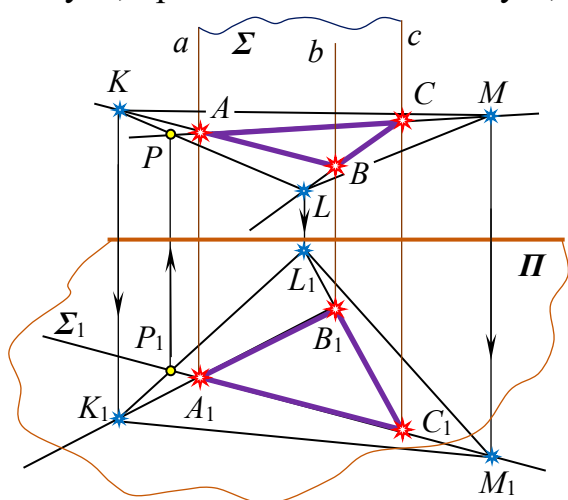


Рис. 1.68

Зовсім неважко собі **уявити** тривимірний простір, де трикутник $A'B'C'$ є фігурою перерізу трикутної призми, з бічними ребрами a', b' і c' , площиною Λ' , яка задана точками K', L' і M' . Оскільки призма і січна площина строго визначені на зображенні, а проекцією призми за напрямом бічних ребер може бути будь-який її переріз (їх безліч), то форма і розміри шуканого трикутника ABC аж ніяк не залежать від вибору площини основи призми Π , яка тут задається довільним трикутником $A_1B_1C_1$. За цих умов, точки K_1, L_1 і M_1 , як основи точок K, L і M на шпичках *внутрішнього проєкціювання*, належатимуть прямим A_1B_1, B_1C_1 і A_1C_1 відповідно, де $K_1L_1M_1$ – основа трикутника KLM . Цим, власне, завершується **аналіз** задачі на побудову.

Сама ж **побудова** може бути зведена, наприклад, до відшукування прямої перетину площини Σ грані призми (ac) із площиною $\Lambda(KLM(K_1L_1M_1))$. Але Σ – проєкціувальна площина, а Σ_1 є її слід проєкцією, тому $A_1B_1 \equiv \Sigma_1$ – основа шуканої прямої, а остання обов'язково належить площині перерізу Λ . Пряма ж належить площині, якщо дві її точки лежать у цій площині. Нехай ними будуть точки $P(P_1)$ і $M(M_1)$. Пряма PM у перетині з ребрами a і c висіче відповідно дві вершини A, C шуканого трикутника. Третю вершину B одержимо в перетині прямої CL із ребром b .

Чітким і строгим **доведенням** правильності зроблених умовиводів і побудов на моделі може слугувати факт проходження прямої BA через точку K . Очевидно, що задача має єдиний розв'язок.

Не є секретом, що у вирішенні багатьох питань стереометрії прийнято просторові взаємні залежності між даними геометричними фігурами та їх елементами зумисне зводити до площинних. Проте щойно продемонстровано

⁴ Це може бути також трійка різних прямих площини, які перетинаються в одній точці.

обернене – ми свідомо вдалися до *образного відбиття* (реконструкції) *плоскої конфігурації в просторі*, з наступним використанням *методу внутрішнього проєкціювання за напрямом бічних ребер*. Особливістю цієї дії є винятково **уявний** перехід від площини до простору. Безумовно, що такі здібності до абстрагування і узагальнення притаманні лише учню, який має добру інтуїцію і творчо-аналітичний характер мислення, *володіє належними навичками уявлення геометричних образів за їх проєкціями* і вільно оперує закономірностями евклідової геометрії. Досягти ж відмінного рівня геометричного розвитку можна лише шляхом *настирного розв'язування позиційних і метричних задач конструктивними методами*.

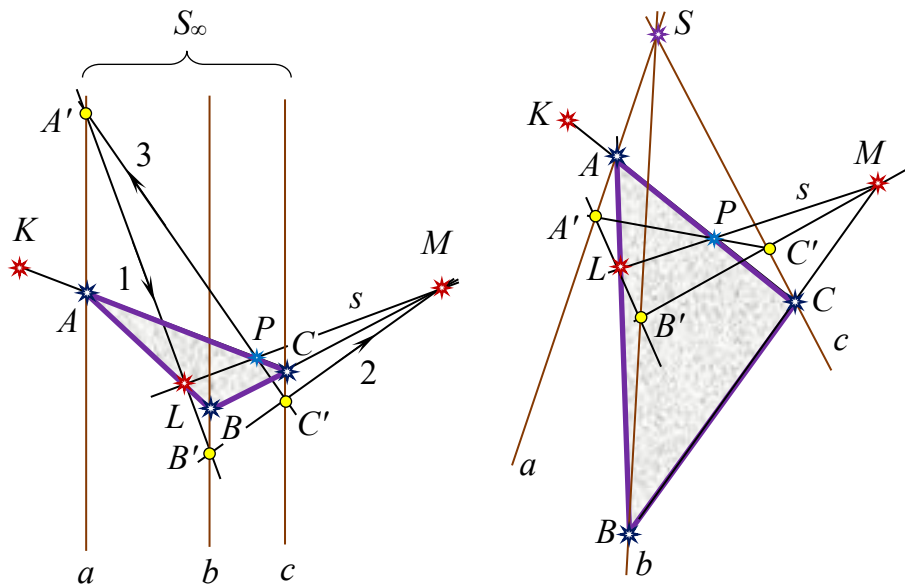


Рис. 1.69

Студенту-математику, поряд із цим, небезінтересно буде знати простий і, водночас, зримо привабливий, «геометрично красивий» шлях розв'язання цієї ж задачі методом проєктивної геометрії, з прямим використанням славнозвісної теореми Дезарга на площині, *яка доводиться, як відомо, з обов'язковим посиланням на вже попередньо доведена однойменну теорему простору*. Тут (рис. 1.69) дві із трьох точок K, L і M з умови (нехай, для визначеності, це будуть точки L і M) задають дезаргову пряму (s), а будь-який трикутник $A'B'C'$, відповідно з вершинами на прямих a, b і c , вибираємо так, щоб його сторона (чи пряма) $A'B'$ містила, наприклад, точку L (цей перший і єдиний крок на рисунковій моделі реалізовується довільно – за вибором виконавця побудов), а сторона (чи пряма) $B'C'$ – точку M . Третю точку P дезаргової прямої шукаємо в перетині прямих $A'C'$ і LM . Пряма KP зливається із прямою AC , яка визначає дві із трьох вершин шуканого трикутника: $A = KP \cap a$ і $C = KP \cap c$. Ще одна (остання) вершина (B) буде інциденцією трьох прямих одночасно: AL, CM і b . Задачу на побудову розв'язано.

Завершуючи, додамо таке. Подані в пункті приклади різних за змістом стереометричних задач, зорієнтованих на метрику ЗЗСО, у вигляді конструктивного та обчислювального розв'язання кожної з них яскраво засвідчують пріоритетне місце побудовних дій вчителя і учня в навчанні геометрії. Очевидно, що саме візуальна модель задачі дозволяє значно глибше, всеосяжно

осмислити геометричну суть взаємних залежностей між заданими і шуканими елементами будь-яких просторових конструкцій. Цим помітно послаблюється формальна і посилюється уявлювана та конструктивно-дійова складові у сприйнятті, розумінні й трактуванні визначених умовно геометричних реалій, чим зміцнюється інтерес до предмету «Геометрія» і, як наслідок, оволодіння учнями фактичним матеріалом дисципліни відбувається на якісно вищому понятійному рівні.

Удаючись до розв'язування якомога більшого числа задач підвищеної складності, зокрема, з допомогою відпрацьованого простого й ефективного *методу внутрішнього проєкціювання*, суб'єкти освітнього процесу не лише навчаються по справжньому мислити просторовими образами, якісно моделювати, грамотно *аналізувати* рисунок і через аналіз виділяти обумовлені беззаперечними геометричними закономірностями та логічними умовиводами взаємні залежності, грамотно шукати і знаходити шлях до результату через сувору і чітку алгоритмізацію, а й одержують морально-психологічне задоволення від процесу і результатів умовних конструктивних перетворень, щоразу зримо споглядають у власноруч створених графічних реалізаціях, карбують в уявленнях і пам'яті природну гармонію та, навіть, красу об'єктів і фактів ще далеко не пізнаної ними геометрії. З цього приводу академік Бурда М. І. наголошує: *«Зауважимо також, що у процесі розв'язування задач на побудову послідовно й систематично на якісно новому рівні формуються в учнів культура розумової праці, а також важливі загальні трудові вміння: планувати свою роботу, раціонально її виконувати, критично зіставляти початковий план роботи з реальним процесом її виконання»* [2, с. 110].

Правило-орієнтир *методу внутрішнього проєкціювання*. Моделювання позиційних і метричних задач стереометрії з активним використанням проєкційних креслень часто ускладнюється тим, що елементи заданих геометричних об'єктів (оригіналів) займають загальне розташування відносно площини зображень – дошки (зошита), а отже проєкціюються на цю площину в спотвореному вигляді. Тому, з метою пошуку раціонального, більш ефективного шляху розв'язання сформульованої пропозиції, доцільно застосувати таке перетворення всередині стереометричної конфігурації, яке переводить прямі (відрізки) або площини (плоскі фігури) оригіналу, що нас цікавлять, із загального розташування в частинне – в прямі і площини або проєкціювальні (напр., задачі 3, 5, 6, 8), або рівня (напр., задачі 7, 9). Осмислене введення на проєкційному кресленні нових площин проєкцій і вдалий вибір напрямів *внутрішнього проєкціювання*, свідоме переведення прямих і площин загального розташування в частинне розташування, припускає їх накреслення за допомогою нескладних графічних чи графоаналітичних побудов і значно спрощує пошук способів розв'язань задач у новому рисунковому вираженні. Визначальними в таких ситуаціях є збиральна властивість слід-проєкцій проєкціювальних прямих і площин, а також факт проєкціювання на відповідну площину проєкцій відрізків і плоских фігур **рівня** без спотворення їх форми (центральні проєкції) і навіть розмірів (паралельні проєкції). В якості нових площин проєкцій вибирають переважно грані багатогранника, осьові чи інші доречні перерізи тіл

стереометрії. Інколи це можуть бути також площини, перпендикулярні або паралельні певним стрижневим елементам заданого тривимірного тіла, але відмінні від його граней чи перерізів. При цьому важливо пам'ятати, що **розв'язання задачі спрощується на максимально наочному проєкційному кресленні**, оскільки останнє сприяє як уявленню взаємних розташувань фігур у просторі, так і тих операцій, які слід здійснити, щоб одержати розв'язок. Вправи проєкціювання і перетворення фігур надто важливі в розвитку просторових уявлень учнів.

Зображаючи одну і ту ж фігуру в різних ракурсах на дошці чи в зошиті, кожен хто вчиться виробляє в собі міцні просторові уявлення геометричних тіл. Разом із тим виконання побудови фігури в її новому розташуванні чи після перетворення змушує посилено працювати просторову уяву учня, яка одночасно корегується законами зображення на проєкційному кресленні.

Зрозуміло, що цілеспрямовані тренування в розв'язуванні конструктивних задач різними методами, досконале володіння всіма методами в розмаїтті геометричних задач, спричиняє в кожному окремому варіанті дій вибір оптимального шляху до мети, поставленої висновком задачі. Й це можливо за умов, коли виконавець ґрунтовно знає теоретичні положення і окремі факти найпершої з наук, вміє до діла їх застосувати, відмінно володіє просторовими уявленнями, уявою і законами логічного мислення, має неабияку практику. Такі якості, як усім відомо, характеризують учнів, які істинно шанують геометрію, захоплюються нею.

І навпаки, системне, діяльнісне вирішення суб'єктом навчання різними методами низки різнохарактерних і різного рівня складності пропозицій, коли закономірними побудовами безпосередньо на зображенні з'являється очікуваний результат, надає можливість творчо оцінити собівартість одержаних теоретичних знань і практичних навичок із геометрії, прищепити потяг (звичку) до реалізацій задач винятково в конструктивному стилі, що торує їм стежки до реалій науки і техніки, знайомства із прикладними математичними напрямками, готує до адекватного сприйняття можливих дослідницьких чи виробничих ситуацій у дорослому суспільно-корисному житті та, окрім цього, якісно поліпшує, розвиває вже сформовані просторові уявлення й уяву і, на такій основі, – наочно-образне й логічне мислення.

У контексті сформульованих висновків вельми доречно зауважити, що дана методологічна концепція постановки та рисункового розв'язання метричних задач на проєкційних кресленнях не потребує яких-небудь спеціальних знань із інших геометричних дисциплін, адже у виконанні операцій користуються лише фактами курсу евклідової геометрії, яка вивчається в ЗЗСО. Поряд із цим, візуалізація та унаочнення покрокових дій сприяє ефективному знайомству з побудовними методами, коли шукана фігура з'являється на кресленні зримо, вочевидь, що слід вважати надзвичайно цінним моментом у пізнанні практичних аспектів геометрії.

§2. Метод внутрішнього ортогонального проєкціювання на дві площини проєкцій

Небезпідставно в теорії і практиці бінарних зображень просторових об'єктів особливим частинним випадком паралельного проєкціювання вважають **ортогональне проєкціювання** ($a \perp \Pi$, див. ч. II, р. I, рис. 2.1 – 2.3): на одну площину проєкцій, що притаманно одно-картинним аксонометричним проєкційним кресленням, зокрема, в евклідовій стереометрії, а також – на дві і більше площин проєкцій, приміром, за методом Г. Монжа. В останній інтерпретації метод слугує, як уже наголошувалося, нарисній геометрії і технічному кресленню (див., напр., [10], §3, п. 22), що методологічно потужно і життєво важливо у вирішенні різнопланових задач науково-технічного характеру в проектно-конструкторських задумах та їх виробничих вираженнях комплексними кресленнями. Проте у студентів (учнів) не може бути сумнівів, що в умовах педагогічного процесу, коли вирішується метрична пропозиція в тій чи іншій просторовій конфігурації на проєкційному кресленні, досить часто варто користуватися внутрішнім ортогональним проєкціюванням хоча б на **одну** площину проєкцій. Згадайте принагідно формулювання та схему доведення теореми про три перпендикуляри або конструктивне означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих, яке у вигляді чітких і зрозумілих кроків побудовних дій безпосередньо впливає з теореми про ортогональне проєкціювання прямого кута, або, скажімо, так ефектно розв'язані в параграфі 1 досить цікаві метричні задачі. Традиційно і не без задуму, природно тіла обертання шкільного курсу стереометрії на площині дошки (зошита) теж зображають лише за правилами **зовнішнього ортогонального** проєкціювання, однак, із зрозумілих причин, про це «вголос» намагаються не говорити – відразу ж виникає чимало змістовних, цікавих запитань.

Ортогональне подвійне проєкціювання, як специфічний метод зображення і перетворення фігур в аксонометричних проєкціях, а отже, однойменний метод розв'язування задач метричної стереометрії, в школі не афішується. Шкода, але не набув він належного визнання і в програмах педагогічних університетів. Безпричинне, неусвідомлене нехтування цим побудовним прийомом помітно збіднює не лише структурну і змістовну складові розділу «Метрика», а й конструктивну геометрію в цілому.

Основною теоремою метрики стереометрії фахівцями визнано теорему про проєкціювання прямого кута ([10], ч. I, р. I, §3): «Для того, щоб прямий кут проєкціювався ортогонально без спотворення, необхідно і достатньо, щоб щонайменше одна його сторона була паралельна площині проєкцій, а інша – не перпендикулярна до цієї площини». Однак на практиці, по суті справи, з метою побудови перпендикулярних прямих і площин в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій (горизонтальна Π_1 і фронтальна Π_2), неминуче випадає користуватися дещо іншою теоремою, яка також є прямим (третім і останнім) **наслідком** попередньої. Вона має таке звучання: «Для того, щоб дані пряма і площина загального розташування були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб в ортогональному проєкціюванні на площини Π_1 і Π_2 горизонтальна проєкція прямої була перпендикулярна до горизонтальної проєкції горизонталі площини, а фронтальна проєкція прямої – до фронтальної проєкції фронталі цієї ж площини» (рис. 1.70). Зауважимо, метрика **нарисної геометрії**

реально немислима без цього фундаментального факту.

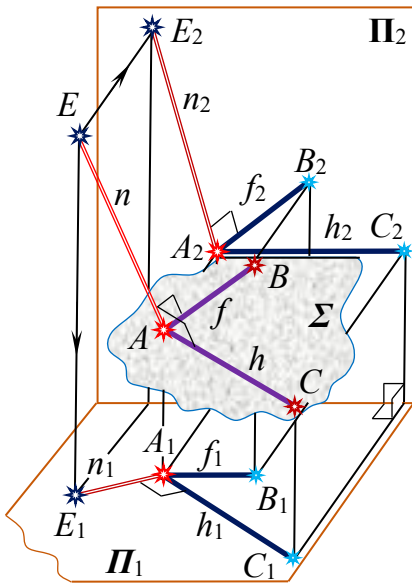


Рис. 1.70

Озвучене щойно надто серйозне твердження конструктивної стереометрії, котре фахівці ще називають **теоремою-наслідком**, з циркулем і лінійкою в руках (в якості наочних посібників) обґрунтовується переконливо і напрочуд просто, якщо залучити ознаку перпендикулярності прямої і площини та, звичайно ж, базову теорему – основну теорему метрики. Справді, згідно з теоремою 3.2 ([10], §3, п. 15), пряма n (лінійка) перпендикулярна площині Σ (розхилений циркуль), коли вона перпендикулярна двом прямим (ніжки циркуля) цієї площини, які перетинаються. Такими прямими в площині Σ зручно щоразу обирати (зокрема, добудовувати) її горизонталь h і фронталь f , адже n перпендикулярна кожній прямій площини Σ за

означенням (розташуйте в уявленнях одну з ніжок циркуля паралельно підлозі, а іншу – паралельно дошці). Оскільки $h \parallel \Pi_1$, а $f \parallel \Pi_2$, то за висновком теореми про проєкціювання прямого кута матимемо: $h_1 \perp n_1$, $f_2 \perp n_2$.

Якщо ж площина Σ задана слідами на Π_1 і Π_2 , що в разі більш-менш регулярного розв'язування метричних задач указаним методом трапляється досить часто, формулювання цієї ж теореми-наслідку буде дещо іншим: «Для того, щоб дані пряма і площина загального розташування були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб ортогональні проєкції прямої на площини Π_1 і Π_2 були перпендикулярні однойменним слідам цієї площини відповідно»: $n \perp \Sigma \Leftrightarrow (n_1 \perp h_1^0; n_2 \perp f_2^0)$.

Варто до цього додати, що в процесі навчання евклідовій стереометрії, застосовуючи теорему-наслідок, не обов'язково площину проєкцій Π_2 вибрати фронтальною (паралельною площині дошки) в буквальному розумінні цього терміну. Принципово, щоб вона була вертикальною, тобто перпендикулярною горизонтальній площині Π_1 , яка за неписаною домовленістю збігається, як правило, із площиною основи стереометричного тіла. Звертаємо також увагу на розташування перпендикуляра n і його ортогональних проєкцій n_1 і n_2 в системі площин Π_1 , Π_2 : пари прямих простору n , n_1 і n , n_2 завжди належать відповідно горизонтально (фронтально) проєкціювальній площині. Така обставина дозволяє швидко і просто будувати в перетині обох указаних проєкціювальних площин аксонометричне зображення перпендикуляра n за умов, що попередньо вже задані чи без проблем будуються його проєкції n_1 , n_2 та, крім цього, строго визначені в просторі, а отже, й на проєкційному кресленні напрями внутрішнього подвійного ортогонального проєкціювання на площини проєкцій Π_1 і Π_2 .

Відомо, що основоположними на позиційно і метрично визначених проєкційних кресленнях геометричних фігур є **метричні задачі на перпендикулярність прямих і площин**. Зараз у навчально-методичних посібниках розв'язання кожної з таких задач (див., напр., §2 цього розділу) переважно

зводиться до побудови висоти деякого визначального трикутника, а інколи – до встановлення певних спряжених напрямів у площині метрично визначеного трикутника, квадрата, еліпса тощо. У загальному ж випадку, задача на побудову висоти трикутника є теж метричною, а це означає, що якщо задано трикутник ABC і потрібно побудувати його висоту BD , то взявши на основі AC довільну точку D , неможливо стверджувати, що відрізок BD зображає шукану висоту. І якщо не вдається виконати побудову висоти BD , скориставшись деякими особливостями даного зображення, або не вдається відразу помітити саме ті особливості, які дозволяють здійснити потрібну побудову безпосередньо на зображенні, то виконують додаткові графічні побудови через суміщення вибраних плоских фігур із площиною зображень, зокрема – на винесених кресленнях, або ж спочатку шукають визначальні аналітичні залежності між елементами конкретних геометричних фігур, а потім завершують розв'язання задачі графічно. Зрештою, в основу використання кожного з цих підходів (методів) покладені властивості паралельного проєкціювання: зберігати належність прямих і точок, паралельність прямих та відношення довжин відрізків на паралельних прямих.

Таким чином, після детального аналізу, розв'язання просторової задачі на перпендикулярність зводиться до площинної задачі у трикутнику чи квадраті. З одного боку, запропонована конкретизація дій передбачає певну універсалізацію схеми розв'язання задач визначеного типу, хоч і тут теж пропонується не один, а кілька методів. Тож у плані машинної алгоритмізації слід було б зупинитися винятково на графоаналітичному методі, що геометру прикладного толку достеменно відомо з досвіду. З іншого боку, означений підхід припускає цілковите нехтування класичною стереометричною схемою проведення шуканих прямих і площин, перпендикулярних до даних прямих і площин. Такий стан речей в теоретичному аспекті можна кваліфікувати як недостатнє опрацювання методології пошуку можливих варіантів побудови прямих і площин строго визначеного напрямку. Адже багатьом особистостям, схильним захоплюватися математикою, знайоме відчуття невдоволення знайденим лише частинним розв'язком тієї чи іншої задачі або штучним шляхом її розв'язання. Неприємно, коли не вдається розв'язати задачу в загальному вигляді. Отож, схоже враження «штучності», професійне невдоволення не залишають нас після ґрунтовного знайомства з посібниками, в яких всі без винятку конструктивні результати одержані прийомом налагодження певною мірою випадкових, поодиноких взаємних залежностей між заданими і шуканими геометричними фігурами на виносних кресленнях. Хоч, звичайно, їх теж потрібно «бачити», вміти розпізнавати серед інших і кваліфіковано залучати до виконання раціональних графічних операцій по суті завдання; особливо – у випадках пошуку оптимальних шляхів комп'ютерної реалізації побудовних схем і алгоритмів у прикладній геометрії, науці та техніці.

А зараз, щоб ще глибше проїнятися уявлюваними тонкощами методу, який ми пропонуємо до розгляду, його внутрішніми конструктивними особливостями, методологічними принципами та методичними аспектами ефективних рисункових реалізацій на зображеннях в аксонометрії, наведемо приклади

моделювання типових пропозицій на перпендикулярність основних геометричних фігур, віднесених до метрично визначених стереометричних тіл, які вирішуються, щонайперше, через посилання до теореми-наслідку. Умовно розіб'ємо цю групу задач на дві підгрупи.

2.1. Побудова прямих і площин, перпендикулярних заданій прямій

Мимоволі виникає просте запитання: «Чому озвучені в заголовку дві різні задачі об'єднані в одну підгрупу?». Однак, категорично різними вони видаються лише геометру-початківцю через його поки що неповні знання, недосконалі, поверхневі міркування. Суть у тому, що найперші метричні пропозиції органічно пов'язані одна з іншою *конструктивною схемою* розв'язання. Справді, для відшукування у просторі відстані від точки A до прямої m (рис. 1.71), яка вимірюється відрізком перпендикуляра AK , опущеного із заданої точки на задану пряму, що нам уже достеменно відомо, потрібно першим кроком провести через точку A всю сукупність (геометричне місце) прямих, перпендикулярних m . Вони ж усі вкупі складають таку площину Σ , що $A \in \Sigma$ і $\Sigma \perp m$. Інша справа, що в цій площині лише одна пряма, інцидентна точці A , яка перетинає пряму m . Тому наступним кроком будують точку K зустрічі прямої m і площини Σ , що в результаті й визначає шуканий відрізок AK . Отже, *побудові у просторі прямої, перпендикулярної даній прямій*, передуює в загальній геометричній схемі дій *проведення площини, перпендикулярної цій прямій*.

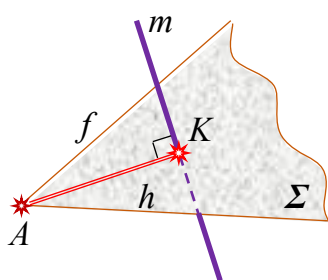


Рис. 1.71

Потрібно розуміти, звичайно, що останнє твердження зовсім не означає, що виключаються якісь особливі (частинні) випадки. У стереометрії за сприятливих вихідних умов можлива також принципово інша ситуація, коли точка A і пряма m визначають площину рівня в її розташуванні по відношенню до деякої метрично визначеної плоскої геометричної фігури (трикутника, квадрата тощо). Тут, скориставшись спочатку вже відомими з умови співвідношеннями метрично визначеної площини, проводять в ній перпендикуляр з довільної точки до будь-якої прямої, паралельної заданій прямій m , а потім, посилаючись до інваріантів паралельних проєкцій, будують шуканий перпендикуляр AK .

Не завадить також мати на увазі, що згідно з ознакою перпендикулярності прямої і площини, побудова площини Σ завжди зводиться, врешті-решт, до проведення через точку A двох визначальних для Σ прямих, кожна з яких хоч і мимобіжна із прямою m , та все ж утворює з нею у просторі прямий кут. У випадку ортогонального проєкціювання на дві площини проєкцій Π_1 і Π_2 зручно (у відповідності із твердженням теореми-наслідку), щоб ці прямі були лініями рівня площини Σ – горизонталлю $h \parallel \Pi_1$ і фронталлю $f \parallel \Pi_2$ (як уже вище наголошувалося).

Напевно, що проводити через точку A прямі і площини, перпендикулярні даній прямій m , можна також за умови, коли A інцидентна m .

А зараз тимчасово залишимо неспростовні геометричні істини та, із

задумом, доречно нагадаємо читачеві відому тезу суспільного буття.

Усім відомо, що народна мудрість у будь-якому прояві, зокрема своїми прислів'ями та приказками, коротко і містко, влучно і неспростовно формулює сенс і окремі нюанси життя людини, встановлює та означає норми, правила її поведінки і відповідних діянь у різноманітних життєвих ситуаціях. У зв'язку з цим, до діла нагадаємо всім відомий гучний вислів: *«Все пізнається в порівнянні»*.

Порівняння, як аналіз і синтез, абстрагування і узагальнення в психолого-педагогічних науках віднесено до *основних загальних розумових дій*. Ще видатний педагог-демократ К. Д. Ушинський указував, що *порівняння – основа всякого розуміння і мислення, головна умова продуктивності процесу мислення, тобто всієї аналітико-синтетичної діяльності*: *«Отже, всяке певне відчуття є вже результатом порівняння, а порівняння, як відомо, є найважливіша розпізнавальна діяльність розуму»*. Йому вторує у своїх працях чудовий педагог-практик З. І. Слєпкань: *«Порівняння – це розумова дія, за допомогою якої в предметах і явищах вирізняються окремі ознаки, знаходяться спільні і відмінні їх властивості»* ([12]).

Отож, в унісон сумирному «ліричному відступу», першою в порядку слідування запропонуємо до розв'язання вище описаним прийомом задачу, яка добре знайома читачеві з попереднього розділу (див. р. I, «Тренувальні вправи і завдання», задача 12), і **порівняємо** різні методи. Ось її умова трохи в іншому формулюванні.

Задача 1. *В основі піраміди $SABC$ лежить прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), а висота піраміди проєкціюється у вершину B . Побудувати зображення кута, утвореного гранями SAB і SAC , коли відомо, що $SB = BC = AC = a$.*

Уже раніше ретельно відпрацьовано три різні варіанти в рисунковому відтворенні лінійного кута MLC , яким вимірюється двогранний кут при ребрі SA . Вони ідентичні постановкою питання, але різняться дієвими схемами закономірних обґрунтувань та їх конструктивними реалізаціями. Приміром, два перші способи відтворені на проєкційному кресленні суто графічно, а третій – графоаналітично. Усе ж таки, ці правила-орієнтири побудовних операцій тісно пов'язані між собою окремими елементами піраміди, зокрема, гранню SAB і тими частинними (що виявилися визначальними) взаємними залежностями в грані, які передбачено умовою та встановлено простими умовиводами: трикутник SAB – прямокутний і якщо в ньому $\angle B = 90^\circ$, а $SB = a$, то $AB = a\sqrt{2}$. Поряд із цим, ми напевно знаємо, що жоден із цих методів розв'язання задачі не підпадає під категорію «загальний геометричний».

Цікавими в можливих методологічних варіаціях є, до речі, ще й такі найпростіші суто геометричні міркування. Якби в умові задачі її висновком виключно диктувалося знайти кут при ребрі SA в натуральну величину (і тільки), то досягти результату швидко і оригінально можна було б через доповнення вихідної піраміди до куба (в уяві або ж графічно, рис. 1.72, *a*), що легко змодельовати. На проєкційному кресленні дуже добре видно, що трикутник BNP , один із кутів якого ($\angle BNP$) шуканий, є елементом (складовою) рівностороннього

трикутника BFG – відомого особливого перерізу куба. Площина трикутника BNP перпендикулярна діагоналі куба SA . Отже, досить лишень уявити (чи на вільному місці поля зображень накреслити) будь-який оригінальний за формою рівносторонній трикутник $B'F'G'$ і в перетині (т. N') його медіан $B'O'$ і $F'P'$ «побачити» в уяві, дійти логікою міркувань (чи заміряти на рисунку транспортиром) кут $B'N'P'$. Адже із трикутника $B'F'G'$ вочевидь випливає (див. [10], теорема 5.7 про кути, вписані в коло), що $\angle BNP = 60^\circ$, а це зливається з результатом уже розв'язаної в додатку задачі 12 і, для «куска» куба (піраміда $SABC$), є ще одним характеристичним метричним параметром.

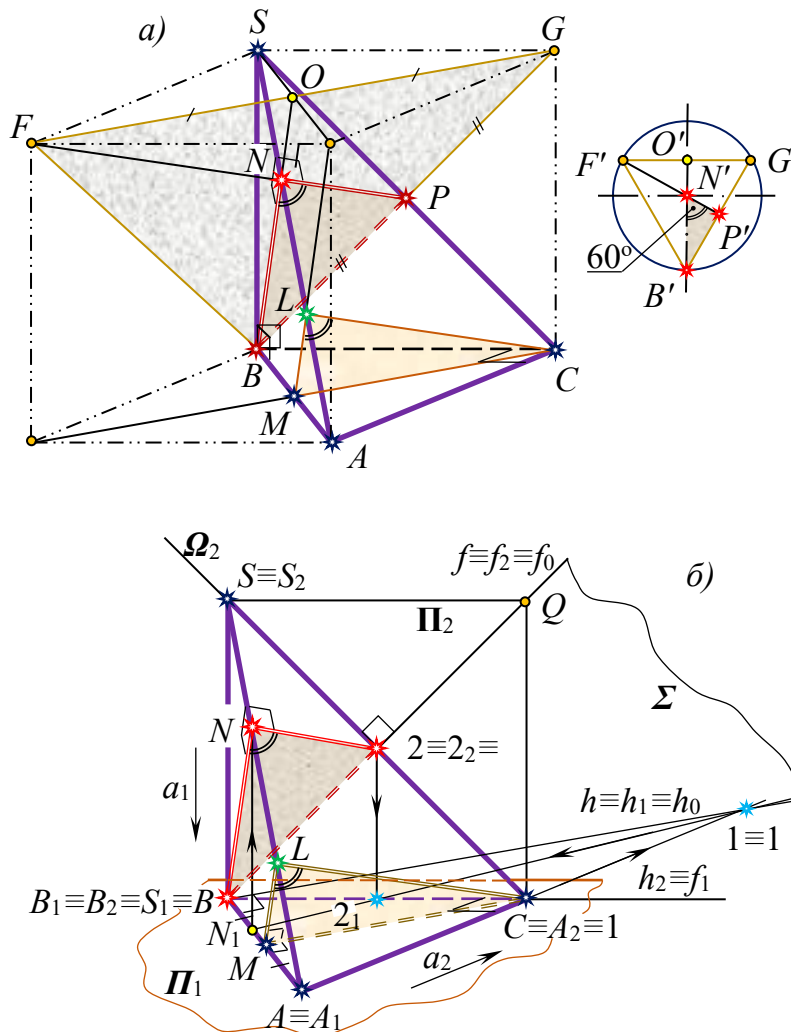


Рис. 1.72

Нагадаємо, що в нашому випадку вимагається **побудувати** зображення будь-якого лінійного кута, яким вимірюється двограний кут при ребрі SA . Тому поставимо собі за мету досягти результату в два кроки наступним ланцюжком графічних дій у просторі: 1). *Проведемо через деяку точку (нехай це буде, для визначеності, вершина B) площину Σ , перпендикулярну ребру SA .* 2). *Побудуємо переріз BNP піраміди площиною Σ , завдяки чому цілком визначимося із кресленням кута BNP , який рівний, зокрема, й куту MLC .* Такий підхід справді буде **загальним геометричним**, що й було обґрунтовано нами детально на початку попереднього розділу.

Як саме це зробити? Ми стверджуємо, що дуже просто (!), якщо професійно,

вміло й акуратно скористатися на кресленні-моделі основною теоремою-наслідком про перпендикулярність прямої і площини, за умов, коли задану пряму SA і площину Σ , яка вводиться виконавцем побудов, віднесемо (рис. 1.72, б) до двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій Π_1 і Π_2 ($m \perp \Sigma \Leftrightarrow (m_1 \perp h_1, m_2 \perp f_2)$), де $\Sigma (h \cap f)$.

Зорієнтуємося спочатку з розташуванням точки B і ребра SA в образно введеної нами ж системі двох площин проєкцій: горизонтальна Π_1 і фронтальна Π_2 , які зображуються на проєкційному кресленні елементами піраміди – гранями ABC і SBC відповідно. Фронтальну площину проєкцій Π_2 доцільно задати гранню SBC , а не SAB тому, що $SB = BC$, $SB \perp BC$, а отже, умовою задачі квадрат $SBCQ$ (в оригіналі) метрично визначає площину на кресленні. Тут горизонтальною проєкцією (за напрямом a_1) точки B буде сама ця точка ($B_1 \equiv B$), а ребро SA проєкціюється на Π_1 у ребро BA ($S_1A_1 \equiv BA$); фронтальною проєкцією (за напрямом a_2) точки B буде вона ж ($B_2 \equiv B$), а ребро SA проєкціюється на Π_2 в ребро SC ($S_2A_2 \equiv SC$). Зауважимо, така чіткість з обома проєкціями кожного із задіяних до справи елементів стереометричного тіла завжди має бути нехибною і абсолютно зрозумілою (уявлюваною).

Отже, на першому кроці через точку $B(B_1, B_2)$ проведемо єдино можливу площину, перпендикулярну в просторі прямій SA (S_1A_1, S_2A_2), яка **обов'язково визначається горизонтальною та фронтальною прямими**, інцидентними B : $\Sigma (h \cap f)$; $h_1 \parallel MC$ ($\angle CMA = 90^\circ$), а $h_2 \equiv BC$; $f_2 \perp SC$ (у квадраті $SBCQ$ діагоналі перетинаються в оригіналі під прямим кутом), а $f_1 \equiv BC$. У цьому випадку, фактично, площина Σ зображена слідами на Π_1 і Π_2 або, як ще говорять, задана нуль-горизонталлю $h_1 \equiv h_0$ і нуль-фронталлю $f_2 \equiv f_0$.

Другим кроком знайдемо точку N перетину ребра $SA(S_1A_1, S_2A_2)$ із площиною $\Sigma(h \cap f)$, тобто розв'яжемо ОПЗ-1: а) через ребро SA проведемо фронтально проєкціювальну площину-посередник $\Omega(SAC)$, яка вироджується на площину проєкцій Π_2 у пряму $SC \equiv \Omega_2$; б) побудуємо пряму лінію (1–2) перетину площин $\Sigma(h \cap f)$ і $\Omega(\Omega_2)$. Для цього знайдемо точки 1($1_1, 1_2$) і 2($2_1, 2_2$) перетину із площиною Ω горизонталі $h(h_1, h_2)$ і фронталі $f(f_1, f_2)$ відповідно, строго пам'ятаючи при цьому про напрями проєкціювання a_1 і a_2 ; в) знайдемо точку N у перетині прямих SA і (1–2); тут спочатку відшукається горизонтальна проєкція точки $N_1 = (S_1A_1 \equiv BA) \cap (1_1-2_1)$, а потім, оберненим проєкціюванням, й сама точка N на ребрі SA .

Далі, оскільки ребро піраміди SC і нульова фронталь f_2 площини перерізу Σ належать одній і тій самій площині проєкцій Π_2 , то легко знайти ще одну (останню) вершину трикутника перерізу, а саме: $(P \equiv 2_2) = SC \cap \Sigma(h \cap f)$. Тому, на завершення задачі, нам залишається лише з'єднати відрізками вершини шуканого трикутника BNP , в якому лінійний кут BNP є ще одним можливим зображенням кута із градусною мірою двогранного кута при ребрі SA .

На перший погляд видається, що останній підхід до розв'язування метричних задач стереометрії, порівняно з іншими, дещо складніший в уявленнях і графічному виконанні. Ця теза, озвучена студентом (учнем),

ніскільки не здивує фахівця конструктивної геометрії. Проте ми переконані, що таке хибне враження є результатом неповного й неусталеного пізнання методів конструктивної геометрії, зокрема, надто незначного досвіду «бачення» міжелементних стереометричних зв'язків у системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій, нестача практичних орієнтирів і схем відтворення незвичних, поки що, побудов. Тут, не поспішаючи, обов'язково потрібно здобути специфічні навички, оволодіти вміннями, притаманними нетрадиційним просторовим перетворенням, розумом осягнути основи виконання строго обумовлених графічних операцій. Уже наголошувалося вище, що описаними процедурами індукується загальний геометричний підхід до розв'язання задач, однак метод має й інші позитивні якості. Зокрема, він безсумнівно *ефективний у процесі розвитку та формування просторових уявлень і уяви учнів*, оскільки вимагає від них напружених зусиль мислення тривимірними образами, що вводяться в розгляд самим виконавцем завдання. Нарешті, метод подвійного внутрішнього проєкціювання завжди гарантує реалізацію алгоритму пошуку розв'язку задачі безпосередньо на зображенні стереометричного об'єкта і, до того ж, винятково *графічним* шляхом.

Задача 2. На діагоналі BD_1 накресленої правильної чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в якій бічне ребро в півтора рази більше ребра основи, дано таку точку F , що $BF : FD_1 = 2 : 3$. Побудуйте переріз призми площиною, який проходить через точку F перпендикулярно діагоналі BD_1 , і знайдіть площу фігури перерізу, якщо сторона основи призми рівна 1.

Правильна чотирикутна призма (рис. 1.73) на картинній площині своїм зображенням є метрично визначеною, адже: $A_1 B_1 = B_1 C_1$, $A_1 B_1 \perp B_1 C_1$, $AA_1 \perp A_1 B_1$, $AA_1 \perp A_1 D_1$, $AA_1 = 1,5 A_1 B_1$.

Прийmemo нижню основу призми $A_1 B_1 C_1 D_1$ за таку, що уособлює на зображенні горизонтальну площину проєкцій Π_1 , а праву її грань $DD_1 C_1 C$ – фронтальну Π_2 . Проєкціюємо на кожну з них діагональ BD_1 і точку $F \in BD_1$ за напрямками $FF_1 \parallel AA_1$ і $FF_2 \parallel A_1 D_1$ відповідно. Очевидно, що в такому подвійному внутрішньому ортогональному проєкціюванні $B_1 D_1$ буде горизонтальною, а CD_1 – фронтальною проєкціями вказаної діагоналі.

Тепер, через точку $F(F_1, F_2)$, потрібно так провести площину $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярну $BD_1(B_1 D_1, CD_1)$, щоб неодмінно виконувалися на моделі умови теореми-наслідку: $h_1 \equiv M_1 N_1 \perp B_1 D_1$; $f_2 \equiv P_2 Q_2 \perp CD_1$. Оскільки в основі призми діагоналі квадрата $A_1 C_1$ і $B_1 D_1$ взаємно перпендикулярні в оригіналі, то h_1 , що містить точку F_1 , розташовується паралельно $A_1 C_1$. Щоб через точку F_2 провести фронтальну проєкцію фронталі f_2 , перпендикулярно CD_1 , потрібно, перш за все, в грані $DD_1 C_1 C$ виділити квадрат $DGH C$ ($DG = \frac{2}{3} DD_1$ і $GH \parallel D_1 C_1$), а потім, уже відомим нам прийомом, провести у квадраті $CDGH$ $P_2 Q_2 \parallel RH$. Урахувавши, що $h \parallel h_1$ і $f \parallel f_2$, а паралельність прямих є інваріантом паралельних проєкцій, через точку F легко проводимо прями h і f , які й визначають у просторі шукану площину $\Sigma \perp BD$.

Щоб побудувати фігуру перерізу призми площиною Σ , досить знайти точки перетину з певними гранями багатогранника горизонталі h і фронталі f . Такі точки

SC), і знайти периметр фігури перерізу, якщо $AB = a$ і $AB : BC : SO = 1 : 2 : \sqrt{5}$.

Чи метрично визначене зображення піраміди (рис 1.74) на проєкційному кресленні? Так, оскільки $AB \perp BC$, $BC = 2 \cdot AB$, $SO \perp AC$, $SO \perp BD$, $SO = \sqrt{5}AB$.

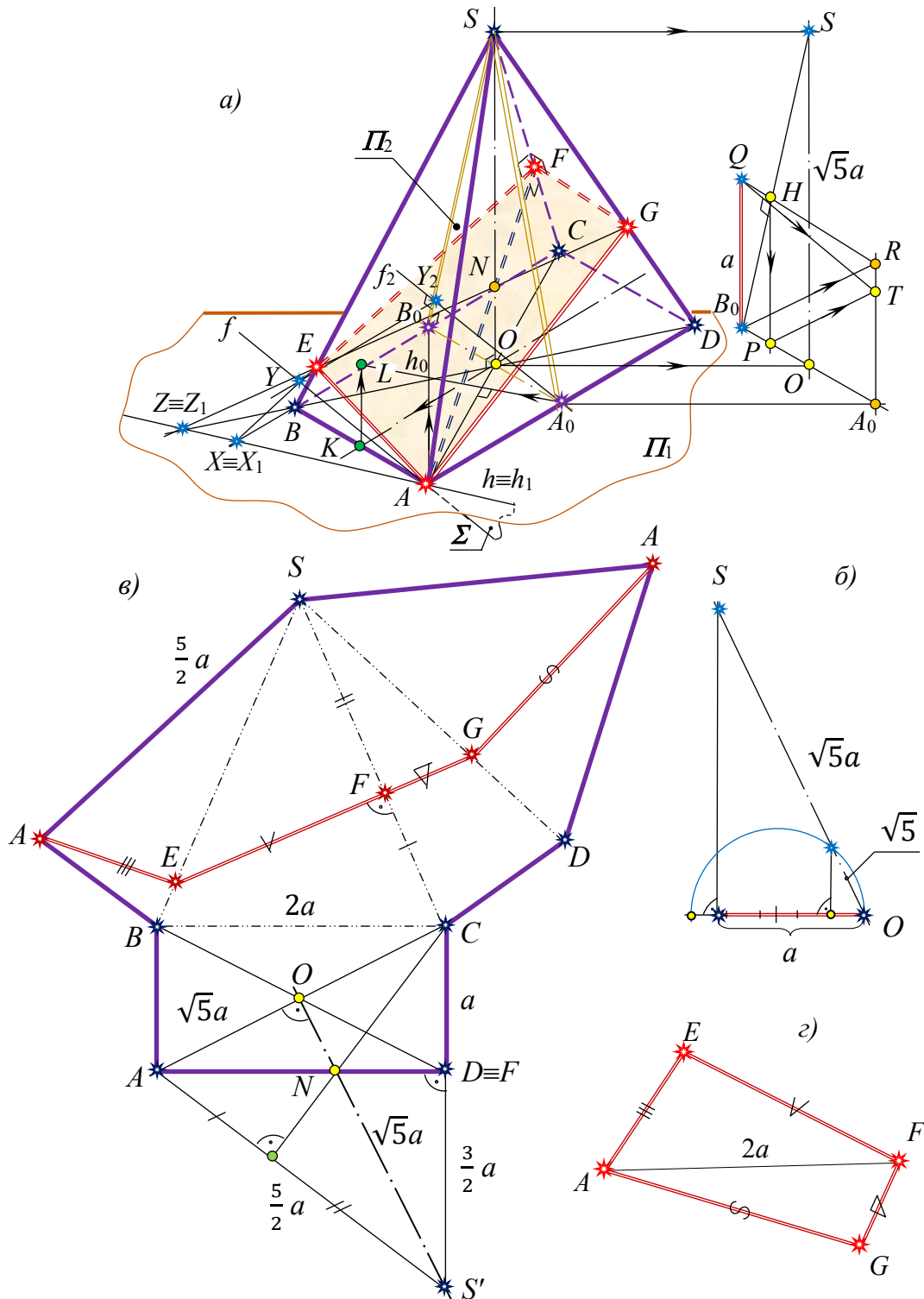


Рис. 1.74

Підкреслимо, що в якості взаємно перпендикулярних площин проєкцій Π_1 і Π_2 зручно щоразу обирати площини, які вже метрично визначені умовою задачі. Це, як зазначалося, можуть бути не лише грані розглядуваного багатогранника, а і його перерізи. Метрична визначеність площини проєкцій передбачає

можливість чіткого встановлення в ній визначальних спряжених напрямів (див. р. I, §2). У нашому випадку в ролі горизонтальної площини проєкцій Π_1 доцільно обрати основну площину даного зображення ($ABCD$), а в ролі фронтальної Π_2 – площину (SA_0B_0) осьового перерізу піраміди, паралельну ребру її основи AB .

Проекціюємо точку A і ребро піраміди SC на Π_1 і Π_2 : $A_1 \equiv A$, $S_1C_1 \equiv OC$; $A_2 \equiv A_0$, $S_2C_2 \equiv SB_0$. Далі, через точку $A(A, A_0)$ проведемо площину $\Sigma(h \cap f)$, що перпендикулярна ребру $SC(OC, SB_0)$. У квадраті ABB_0A_0 через точку A_0 проводимо спочатку $h_0 \perp OC$, а потім через точку $A - h_1 \equiv h \parallel h_0$. З урахуванням того, що $SO = \sqrt{5}A_0B_0 = \sqrt{5}a$, за відомим відрізком SO знаходимо колінеарний йому відрізок a (рис. 1.74, б) і на виносному кресленні (щоб не затінювати основну картину) будуємо квадрат A_0B_0QR у вигляді паралелограма, в якому $B_0Q = a$. Якраз останній квадрат і визначатиме метрично площину проєкцій Π_2 . У ньому, аналогічно попередньому, через точку Q проводимо $f_0 \perp SB_0$, а потім через точку $A_0 - f_2 \parallel f_0$ і через точку $A - f \parallel f_2$. Цим цілком визначиться площина $\Sigma(h \cap f) \perp SC$, яка містить точку A .

Оскільки $h \equiv h_1$ є слідом Σ на площині основи піраміди $ABCD$, то легко будується точка ($X \equiv X_1$) = $BC \cap \Sigma$, тобто h перетинає площину задньої грані піраміди SBC у точці $X \equiv X_1$. У свою чергу, $Y(Y_2)$ є точкою перетину фронталі f (f_2) із площиною $\Lambda(SBC)$. Отже, XY – пряма перетину площин Σ і Λ , а точки E і F на ребрах SB і SC будуть, очевидно, вершинами багатокутника перерізу. Останню його вершину G на ребрі SD шукаємо на прямій $Z(Z_1)E$ за допомогою площини-посередника $\Omega(SBD)$. $A EFG$ – шуканий чотирикутник перерізу, а AF – перпендикуляр, опущений із вершини піраміди A на її протилежне ребро SC .

Периметр чотирикутника $A EFG$ можна знайти або шляхом звичайних (формальних) обчислень, «пройти» який читачеві пропонуємо самотійно, або ж графоаналітичним методом – через суміщення всіх граней піраміди та її осьового перерізу SAC із картинною площиною. Загалом, цей *останній метод, швидше за все, слід назвати «методом розгортки»*. Очевидно, що користуватися ним доцільно тоді, коли фігура перерізу в оригіналі не є рівностороннім трикутником, квадратом, ромбом тощо, а деякою плоскою фігурою загального вигляду.

Безсумнівно, що для цього, щонайперше, потрібно визначитися з ребром $AB = a$ в основі піраміди. Його можна взяти безпосередньо з рисунка 1.74, a ($A_0B_0 = B_0Q = a$) чи задати, приміром, вибраною одиницею масштабу. Отже, нехай, для визначеності, a дорівнює 2 (двом) одиницям масштабу. Тоді $BC = 2a$, $AC = \sqrt{5}a$ і $AO = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Нарешті, із прямокутного трикутника SOA отримуємо: $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \frac{5}{2}a$. Цим, власне, вичерпано всі аналітичні розрахунки, які потрібні для наступної реалізації методу розгортки.

Розрізаємо в уяві поверхню піраміди вздовж ребер SA , AB , AD і DC та суміщаємо всі її грані (методом триангуляції) з картинною площиною (рис. 1.74, в). Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні між собою, зробити це зовсім неважко. На розгортці точки E , F і G розташовується на одній прямій, перпендикулярній SC . Справжня форма фігури перерізу побудована на рисунку 1.74, г за її сторонами і діагоналлю AF , акуратно «знятими» безпосередньо з розгортки. До речі, у

трикутнику SAC осьового перерізу піраміди легко знаходимо: $FC = a$, $SF = \frac{3}{2}a$, $AF = 2a$. З точністю до побудови і вимірювань можемо записати, що периметр чотирикутника $A EFG$ рівний $10,2$ одиниць масштабу ($5,1a$). Задачу розв'язано.

Задача 4. В основі прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений трикутник, висота якого CR рівна основі AB . На ребрі A_1C_1 задано точку M таку, що $A_1M : MC_1 = 1 : 4$. Опустить перпендикуляр із точки M на пряму AK і знайдіть його довжину, якщо бічне ребро призми $AA_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, а K є точкою перетину діагоналей грані BB_1C_1C .

Метрична визначеність зображення призми (рис. 1.75) не викликає сумнівів: $AC = BC$, $AB = CR$, $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$, $AA_1 = \frac{1}{2}AB$.

Загальна геометрична схема розв'язання задачі залишається незмінною. Тобто найперше, що потрібно зумисне зробити, це віднести точку M і пряму AK до вдало, найліпше розташованої в розглядуваній конструкції пари взаємно перпендикулярних площин проєкцій Π_1 і Π_2 . Напевне, що за горизонтальну площину проєкцій більш доцільно взяти площину верхньої основи призми Π_1 ($A_1B_1C_1$), оскільки вона вже містить у собі задану точку M за умовою, а за фронтальну – площину симетрії призми Π_2 (RR_1C_1C), перпендикулярну лівому ребру AB . Тут напрями подвійного внутрішнього проєкціювання якраз і визначаються осмисленим вибором площин проєкцій Π_1 і Π_2 : $KK_1 \parallel AA_1$ і $KK_2 \parallel BA$. Тоді $M \equiv M_1$, а A_1K_1 є медіаною трикутника $A_1B_1C_1$; $M_2 \in C_1R_1$ і $MM_2 \parallel A_1B_1$, а $A_2K_2 \subset RC_1$ і $A_2 \equiv R$.

Тепер через точку M проведемо площину $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярну AK . Горизонталь h , інцидентна точці $M \equiv M_1$, належить, що очевидно, площині проєкцій Π_1 ($A_1B_1C_1$), тому вона буде водночас своєю горизонтальною проєкцією h_1 і слідом h_0 площини Σ на площині основи призми. Окрім цього, згідно з теоремою-наслідком, горизонталь в оригіналі має розташуватися перпендикулярно A_1K_1 , яка на моделі є проєкцією AK на площину Π_1 . Виконаємо побудову, застосувавши (уже вкотре) «принцип висот» трикутника $A_1B_1K_1$. Оскільки трикутник $C_1R_1B_1$ прямокутний ($\angle R_1 = 90^\circ$) і $R_1C_1 = 2 \cdot R_1B_1$, а точка $F = MM_2 \cap B_1C_1$ ділить відрізок B_1C_1 у відношенні $1 : 4$ ($\frac{R_1B_1^2}{R_1C_1^2} = \frac{R_1C_1^2}{4R_1B_1^2} = \frac{1}{4}$), то $R_1F \perp B_1C_1$. Тому прямі $A_1O \parallel R_1F$ і $K_1O \parallel C_1R_1$ є суть дві висоти розглядуваного трикутника, а точка O перетину цих висот буде його ортоцентром. Пряма B_1O є зображенням третьої висоти трикутника, а $h \equiv h_1 \parallel B_1O$ – зображенням горизонталі шуканої площини Σ . Фронтальну проєкцію фронталі f_2 , у перпендикулярному розташуванні відносно RC_1 (адже $A_2K_2 \subset RC_1$), за вже достатньо відомим нам алгоритмом знаходимо у квадраті $RPQC$, в якому $RP = 2 \cdot AA_1$. При цьому сама фронталь f , інцидентна точці M , займе паралельне розташування по відношенню до f_2 , а її горизонтальна проєкція f_1 (що знадобиться нам дещо пізніше) буде проходити через ту саму точку $M \equiv M_1$ паралельно R_1C_1 , яка є спільною прямою (віссю) в перетині двох площин проєкцій Π_1 і Π_2 . Тут кожна із двох площин проєкцій вироджується на іншу з них

якраз у пряму R_1C_1 .

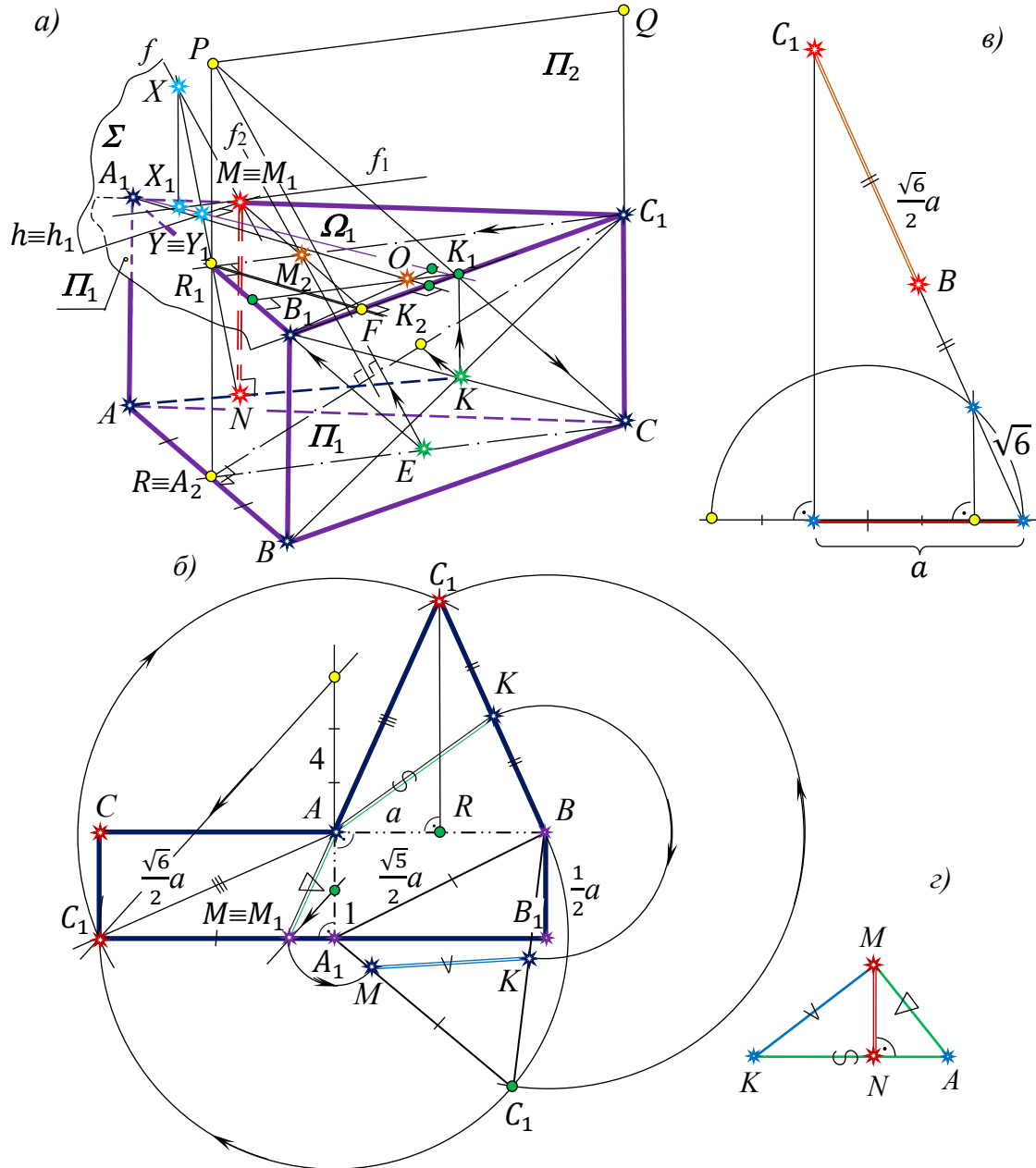


Рис. 1.75

Залишилося розв'язати ОПЗ-1, тобто, скориставшись добре відомим алгоритмом дій у три кроки, знайти на проєкційному кресленні точку перетину прямої AK і площини $\Sigma(h \cap f)$: 1) через AK проведемо горизонтально проєкціювальну площину-посередник $\Omega(AKK_1A_1)$; 2) побудуємо пряму X_1Y_1 перетину площин Σ і $\Omega(X = f \cap \Omega(\Omega_1); Y = h \cap \Omega(\Omega_1))$; 3) знайдемо точку N перетину прямих AK і X_1Y_1 . Очевидно, що відрізок MN й буде шуканим перпендикуляром, опущеним із точки M на пряму AK .

На завершення задачі, знайдемо графоаналітичним методом справжню форму трикутника AMK , в якому відрізок $MN \perp AK$ є його висотою і шуканою відстанню від точки M до прямої AK . З цією метою, на першому кроці, сумістимо з картинною площиною ліву грань призми AA_1B_1B . В оригіналі, як відомо з умови задачі, AA_1B_1B є прямокутником зі сторонами $AB = 1$ і $AA_1 = \frac{1}{2}$. Цікаво і важливо,

що тепер на суміжних сторонах AA_1 і AB та на діагоналі A_1B цього прямокутника можна напрочуд легко побудувати фігуру-суміщення із площиною дошки (зошита) грані призми AA_1C_1C , а отже, і оригінал (за формою) прямокутного трикутника AA_1M , що належить задній грані, а також суміщення ще двох рівнобедрених трикутників ABC_1 і A_1BC_1 , які є визначальними перерізами заданої призми. Діяльнісна зацікавленість названими трьома трикутниками пояснюється тим, що кожен із них вміщує в собі одну із сторін AM , AK і MK шуканого трикутника AMK відповідно.

Отож, $A_1B = A_1C_1 = B_1C_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, а $BC_1 = AC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (див. рис. 1.75, б).

Нагадаємо також, що $A_1M : MC_1 = 1 : 4$, $AA_1 \perp A_1C_1$, $AB \perp RC_1$ і $BK = KC_1$. Заданих умовою і знайдених щойно формальних співвідношень цілком вистачить для виконання спланованих побудов (рис. 1.75, а, в, г).

Якщо, наприклад, за одиницю довжини на останньому рисунку взяти відрізок у 20 мм, то безпосереднім замірюванням (на рисунку, зробленому окремо на форматі А4) одержимо, що $MN = 9$ мм. Аналітичні вираження та числові розрахунки, які ми не наводимо в тексті і пропонуємо читачеві провести самостійно, дають, звичайно, більш точний результат: $MN = 8,88$ мм.

З умотивовано описаних і візуально, в динаміці дій відображених на проєкційних кресленнях уявлюваних перетворень власноруч задіяних геометричних фігур у кожній із задач, впливає, що всі без винятку факти, на які ми посилаємося, та графічні кроки в моделюванні цілісних просторових конструкцій не можна назвати складними. Рівень їх наукових обґрунтувань, змістова складова, технічні прийоми діянь циркулем і лінійкою адекватні знанням, умінням і навичкам старшокласника, якщо, звичайно, прийнятно просто ввести в курсі геометрії ЗЗСО теорему про проєкціювання прямого кута та теорему-наслідок із неї (див. [8], ч. I, р. 1, §3, властивість 10° – задача).

2.2. Побудова прямих і площин, перпендикулярних заданій площині

Нагадаємо, що в загальногеометричному тлумаченні стереометрична задача на відшукування відстані від точки A до площини Σ розв'язується у два етапи. Спочатку через точку A проводять пряму n , перпендикулярну площині Σ (метрична задача), а потім шукають точку K перетину прямої і площини (позиційна задача). Відрізок AK прямої n й визначатиме шукану відстань.

Усе ж таки, щоб чітко реалізувати в усякій ситуації перший етап, у заданій площині Σ потрібно вирізнити дві прямі, що перетинаються, з якими пряма n утворювала б у просторі прямі кути. Вдалих чи невдалих вибір таких прямих на проєкційному кресленні характеризує рівень кваліфікації суб'єкта навчання. Ця операція безпосередньо впливає на графічну оптимізацію процесу побудов, адже пара прямих площини має розташовуватися на зображенні так, щоб проведення перпендикуляра n було якомога простим, майже очевидним і обов'язково переконливим в обґрунтуванні.

Природно, що теорема-наслідок про перпендикулярність прямої і площини диктує власний ефективний шлях розв'язання на проєкційному кресленні й цієї стрижневої задачі метрики. Дані точку A і площину Σ потрібно віднести до

помірковано, осмислено вибраної системи двох площин проєкцій Π_1 і Π_2 ($\Pi_1 \perp \Pi_2$) з тим, щоб у проведенні прямої n допоміжними були не будь-які дві прямі площини Σ , а її горизонталь $h \parallel \Pi_1$ і фронталь $f \parallel \Pi_2$: $n \perp \Sigma \Leftrightarrow (n_1 \perp h_1; n_2 \perp f_2)$. Це гарантуватиме графічний результат.

Масове розв'язування схожих задач не виключає можливих частинних випадків, коли перпендикуляр n до даної площини Σ доведеться проводити не з точки поза площиною, а в її деякій фіксованій (заданій умовою) точці. Однак таке взаємне розташування точки A і площини Σ в жодному разі не впливає на конструкцію стандартизованого алгоритму дій.

У свою чергу, площина Λ , перпендикулярна даній площині Σ , у практичній стереометрії проводиться, як правило, через ту чи іншу пряму m , оскільки через точку поза площиною Σ можна провести безліч (пучок) площин, які перпендикулярні даній площині. Визначальними прямими шуканої площини Λ за таких вихідних умов будуть, очевидно, задана пряма m і перпендикуляр p , опущений на площину Σ із раціонально вибраної точки прямої m . Отже, остання задача зводиться до попередньої. Якщо ж, усе-таки, перпендикулярну площину вимагається провести через дану точку на площині Σ чи поза площиною, то тут потрібно мати на увазі, що однозначність шуканої площини у просторі обов'язково визначатиметься ще однією позиційною умовою, накладеною на неї, наприклад, умовою паралельності останньої деякій визначеній (фіксованій) площині.

Задача 5. У трикутній піраміді $SABC$ основою є прямокутний трикутник ABC із прямим кутом при вершині C та відношенням катетів $AC : BC = 3 : 4$. Висота піраміди SC проєкціюється в точку C і рівна гіпотенузі AB трикутника основи. З точки C опустить перпендикуляр на площину грані SAB і знайдіть його довжину, якщо в оригіналі $CA = 3$ см.

Означенням зображення стереометричної фігури передбачено (див. [6], ч. I, р. I, §4), що в загальному випадку її паралельна проєкція на картинну площину ще й піддається перетворенню подібності з невизначеним коефіцієнтом k . Саме з цієї причини будь-яке повне і метрично визначене зображення допускає реконструкцію розглядуваного тривимірного об'єкта лише з точністю до подібності. У щойно сформульованій задачі випадає мати справу з паралельною проєкцією піраміди, яка після зовнішнього проєкціювання не зазнала пропорційних деформацій в жодній із проєкцій оригінальних лінійних елементів ($k = 1$). За таких обставин з'являється реальна можливість відновлення оригіналу з точністю до його істинних розмірів. Очевидно, що це є наслідком витрати на зображення вже не **п'яти**, а **шести** метричних параметрів (рис. 1.76): 1) $\angle ACB = 90^\circ$; 2) $AC = \frac{3}{4}BC$; 3) $SC = AB$; 4) $SC \perp AC$; 5) $SC \perp BC$; 6) $C'A' = CA = 3$ см. Отже, зараз ми отримали на проєкційному кресленні не просто метрично визначене, але й більше того – **метрично розмірне** зображення піраміди $SABC$. Повне метрично визначене зображення, на яке накладаються додаткові умови, що визначають **розміри** оригіналу, називається **метрично розмірним**.

Отже, для відшукування суто графічного розв'язку (на рис., де $k = 3 : 2,48$),

здійснити стосовно тієї ж точки C і, тепер уже, гіпотенузи SB прямокутного трикутника SCB . Очевидно, що й спосіб проведення променя $n_2 \perp SB$ може бути точно таким самим (обґрунтуйте його за рисунком самостійно). Однак не менш привабливо зробити потрібну побудову вже звичним для нас прийомом у квадраті $CEFB$, в якому $CE = \frac{4}{5}CS$. У ньому, як належить, спочатку побудовно строго задаємо пару спряжених напрямів RT і GB ($S'T' \perp G'B'$), а потім проведемо $n_2 \parallel RT$.

Двома своїми проєкціями n_1 і n_2 шуканий перпендикуляр n на моделі, а отже й у просторі, цілком визначається. Залишається лише через подвійне ортогональне проєкціювання знайти його аксонометричне зображення. У зв'язку з цим нагадаємо, що n_1 є горизонтальною проєкцією прямої n у горизонтально проєкціювальній площині $\Lambda(SCn_1)$, а n_2 – її фронтальною проєкцією у фронтально проєкціювальній площині $\Delta(ACn_2)$. Очевидно, що $n = \Lambda \cap \Delta$. Площина $\Lambda(\Lambda_1 \equiv n_1)$ висікає в перетині із гранню піраміди SAB відрізок SM , а площина $\Delta(\Delta_2 \equiv n_2)$ – відрізок AN . Ці два відрізки в перетині між собою встановлюють точку P , спільну для обох площин Λ і Δ . Проте ще одна їх спільна точка C відома первісно, тому $CP \equiv n$ й буде перпендикуляром, проведеним із вершини C піраміди на її протилежну грань SAB .

Ще одне (друге у переліку) суміщення із площиною зображень, за умови, що віссю обертання буде пряма $C'M' \equiv C''M''$, із точністю до рисункових дій устанавлює істинну форму трикутника SCM , який містить у своїй внутрішній області шуканий перпендикуляр $CP'' \approx 2,15$ см (замір із креслення, з урахуванням k). Напевне, що більш точний результат можна одержати шляхом обчислень, розв'язавши відомими прийомами трикутник SCM , що ми теж пропонуємо читачеві зробити самостійно.

А зараз, бажаючи дещо урізноманітнити в студентській аудиторії варіанти пошуку розв'язку задачі, віднесемо піраміду до прямокутної декартової системи координат $Sxyz$. Нехай, наприклад, $CA = x$, $CB = y$ і $CS = z$. Тоді, що очевидно, вершини багатогранника матимуть координати: $C(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ і $S(0; 0; 5)$, а рівняння площини $\Sigma(SAB)$ «у відрізках» запишемо у вигляді: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1 = 0$. Відстань між заданими точкою C та площиною (SAB) в аналітичному представленні, як відомо, можна знайти за такою формулою: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}}} \cong 2,16$ см.

Розв'язання задачі завершено. Тепер, як звичайно, варто порівняти графічний та аналітичний результати і зробити належні висновки.

Задача 6. *Діагональ правильної чотирикутної призми утворює із площиною основи, сторона якої дорівнює 1, кут 45° . Побудуйте спільний перпендикуляр діагоналі призми і мимобіжної з нею діагоналі бічної грані. Обчисліть довжину перпендикуляра, знайдіть кут між указаними прямими.*

Проєкційне креслення призми метрично визначене, адже з умови задачі прямо випливає, що $KL = LM$, $\angle KLM = 90^\circ$, $DL \perp LM$, $DL \perp KL$, $\angle DNL = 45^\circ$.

1-й спосіб розв'язання. Нехай мимобіжні прямі з умови задачі (рис. 1.77) зображені діагоналлю DN призми і діагоналлю AL її лівої грані. Через точку O – середину DN – проведемо пряму, паралельну AL . Зафіксуємо точки A_1 і L_1 перетину останньої з ребрами призми AB і LM відповідно. Цього результату можна також досягти паралельним перенесенням відрізка AL на вектор $\overrightarrow{AA_1}$, де точка A_1 ділить ребро куба AB навпіл. Отож, матимемо: $AA_1 = LL_1 = \frac{1}{2}$; прямі ж, що перетинаються в точці O , визначають площину $\Sigma(DN \cap A_1L_1)$, яка вміщує DN і паралельна AL .

Наступним кроком у **побудові**, як відомо, потрібно з будь-якої точки відрізка AL опустити перпендикуляр на площину Σ . Нехай такою на AL буде, наприклад, середина цього відрізка – точка X . В якості пари площин проєкцій $\Pi_1(KLMN)$ і $\Pi_2(AKLD)$ внутрішнього подвійного ортогонального проєкціювання виберемо нижню та ліву грані призми. Тоді горизонталлю площини Σ зручно обрати прямою L_1N , а фронталлю – L_1A_1 , оскільки $h_1 \equiv h \equiv L_1N$, $f_2 \equiv AL$. Крім цього, $X_2 \equiv X \in f_2$ і $X_1 \in KL$, де $KX_1 = X_1L$. Далі, у квадраті $KLMN$ через точку X_1 ($KX_1 = X_1L$) проводимо відомим прийомом пряму $n_1 \perp h_1$, а через точку X_2 у квадраті KA_0D_0L (див. винесене креслення) – пряму $n_2 \perp f_2$, які однозначно визначатимуть шуканий перпендикуляр n . Справді, горизонтально проєкціювальна площина-посередник $\Delta(\Delta_1 \equiv n_1)$, проведена через ще відсутній на кресленні перпендикуляр n , дає у перетині із площиною Σ пряму (1-2), а фронтально проєкціювальна площина-посередник $\Omega(\Omega_2 \equiv n_2)$ – пряму (3-4), які просто будуються й у власному перетині висікають ще одну точку перпендикуляра n – його основу Y .

Нарешті, так побудований перпендикуляр-відстань XY від прямої AL до площини Σ паралельно перенесемо (за напрямом $L \rightarrow A$) у спільний для AL і DN перпендикуляр PQ , кінці якого P і Q належать відповідно цим прямим.

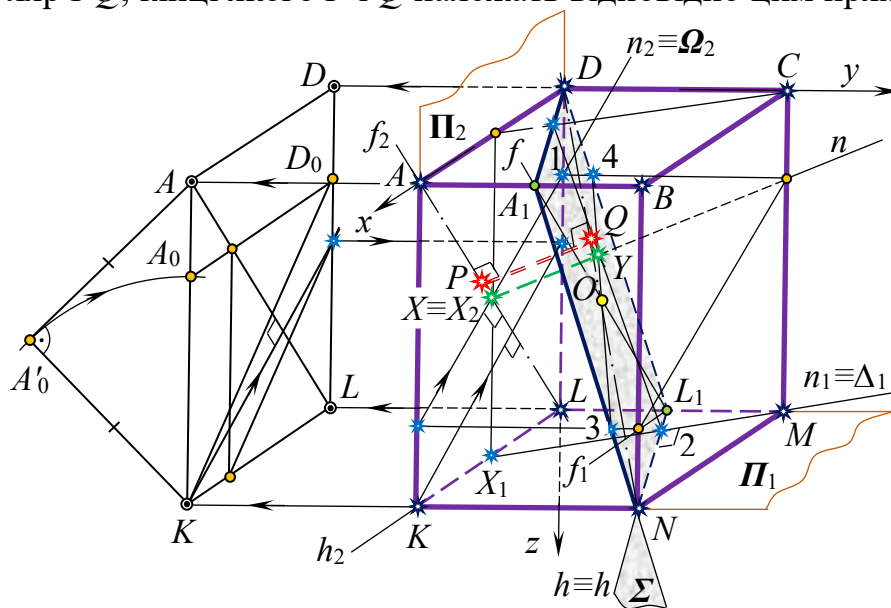


Рис. 1.77

Очевидно також, що зображенням шуканого кута між мимобіжними прямими буде кут A_1OD .

Що стосується **обчислювального** етапу, то найпростіше його реалізувати

лівої грані AL відбивається у відрізок FL . Причому, точку F – основу перпендикуляра AF на площину Λ , як проєкцію точки A , шукаємо в перетині променя, який виходить із точки A паралельно DO , із променем паралельним LO , що бере свій початок у точці X (LO і XF – проєкції на площину Λ відрізків DL і AX відповідно; оскільки точка X і пряма LO належать площині Λ , та $\Sigma(AF \cap AK) \parallel \Omega(DN \cap DL)$, а $\Omega \cap \Lambda = BL$, то $XF \parallel LB$). Тепер суть важливо у площині Λ із точки O опустити перпендикуляр на FL . Це можна здійснити двома способами: *графічно* і *графоаналітично*.

На винесеному кресленні істинну форму фігури перерізу призми площиною Λ побудовано шляхом двох послідовних суміщень із площиною зображень: спочатку квадрата $KLMN$ в основі призми (вісь $KN \equiv K'N'$), а потім ромба $XBYL$ (вісь $K'M' \equiv X'Y'$). Напевне, що точка R на FL розділяє цей відрізок у тому ж відношенні, в якому точка R'' розділяє відрізок $F'L''$. Тому точка R легко будується. Зауважимо, що в цілому в побудові визначальним виявився факт подібності трикутників AFX і DOL . Тут, оскільки $AX = \frac{1}{2}DL$, то $XF = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}LO = \frac{1}{2}$, тому $FHOX$ – прямокутник відомих розмірів.

Спільний перпендикуляр PQ прямих DN і AL знайдено на зображенні призми оберненим внутрішнім проєкціюванням (за напрямом $N \rightarrow D$).

Розрахувати аналітично розташування точки R на відрізку FL можна водночас із відшукуванням відстані (OR) між заданими умовою мимобіжними прямими. Для цього, найкраще, звернемося до прямокутного трикутника FHL ($\angle H = 90^\circ$). У цьому трикутнику: $FH = \frac{1}{2}XY = XO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $HL = \frac{3}{4}LB = \frac{3}{2}$, а $FL = \sqrt{FH^2 + HL^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. У свою чергу, $FH^2 = FL \cdot FT$ (точка T – основа перпендикуляра, проведеного з вершини прямого кута на гіпотенузу). Звідси $FT = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $TL = FL - FT = \frac{9}{2\sqrt{11}}$. Далі, $TH = \sqrt{HF^2 - FT^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}$ і $FT : TL = 2 : 9$. Оскільки $\triangle HTL \sim \triangle ORL$, отримаємо наступне : $HL : OL = TH : OR = 3 : 2$, а $TR : RL = 3 : 6$. Нарешті, $FR : RL = 5 : 6$ і $OR = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Кут між DN і AL у трикутнику A_1OD звично і просто обчислити з використанням теореми косинусів.

У фаховому порівнянні вже достатньо відомих і щойно ще раз описаних поруч один з одним двох уявлювано й побудовано різних підходів до пошуку шляху розв'язання задачі, доходимо висновку, що пріоритетне місце займає перший з них. Адже він загальний геометричний, строго алгоритмізований, простий в поясненнях і у графічній реалізації. Усе ж таки, цей метод незвичний для того, хто навчається в ЗЗСО. Другий – змістовно не менш цікавий, проте навч складніший, вимагає належно розвинених, усталених навичок просторових уявлень взаємних розташувань окремих елементів геометричних фігур усередині тіла, фахового «бачення» за рисунком потрібних неочевидних міжелементних зв'язків (аналіз ситуації) і вмінь творчого введення в розгляд (через закономірні добудови на проєкційному кресленні) нових геометричних об'єктів; нарешті,

досвіду і техніки кваліфіковано (методом суміщення) встановлювати справжню форму плоскої фігури. Прикро, що жоден із методів не є інструментом шкільної геометрії. Однак у руслі навчального змісту предмету «Геометрія» і особливостей його реалізації, слідуючи «букві» державних програм, останній підхід традиційністю заформалізованого мислення більш близький та зрозумілий суб'єкту навчання.

Задача 7. Бічні ребра правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ нахилені до площини основи під кутом 60° . Через медіану BL трикутника SBD проведено переріз піраміди площиною, паралельною ребру SA . Знайдіть кут між прямими SA і BL та обчисліть відстань від вершини C до площини перерізу, якщо ребро в основі піраміди дорівнює 1.

Зображення багатогранника (рис. 1.79) метрично визначене, адже, згідно з умовою задачі: $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $SO \perp AC$, $SO \perp BD$, $\angle SAC = 60^\circ$.

Багатокутник перерізу будується на проєкційному кресленні напрочуд просто. Для цього досить, наприклад, через точку L – основу медіани BL – у лівій грані піраміди провести пряму, паралельну SA ($LK \parallel SA$, LK – середня лінія трикутника SAD), і відмітити точки-сліди січної площини $\Sigma(BLK)$ на площині основи $ABCD$ ($B-K-W$) та на площині бічної грані піраміди SCD ($W-L-M$). Чотирикутник $BKLM$ – шуканий.

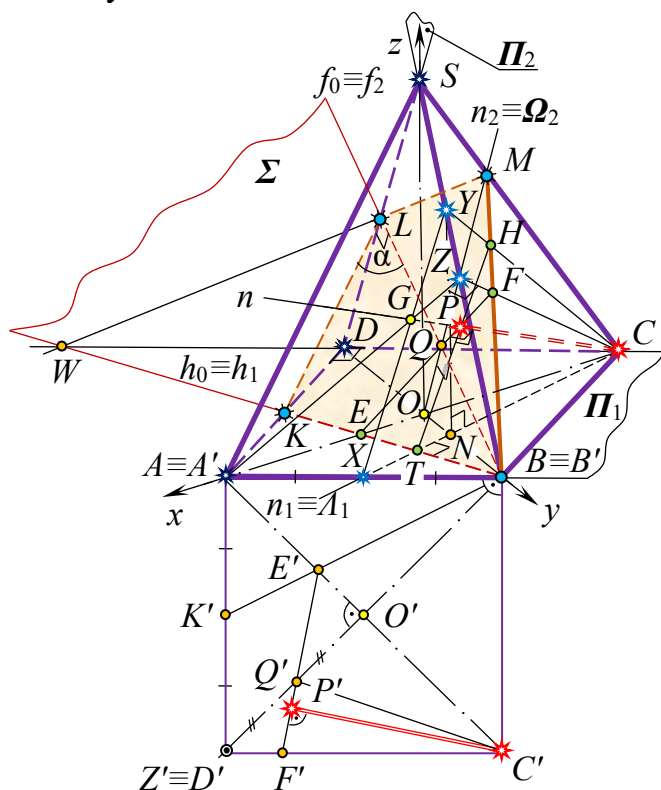


Рис. 1.79

Неважко помітити, що $\angle BLK = \alpha$ якраз і є зображенням градусної міри кута між мимобіжними прямими SA та BL . Урахувавши, що трикутник BLK уже володіє статусом метрично розмірного $\left(LK = \frac{\sqrt{2}}{2}, BL = \sqrt{\frac{3}{2}}, BK = \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ та

скориставшись теоремою косинусів, знаходимо: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \alpha \cong 64^\circ 40'$.

Як і в попередніх випадках, в якості пари площин проєкцій внутрішнього ортогонального проєкціювання зручно обрати площину основи піраміди $\Pi_1(ABCD)$ і площину її осьового перерізу $\Pi_2(SBD)$, адже першій із них (Π_1) належить і точка C , яка фігурує в умові задачі, і нуль-горизонталь ($h_0 \equiv BK$) площини перерізу $\Sigma(BLK)$, а друга (Π_2) вміщує нуль-фронталь тієї ж січної площини.

Отже, маємо: $h_1 \equiv h_0$ і $f_2 \equiv f_0$; $C_1 \equiv C$ і $C_2 \equiv O$. З'єднавши точку $C_1 \equiv C$ із серединою X відрізка AB ($AX = XB$), одержимо горизонтальну проєкцію n_1 перпендикуляра ($CX \perp BK$, оскільки $AK = KD$); вертикальну його проєкцію n_2 проведемо через точку C_2 , паралельно SD ($SD \perp BL \equiv f_2$). Як ми вже вище не однократно зауважували, зображення перпендикуляра n на картинній площині однозначно визначається двома своїми проєкціями n_1 і n_2 . Тепер, добре відпрацьованим прийомом, почергово, в перетині горизонтально проєкціювальної площини перпендикуляра Λ ($\Lambda_1 \equiv n_1$) і його вертикально проєкціювальної площини Ω ($\Omega_2 \equiv n_2$) із пірамідою $SABCD$ та з її перерізом $BKLM$, будуємо відповідно: 1) трикутник XYC і відрізок TH ; 2) трикутник AZC і відрізок EF . У власному перетині відрізки TH і EF висікають точку P – основу шуканого перпендикуляра n . Відрізок CP зображає відстань від точки C до площини перерізу $\Sigma(BLK)$. Цим **побудовний** етап задачі завершено. Його визначальним результатом потрібно вважати побудову трикутників XYC і AZC та належних їм відрізків TH і EF , до кожного з яких промінь $CP \equiv n$ розміщений перпендикулярно.

Щоб так само переконливо і просто провести етап **обчислень**, уявимо собі відрізок CP висотою деякого трикутника, який формально легко розв'язується і обов'язково має основу на відрізку EF (чи TH). Із цим розглянемо, приміром, трикутник AZC . Він рівнобедрений, що очевидно ($AZ = ZC$) і прямокутний ($\angle Z = 90^\circ$, оскільки $OZ = \frac{1}{2}DS = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Для кращого уявлення міжелементних співвідношень та зв'язків, сумістимо з картинною площиною спочатку квадрат $ABCD$ (вісь AB), а потім трикутник AZC (вісь $A'C'$). Очевидно, що трикутники $A'D'C'$ і $A'Z'C'$ після суміщення зливаються, а точка $Q' = O'Z' \cap B'L'$ розділяє відрізок $O'Z'$ навпіл, тому відшукування оригінального відрізка EF ($E'F'$) не викликає сумнівів. Отже, $C'P'$ – висота метрично розмірного трикутника $C'Q'E'$, в якому: $C'O' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $O'E' = \frac{1}{3}O'A' = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $O'Q' = \frac{1}{2}O'Z' = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Звідси знаходимо всі потрібні нам сторони трикутника: $C'E' = C'O' + O'E' = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $E'Q' = \sqrt{(O'E')^2 + (O'Q')^2} = \frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{2}}$; $C'Q' = \sqrt{(C'O')^2 + (O'Q')^2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Тепер, ввівши позначення: $Q'P' = x$, із прямокутних трикутників $C'P'Q'$ і $C'P'E'$, скориставшись до діла теоремою Піфагора, знаходимо: $(C'P')^2 = (C'Q')^2 - (Q'P')^2$, $(C'P')^2 = (C'E')^2 - (E'P')^2$, де $E'P' = E'Q' + Q'P'$. Отже, $\frac{5}{8} - x^2 = \frac{8}{9} - \left(\frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{2}} + x\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{13}}$ і $C'P' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$. Задачу розв'язано.

Досвідчений учитель (чи студент) може (задля забаганки) обчислити довжину відрізка $C'P'$ векторно-координатним методом, віднісши піраміду до прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ як це показано на рисунку. Безсумнівно, в останньому варіанті побудовний етап нівелюється, що у процесі навчання геометрично мало привабливо.

Задача 8. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ висота SO_1 рівна діагоналі основи. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка містить пряму DF і перпендикулярна грані SBC , якщо точка F належить ребру SB і $BF : FS = 7 : 10$.

Обґрунтуйте самостійно метричну визначеність проєкційного креслення правильної чотирикутної піраміди.

Визначальним дійством у побудові при закономірному зображенні фігури перерізу піраміди зумовленою площиною, ключем до встановлення результату слід вважати проведення перпендикуляра DP_0 з вершини D на площину Σ грані SBC (рис. 1.80). Розпочинати побудовні операції відразу із залученням до них точки D дещо незручно, оскільки промінь DP_0 розташовується за межами піраміди $SABCD$, що очевидно. Простіше опустити спочатку перпендикуляр MP на грань SBC , скажімо, з точки M , яка ділить ребро AD в основі піраміди навпіл, а потім через точку D провести пряму, паралельну MP , і на ній певним чином виділити відрізок DP_0 , рівний MP .

Побудуємо у площині симетрії піраміди її осьовий переріз SMN . Немає сумнівів, що основа (точка P) шуканого перпендикуляра MP лежатиме на відрізку SN – апофемі грані SBC , адже крім указаної перпендикулярності ($MP \perp SN$), згідно з теоремою про три перпендикуляри, ще й $MP \perp BC$.

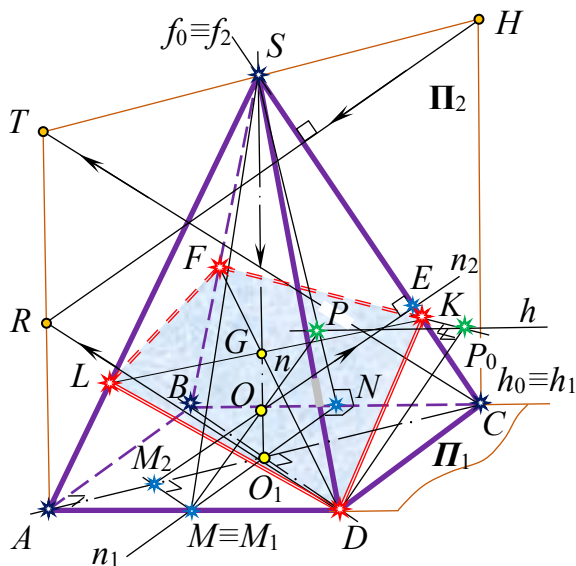


Рис. 1.80

Нехай квадрат $ABCD$ визначає на кресленні горизонтальну площину проєкцій Π_1 , а трикутник SAC – фронтальну площину проєкцій Π_2 . При цьому $M \in \Pi_1$ і $M_1 \equiv M$, а M_2 є ортогональною проєкцією точки M на площину проєкцій Π_2 за напрямом $D \rightarrow B$ ($MM_2 \parallel DB$), оскільки діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні. Роль нуль-горизонталі площини $\Sigma(SBC)$ виконує ребро BC ($h_0 \equiv h_1 \equiv BC$), а роль нуль-фронталі – ребро SC ($f_0 \equiv f_2 \equiv SC$).

Зараз опустимо перпендикуляр n із точки M на площину $\Sigma(SBC)$, який, як відомо, визначатиметься на моделі двома своїми проєкціями n_1 і n_2 у площинах проєкцій Π_1 і Π_2 відповідно. Оскільки $M_1 \equiv M$, а пряма n_1 обов'язково інцидентна точці M_1 і $MN \perp BC$ ($MN \parallel AB$), то n_1 уже рисунково визначено прямою MN ($n_1 \equiv MN$). Фронтальну проєкцію перпендикуляра n_2 будуємо у квадраті $AGHC$, задавши за відомою схемою потрібну нам пару спряжених

напрямів SC і RH та провівши пряму ($M_2E \equiv n_2$) $\parallel RH$. Суттєво, що перпендикуляр n в оригіналі, про що ми вже вели мову раніше, належить осьовому перерізу SMN ($MN \equiv n_1$ – його ортогональна проєкція на Π_1), тому він обов'язково перетинає вісь піраміди SO_1 у деякій точці O . Але ж площина проєкцій Π_2 теж містить SO_1 , а отже n перетинає Π_2 в точці O , яка є точкою перетину n_2 і SO_1 . Таким чином, $MO \equiv n$ й буде шуканим перпендикуляром, проведеним до площини Σ із точки M . Далі фіксуємо точку P перетину n (MO) з апофемою SN задньої грані піраміди. Потім через точку P проводимо горизонталь h у грані SBC ($h \parallel h_0$), а через точку D – пряму, паралельну n , до перетину з h у точці P_0 . Очевидно, що відрізок $DP_0 = MP$ є ще одним перпендикуляром до площини Σ , однак тепер уже проведеним із точки D .

Переріз $FKDL$ піраміди площиною $\Lambda(FDP_0)$ будемо елементарно комбінованим методом: точку K знаходимо за допомогою сліду FP_0 січної площини на грані SBC , а точку L – внутрішнім проєкціюванням на площину основи заданого багатогранника із залученням до справи проєкціювального променя SO_1 : 1) $DF \cap SO_1 = G$; 2) $KG \cap SA = L$.

Як у багатьох задачах, що розглянуті вище, знову пропонуємо вчителю чи студенту *методом розгортки знайти істинну форму чотирикутника перерізу $FKDL$ і обчислити, наприклад, відстань від вершини піраміди S до площини перерізу Λ , якщо ребро в її основі рівне одиниці*. Цим, узагалі-то, ми ще раз подаємо приклад підсилення й унаочнення пропозицій стереометрії, формулюючи в такий простий спосіб задачі комплексного характеру.

Задача 9. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ через вершину B_1 проведено площину, перпендикулярну діагоналі CA_1 бічної грані AA_1C_1C . Знайдіть площу фігури перерізу, якщо $AB = 2a$, $AA_1 = a$.

1-й спосіб розв'язання. Площину Σ , яка вміщує точку B_1 і завідомо перпендикулярна CA_1 (рис. 1.81), потрібно задавати двома прямими m і n , перпендикулярними CA_1 і мимобіжними з нею.

Аналізуючи умову задачі та рисунок до неї, помічаємо, що CA_1 є похилою до площини основи призми, яка задана рівностороннім трикутником $A_1B_1C_1$, а C_1A_1 – її проєкцією на цю площину за напрямом $C \rightarrow C_1$. Якщо $B_1M_1 \equiv n$ – медіана трикутника $A_1B_1C_1$, то $n \perp C_1A_1$, а отже, згідно з узагальненою теоремою про три перпендикуляри, $n \perp CA_1$. Далі міркуємо аналогічно: CA_1 є похилою до бічної грані BB_1A_1A , а A_1P ($P \mid AP = PB$) – ортогональна проєкція CA_1 на вказану грань за напрямом $C \rightarrow P$. Оскільки прямокутник BB_1A_1A має виміри $BB_1 = a$ і $BA = 2a$, то $B_1P \equiv m \perp A_1P$ (див. винесене креслення, рис. 1.81, б), а тому, за уже згаданою щойно теоремою, $m \perp CA_1$.

Таким чином, із посиланнями до логіки міркувань і доречних тверджень стереометрії, шукану площину $\Sigma(m \cap n)$ побудовано. Вона перетинає призму по чотирикутнику – прямокутній трапеції PQM_1B_1 , адже $\angle B_1M_1Q = 90^\circ$, а $PQ \parallel B_1M_1$ за властивістю паралельних площин (див. [15], §2, п.12).

Відомо, що $S_{PQM_1B_1} = \frac{B_1M_1 + PQ}{2} \cdot M_1Q$ (*), де $B_1M_1 = a\sqrt{3}$, а $PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (середня

лінія трикутника BMA), $M_1Q = \sqrt{M_1M^2 + MQ^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Остаточно одержимо таке:
 $S_{PQM_1B_1} = \frac{3\sqrt{15}}{8} a^2 (**)$.

Тепер варто **геометрично підсилити** задачу: У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$, зі стороною основи $2a$ і висотою a , через вершину B_1 провести площину, перпендикулярну діагоналі CA_1 бічної грані AA_1C_1C . Побудувати переріз призми площиною; встановити форму та обчислити площу фігури перерізу двома способами: 1) як функцію параметра a ; 2) за довідниковою формулою (безпосередніми замірюваннями з рисунка). Порівняти результати. Побудувати розгортку одного із двох «кусків» призми, склеїти модель.

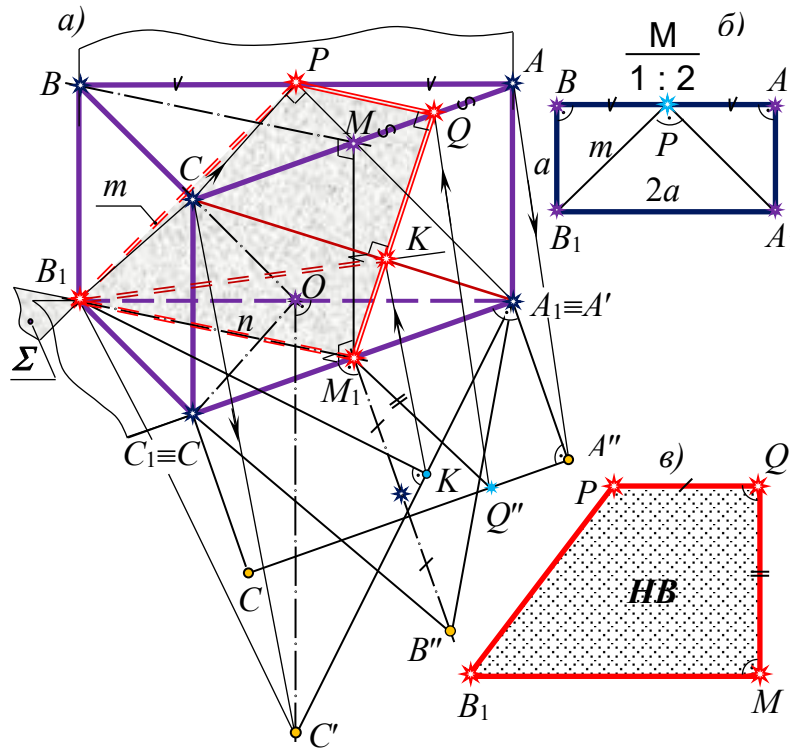


Рис. 1.81

На рисунку 1.81, а показано також графоаналітичний метод проведення перпендикуляра з точки B_1 на діагональ правої грані CA_1 . Трикутник CB_1A_1 є рівнобедреним ($CB_1 = CA_1 = a\sqrt{5}$), що очевидно. Якщо точка O є такою, що $B_1O = OA_1$, то $CO \perp B_1A_1$ і $CO = 2a$. Перемістимо рухом у просторі призму так, щоб ребро B_1A_1 «лягло» на картинну площину ($B_1A_1 = 2a$) і, методом суміщення, «покладемо» на цю ж площину ще й точку C (трикутник $B_1C'A_1$ – оригінальний за формою). Будуємо спочатку точку K' ($B_1K' \perp C'A_1$), а потім і точку K ($K'K \parallel C'C$). Матимемо $B_1K \perp CA_1$. За зображенням точки K просто будуємо трапецію в перерізі призми січною площиною.

Щоб за відомим відрізком $C_1A_1 = 2a$ одержати трапецію B_1M_1QP у натуральну величину, потрібно виконати ще два суміщення зі спільною віссю $C_1A_1 \equiv C'A_1'$: трикутника $B_1C_1A_1$ (див. трикутник $B''_1C_1A_1$) і прямокутника CC_1A_1A (див. прямокутник $C''C_1A_1A''$). Саме з них «знімаємо» справжні розміри основ і висоти трапеції та на винесеному кресленні зображаємо її в оригінальному вигляді (див. рис. 1.81, в).

Подаємо заміри і обчислення, виконані в системі автоматизованого проектування «КОМПАС 3D-LT v.10» комп'ютером: $C_1'A_1' = 2a = 62,6258$ мм; $B_1M_1 = M_1B''_1 = 54,2356$ мм; $PQ = \frac{M_1B''_1}{2} = 27,1178$ мм; $M_1Q = M_1Q'' = 35,0089$ мм. Підрахунки за формулами (*) і (**) дають результат: $S_{PQM_1B_1} = 1424,0465$ мм², $S_{PQM_1B_1} = 1424,0442$ мм² відповідно. Абсолютна похибка суто практичних випробувань складає $0,0023$ мм², а відносна – $1,545 \cdot 10^{-6}$ %.

2-й спосіб розв'язання. У проведенні через вершину призми B_1 площини, перпендикулярної діагоналі правої грані CA_1 , можна міркувати й по іншому. А саме, виберемо площину основи призми $\Pi_1(A_1B_1C_1)$ і площину її бічної грані $\Pi_2(AA_1B_1B)$ за пару площин проєкцій внутрішнього подвійного ортогонального проєкціювання. Тоді точка B_1 зливається зі своїми ортогональними проєкціями на Π_1 і Π_2 за напрямками проєкціювання $A \rightarrow A_1$ і $C \rightarrow P$ відповідно. A_1C_1 – горизонтальна проєкція діагоналі A_1C , а A_1P – її фронтальна проєкція. Площину, перпендикулярну A_1C і таку, яка вміщує точку B_1 , задаємо нульовими лініями рівня: $h_0 \equiv n$, $f_0 \equiv m$. При цьому $h_0 \perp A_1C_1$, а $f_0 \perp A_1P$. Решта міркувань аналогічні вже наведеним вище.

Додаток: стислі резюме, методичні рекомендації

Один із відомих (у минулому) педагогів-геометрів написав у математичному за змістом журналі цікаву статтю «Чи потрібна школі ХХІ століття геометрія?», яка розпочинається словами: «Розвиваючи думку А. Пуанкаре, висловлену ним на початку ХХ століття («Не було б у природі твердих тіл, не було б і геометрії»), роблячи її в деякому розумінні абсурдною, інший математик у кінці того ж століття говорить: «Математика – це частина фізики». Погоджуючись з цією формулою, мені хотілося б усе ж таки її продовжити: «А фізика – частина геометрії».

Цікава думка. Очевидно, що тут ми спостерігаємо щире вболівання за місце геометрії в освіті, розуміння її ролі в особистісному розвитку людини й суспільства в цілому. Стаття переконує читача в тому, що саме геометрія є «найпершою з наук», «вітаміном для мозку» в навчанні кожної дитини. Глибоко осмислюючи суть питання і реалії в його сучасній постановці, автор щиро наголошує: «Воістину, сучасна цивілізація – це Цивілізація Геометрії».

В опануванні геометрії неocenенну роль відіграють задачі. Вони є матеріалом, плідно працюючи з яким мотивується введення нових понять, доведення теорем, учні діяльнісно ведуть підготовку до вивчення ознак і властивостей фігур, закріплюють нові закономірні твердження, набувають практичних навичок реально використовувати вже здобуті знання. Шкода, але вчителю не вистачає адекватної сучасним вимогам типології шкільних геометричних задач, які дозволили б організовувати навчання учнів так, щоб кожен з них ефективно набирался досвіду розвивальної творчості з ухилом на практицизм. Більшість задач, які сформульовані в навчальних посібниках, такі, що школярі при їх розв'язуванні працюють винятково на рівні відтворення стереотипів, за зразком або ж відомою формулою, без конче необхідного з'ясування загальних способів діяльності та виявлення оптимальних шляхів до результату, без формування аналізом в уявленнях необхідних образів, зв'язків між елементами фігур, без системного входження в діяльність творчо-розвивального характеру. Переважають завдання (задачі), зорієнтовані на відпрацювання формальних, а не змістових сторін матеріалу, що вивчається. Вони

часто-густо не розкривають суто геометричного змісту сформульованої пропозиції, а лише, переважно, вчать працювати за примітивним алгоритмом дій в один-два кроки.

Розділ, який ми завершуємо, насичений в основному задачним матеріалом. Тут розкрито прийоми ефективного моделювання різнохарактерних і різного ступеня складності пропозицій метричного змісту, в яких пріоритети свідомо делеговані графічним і графоаналітичним способам оперування перед обчислювальними. Дякуючи цьому підходу, зростає варіативність методів розв'язання однієї й тієї задачі, кожна з яких припускає загально-геометричний варіант дій, оптимальний та візуально найбільш привабливий шлях до результату. До того ж, згідно з останніми психологічними дослідженнями, традиційне, звичне для ЗЗСО формально-логічне мислення віддалене від творчого на відчутно більшу відстань, ніж наочно-образне мислення, котре характеризується багатообразністю та симультанністю. Надання належної уваги наочно-образному мисленню в аудиторних умовах, у середовищі всіх учасників освітнього процесу, дозволить успішно розвивати творчі здібності, інтуїцію, «бачення розумом» просторових ситуацій не лише у «правопівкульних» особистостей, але й також у «лівопівкульних логіків».

У науково-методичній літературі, підручниках уявлювано-динамічна операція внутрішнього проєкціювання, як основна діяльнісна складова однойменного методу розв'язування стереометричних задач, не афішується. Хоч і трапляється, що деякі автори посібників в окремих випадках усе ж удаються до такого оригінального і результативного наочно-образного дійства.

У класичному тлумаченні «метод» (від давньогрецького «μέθοδος» – шлях дослідження чи пізнання) – це *спосіб* досягнення цілі, сукупність *прийомів* або ж *операцій* пізнання дійсності. В геометрії, в науці в цілому під методом розуміють систематизовану сукупність кроків, дій, які необхідно здійснити, щоб розв'язати певну задачу (клас задач) або досягти певних цілей. Чи підпадає під таку дефініцію те, що ми називаємо методом внутрішнього проєкціювання? Звичайно ж, цілком підпадає. Єдина вимога, до якої потрібно щоразу підходити творчо, орієнтуючись на результат, то це виважено, розумно, ситуаційно вдало обирати площину (площини) проєкцій і напрям (напрями) внутрішнього проєкціювання.

Потрібно чітко розрізняти: *метод внутрішнього проєкціювання на одну площину проєкцій та метод внутрішнього ортогонального проєкціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій*. Вони, за своєю природою, неперівиняні.

Що стосується першого методу, то в ньому можна вдаватися до проєкціювання як косокутного, так і, зокрема, ортогонального. Тут суть важливо, щоб після такого дійства задача за рівнем складності стала помітно простішою та, дякуючи досвіду виконавця, набула статусу «відомої» чи «очевидно розв'язуваної». Для цього надто важливо операцією проєкціювання деякі «активні» елементи конструкції, задіяні до розв'язання, свідомо перевести із загального розташування в частинне, а потім скористатися збиральною властивістю вироджених проєкцій прямих і площин. Тобто, спочатку задача розв'язується у створеному нами спрощеному варіанті візуального представлення ситуації на введеній у розгляд площині (як правило, загального розташування), а потім, завдяки професійно реалізованому на моделі оберненому проєкціюванню, одержують озвучений умовою просторовий результат. Наведений у тексті перелік уже розв'язаних нами різнохарактерних задач на побудову, доведення та обчислення переконливо свідчить на користь цього методу.

У певних навчальних посібниках для ЗВО, які вже давно набули статусу «класичних», його авторами – провідниками ідеї конструктивізму в геометрії,

наголошується, що в аксонометричних проєкціях деякі геометричні побудови, як-от: **проведення взаємно перпендикулярних ліній**, ділення кутів, побудова кіл і багатокутників за заданими розмірами і т. п., можливо робити безпосередньо лише в тому випадку, коли ці фігури проєкціюються на площину аксонометричних проєкцій без спотворення. За всіх інших розташувань фігур безпосереднє виконання вищезгаданих побудов стає неможливим і доводиться удаватися до допоміжних прийомів. Таким допоміжним прийомом може бути або добре відомий метод суміщення із площиною креслення, або метод додаткових проєкцій на площини, перпендикулярні картинній площині (у прямокутній аксонометрії), за умов, що аксонометричні осі зображені, а коефіцієнти спотворення вздовж кожної з них задані.

Ми піддали сумніву категоричність такого твердження. Й не безпідставно, адже всім відомо, що проведення прямих і площин, перпендикулярних даним прямим і площинам, є вихідними і найбільш важливими операціями метричної геометрії. Якраз ці дії уособлюють дві основні метричні задачі. Крім того, мова йде не лише про правильні й наочні, але і позиційно та метрично визначені проєкційні креслення.

Справді, якщо вміло скористатися ознакою перпендикулярності прямої і площини та теоремою про проєкціювання прямого кута, то просто доводиться (в уявленнях) третій наслідок з ОТМ «Про перпендикулярність прямої і площини в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій», який ми назвали теоремою-наслідком. Саме цей факт дозволяє на метрично визначених зображеннях стереометричних тіл здійснювати строге моделювання прямих і площин, перпендикулярних уже даним прямим і площинам, без використання спеціальних побудовних прийомів. Тут, знову ж таки, лише потрібно мати належно розвинене наочно-образне мислення, знання всіх геометричних фактів і творчо, осмислено обирати пару площин проєкцій та відповідних їм напрямів внутрішнього ортогонального проєкціювання. Достатньо значущий за об'ємом і змістом перелік розв'язаних нами задач чітко демонструє сутність методу і діяльнісну схему його застосування.

Нагадаємо формулювання теореми-наслідку: «Пряма перпендикулярна площині в просторі тоді і лише тоді, коли горизонтальна проєкція прямої перпендикулярна горизонтальній проєкції горизонталі площини, а фронтальна проєкція цієї ж прямої перпендикулярна фронтальній проєкції фронталі площини».

Принципово важливо, що і перший, і другий методи внутрішнього проєкціювання переконливо пропагують конструктивний підхід до навчання геометрії. Це істинно розвивальна геометрія, як у плані використання геометричних понять і фактів, так і в особистісному зростанні того хто вчиться диво-предмету по справжньому. Найкраще пізнати методи можливо лише шляхом їх використання при розв'язуванні задач.

У відповідності до нині діючих державних програм із геометрії, пропонується намітити такий порядок включення в цей курс метричних задач на проєкційних кресленнях.

1. Задачі на зображення плоских фігур, довільно розташованих у просторі (див. [5, 8]).

2. Метричні задачі на моделювання багатокутників, багатогранників і круглих тіл та їх комбінації (див. [8]).

3. Задачі на прямі та площини, перпендикулярні даним прямим і площинам (див. [8]).

4. Задачі, що вимагають напруженої роботи просторового уявлення, методи внутрішнього проєкціювання (див. [8]).

Останній у цьому переліку клас задач включає в себе частково і, в першу чергу,

метричні побудови виключно на ненаочних зображеннях, зокрема, за методом лише ортогонального проєкціювання. Їх специфічну природу і доцільність використання в педагогічному процесі було чітко обґрунтовано відомими геометрами. Такі задачі бажано розв'язувати учням з добре розвиненими просторовими уявленнями і спроможними уявляти фігуру лише за умовою. Тут проєкційне креслення вибирається у формі мало наочній, що майже нічого не додає до умов задачі у просторовому уявленні розглядуваних фігур. Проте воно робить задачу конкретною, оскільки всі побудови виконуються над елементами, зображеннями на кресленні. Крім того, рисунок грає роль схеми, в якій послідовно фіксуються всі етапи і операції ходу розв'язання. При читанні умови задачі в кожного учня з'являється бажання виконати наочний рисунок, оскільки це може значно полегшити уявлення фігури і саме розв'язування задачі. Однак бажано, щоб учні спробували розв'язати задачу без такого наочного зображення і лише у випадку неуспіху можна дозволити звернутися до нього. Корисно також на прикладах показати, як нестача в наочності і, отже, в користуванні інтуїцією може бути замінена строгістю дедуктивних міркувань. Для цього потрібно за допомогою детального проведення умовиводів (без пропусків будь-яких логічних ланок) проробити весь шлях розв'язання задачі і прийти до неминучого висновку.

Варто додати таке. Вочевидь незвичні та, поряд із цим, доказово незаперечні правила-орієнтири дій стосовно кожної з чималенького переліку задач, які детально переосмислено та графічно реалізовано вище, переконливо свідчать, що *метод внутрішнього подвійного ортогонального проєкціювання* справді можна вважати загальним геометричним. Адже всі без винятку задачі на перпендикулярність прямих і площин розв'язано у просторі за відомими найбільш загальними алгоритмічними схемами та із застосуванням на проєкційному кресленні наслідку з теореми про проєкціювання прямого кута, яку недарма вважають основною теоремою метрики.

Ми певні, теорему про проєкціювання прямого кута, як і теорему-наслідок із неї, не слід сприймати пропозицією винятково нарисної геометрії, оскільки за формулюванням і внутрішнім змістом вона, як присутній метричний факт, цілком уписується в евклідову стереометрію ЗЗСО. Шлях, логіка її доведення передбачає лише добре розуміння питань, опрацьованих у темах на паралельність та перпендикулярність прямих і площин. Цим, до речі, можна було б з успіхом оперувати пропагуючи неабияку значимість відомих учням зі шкільного курсу аксіом, теорем та властивостей геометричних фігур для наступного обґрунтування нових стрижневих тверджень геометрії в цілому. Стосовно ж основної теореми метрики, потрібно завжди пам'ятати і той факт, що її прямими наслідками є також одне із двох конструктивних означень спільного перпендикуляра мимобіжних прямих та відома теорема про три перпендикуляри. Остання ж, як свідчить уже придбаний нами досвід, у практичній стереометрії має найширше застосування, й саме тому є обов'язковою до ретельного опрацювання та засвоєння суб'єктами освітрянського процесу.

Контрольні запитання

1. Як Ви розумієте практичний зміст термінів «геометризація» і «унаочнення» задач стереометрії?
2. Подайте покрокову схему динаміки дій у процесі реалізації на стереометричній моделі методу суміщення. Які перетворення простору використовуються при цьому?
3. Наведіть відоме зі школи формулювання теореми про три перпендикуляри. Де, в яких ситуаціях при розв'язуванні задач явно використовують цю теорему?
4. Сформулюйте узагальнену теорему про три перпендикуляри. У чому полягає

принципова різниця між указаними двома теоремами?

5. Чи існує зв'язок між теоремою про проєкціювання прямого кута та теоремою про три перпендикуляри?

6. Перерахуйте відомі Вам метричні характеристики куба.

7. Обґрунтуйте, як Ви уявляєте природу методу внутрішнього проєкціювання на одну площину проєкцій. Як, для яких цілей використовують цей метод?

8. Озвучте вербально, своїми словами правило-орієнтир методу внутрішнього проєкціювання. У чому проявляється творчий характер цього методу?

9. Пригадайте відомі Вам твердження шкільного курсу геометрії, в яких прямо чи опосередковано користуються ортогональним проєкціюванням.

10. Яким проєкціюванням користуються в геометрії ЗЗСО для побудови правильних і наочних зображень стереометричних тіл? Чим відрізняються креслення-картини від креслень-моделей?

11. Яку теорему називають основною теоремою метрики? Чому?

12. Сформулюйте теорему про перпендикулярність прямої і площини в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій.

13. Як наочно-образно, з лінійкою і циркулем у руках довести теорему-наслідок про перпендикулярність прямої і площини в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій?

14. Чому задачі на відшукування відстані від точки до прямої та відстані від точки до площини називають основними метричними?

15. Змодельуйте схематично в уявленнях просторові задачі на побудову прямих і площин, перпендикулярних даній прямій. У чому споріднені ці дві задачі?

16. Змодельуйте схематично в уявленнях просторові задачі на побудову прямих і площин, перпендикулярних даній площині. У чому споріднені ці дві задачі?

17. На проєкційному кресленні задано точку і пряму. Як можна через точку провести площину, перпендикулярну прямій?

18. На проєкційному кресленні задано точку і площину. Як можна через точку провести пряму, перпендикулярну площині?

19. Як на зображенні стереометричного тіла з будь-якої його точки опустити перпендикуляр на ребро чи деякий інший відрізок – елемент даного тіла?

20. Як на зображенні стереометричного тіла з будь-якої його точки опустити перпендикуляр на грань чи деякий переріз даного тіла?

21. Обґрунтуйте роль конструктивних задач у навчанні геометрії.

22. Чому дія внутрішнього проєкціювання покладена в основу однойменного методу розв'язування стереометричних задач метричного характеру?

23. Які Ви можете назвати переваги конструктивних методів розв'язування задач стереометрії над обчислювальними?

24. Назвіть психофізіологічні фактори наочності і образності в геометрії.

Тренувальні вправи і завдання

У задачах 1-12 пропонуємо студенту (учню) самотійно визначитися, які з них у розв'язанні потребують строгих посилань до методу внутрішнього проєкціювання, а які – до звичного встановлення майже очевидних внутрішніх взаємних розташувань геометричних фігур чи їх елементів та відповідних алгебричних взаємних виражень. Як можна геометризувати та унаочнити кожну із задач?

1. У правильній трикутній піраміді відношення площі бічної поверхні до площі основи дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

2. Пряма призма, в основі якої лежить чотирикутник із площею 36 дм^2 , перетнутий площиною. Перерізом призми є прямокутник зі сторонами 8 дм і 9 дм . Знайти кут нахилу площини перерізу до площини основи. Встановіть тип чотирикутника в основі призми; чи може останній бути квадратом?

3. Знайти відстань між діагоналлю куба та мимобіжним із нею бічним ребром, якщо ребро куба дорівнює a .

4. У вершині B до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC = 5 \text{ см}$, $BC = 6 \text{ см}$) проведено перпендикуляр BS , причому $BS = AB$. Знайти відстань та градусну міру кута між прямими AS і BC .

5. Дано пряму чотирикутну призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основі якої лежить ромб $ABCD$ зі стороною a і гострим кутом α ($\angle A = \alpha$). Висота призми дорівнює h . Точки K і P лежать на сторонах AB і AD відповідно, причому $\frac{AK}{AB} = \frac{AP}{AD} = \lambda$. O – точка перетину діагоналей призми. Через точки K , P і O проведено переріз призми. Знайдіть площу цього перерізу.

6. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро якого рівне a . Через діагональ AC грані $ABCD$ проведена площина, паралельна прямій BO_1 , де O_1 – центр грані $A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти площу одержаного перерізу та відстань між прямими BO_1 і AD_1 .

7. Пряма призма, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник із бічною стороною, рівною $3\sqrt{13} \text{ см}$, перетнута площиною, яка проходить через сторону основи і висікає в перерізі правильний трикутник, сторона якого дорівнює 12 см . Обчисліть кут між площиною перерізу і площиною основи призми, якщо одна із сторін (чи медіана) трикутника перерізу паралельна основі. Знайдіть відстань від основи заданого рівнобедреного трикутника до площини перерізу.

8. Основою піраміди служить прямокутник, площа якого рівна S . Дві бічні грані перпендикулярні площині основи, а дві інші нахилені до неї під кутами 30° і 60° . Знайти бічну поверхню піраміди та відстань між ребрами SC і AD .

9. Від заданої правильної чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ зі стороною основи 1 , відітнули дві рівновеликі піраміди $AA_1 B_1 D_1$ і $CC_1 B_1 D_1$. Багатогранник, що залишився, в перетині з діагональною площиною призми ($AA_1 C_1 C$) висікає рівнобедрений трикутник із кутом при вершині $AO_1 C$, рівний 2α . Знайти повну поверхню багатогранника $ABCDB_1 D_1$ та відстань між прямими CO_1 і AB .

10. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди рівна a , бічне ребро – $\sqrt{10}a/2$. Побудувати переріз піраміди площиною, яка ділить навпіл двогранний кут при основі; знайти оригінальну форму і обчислити площу фігури перерізу.

11. Точка M ділить навпіл ребро BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Побудуйте спільний перпендикуляр PQ діагоналі $A_1 B$ лівої грані куба і прямої (відрізка) $D_1 M$. Знайдіть довжину перпендикуляра PQ , якщо ребро куба дорівнює a .

12. У правильній чотирикутній піраміді, зі стороною основи a і висотою $1,5a$, через сторону основи перпендикулярно до протилежної бічної грані проведено площину.

1. Побудувати переріз піраміди площиною. **2. Встановити** форму фігури перерізу.

3. Побудувати (на цупкому папері) розгортку зрізаної піраміди і **виготовити** модель.

4. Площу фігури перерізу **обчислити** двома способами: **формально**, за виведеною формулою для S , як функцією параметра a ; **конструктивно**, скориставшись власноруч зробленими замірами на проєкційному рисунку довжин визначальних відрізків (із точністю до сотої долі сантиметра). **Порівняти** обчислювальний і графічний результати, **зробити** висновки.

13. Висота правильної трикутної піраміди рівна h . Знайти її повну поверхню, якщо площина, проведена через вершину основи піраміди перпендикулярно протилежній бічній грані, утворює з площиною основи кут 30° .

14. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 6, 8 і 10 см. Плоский переріз призми відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини більшого і середнього кутів основи, відрізки, рівні 12 см кожний, та нахилений до площини основи під кутом α ($\cos \alpha = \frac{4}{5}$). Знайти об'єм і площу повної поверхні зрізаної призми.

15. Сторона основи правильної трикутної піраміди рівна a , а площа її перерізу, що має форму квадрата, рівна m^2 . Знайдіть відношення бічної поверхні піраміди до площі основи. (Порівняйте з уже розв'язаними задачами).

16. Знайдіть довжину діагоналі AC_1 правильної 4-кутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ зі стороною основи 5, якщо відомо, що довжина спільного перпендикуляра між діагоналлю AC_1 та мимобіжним з нею ребром основи BC дорівнює 4.

17. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з відношенням ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$ через вершини B , C_1 і D проведено площину. На ребрі $A_1 D_1$ узято точку P . Опустіть перпендикуляр із точки P на площину $BC_1 D$, якщо $A_1 P : PB_1 = 1 : 2$.

18. В основі призми лежить рівносторонній трикутник ABC . Дві бічні грані призми – ромби зі спільним ребром AA_1 і гострим кутом 60° . Опустіть перпендикуляр із точки P , узятій на ребрі AA_1 , на діагональ BC_1 грані $BB_1 C_1 C$, якщо $AP : PA_1 = 1 : 1$.

19. У правильній чотирикутній піраміді з двогранним кутом при основі 75° через сторону основи проведено площину перерізу під кутом 45° до площини основи. Знайти відношення об'єму верхньої (зрізаної) частини піраміди до об'єму всієї піраміди.

20. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда з вимірами a (3), b (5) і c (7) в од. м. площиною, що перпендикулярна до діагоналі та проходить через її середину (одиниці виміру взяті довільно).

21. Через точку R діагоналі AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провести площину Σ , перпендикулярну цій діагоналі. Знайти площу фігури перерізу куба площиною Σ , якщо його ребро рівне одиниці, а $AR : RC_1 = 3 : 2$.

22. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, висота дорівнює 20. Знайдіть найкоротшу відстань між стороною основи і діагоналлю призми, які не перетинаються ([25], §5, задача 19).

23. Осьовий переріз циліндра – квадрат. Відрізок AB , який з'єднує точку A кола верхньої основи з точкою B кола нижньої основи циліндра, дорівнює $2\sqrt{2}$ і віддалений від осі циліндра на відстань 1. Знайти кут між прямою AB і площиною основи циліндра.

24. У правильній чотирикутній піраміді кут між суміжними бічними гранями дорівнює 2α . Знайти бічну поверхню піраміди, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює S .

25. Висота правильної трикутної піраміди рівна H . Знайти її повну поверхню, якщо площина, проведена через вершину основи піраміди перпендикулярно протилежній бічній грані, складає із площиною основи кут 30° .

26. Дано зображення правильної трикутної піраміди $SABC$, сторона основи якої $AB = 1$, а висота трикутника основи (AF) складає $\frac{3}{4}$ висоти піраміди SO . На відрізок MN , що розташовується у грані SBC паралельно апофемі SF , задано таку точку P , що $SM : MC = 1 : 2$ і $MP : PN = 1 : 1$. Опустити перпендикуляр із точки P на ребро SA і знайти його довжину.

27. Основою прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є паралелограм із кутом BAD , рівним 60° . $A_1 B_1 : A_1 D_1 : AA_1 = 1 : 2 : 1$ і $A_1 B_1 = a$. Побудувати переріз

паралелепіеда площиною, яка проходить через точку O – середину діагоналі BD_1 – перпендикулярно до цієї діагоналі, і знайти площу фігури перерізу.

28. У правильній трикутній піраміді $SABC$ бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° . Із точки P , що належить грані SAB , опустити перпендикуляр PQ на іншу бічну грань піраміди SBC .

29. У правильній трикутній призмі, всі ребра якої рівні, побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох її бічних граней. Обчислити відстань між діагоналями, якщо ребро призми рівне 1.

30. На ребрах B_1C_1 , D_1E_1 і AF уже накресленої правильної п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, висота якої в півтора рази більша сторони основи, взято відповідно точки P , Q і R . Із вершини A_1 опустити перпендикуляр на площину перерізу Σ , задану трикутником PQR , якщо $C_1P : C_1B_1 = D_1Q : D_1E_1 = 1 : 4$ і $AR : AE = 1 : 3$.

31. На ребрах BC і A_1D_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взято відповідно точки P і Q такі, що $BP : BC = 2 : 3$ і $A_1Q : A_1D_1 = 1 : 3$. Побудувати переріз куба площиною, що проходить через пряму C_1D перпендикулярно площині Σ , що задана трикутником (APQ) .

32. У правильній трикутній піраміді $SABC$ бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45° . Через вершину A піраміди провести площину, перпендикулярну протилежній грані SBC і паралельну ребру BC . Знайти істинну форму і обчислити площу фігури перерізу, якщо довжина ребра AB дорівнює 1.

Дві останні (комплексні) задачі вже частково розв'язані. Уважно проаналізуйте подані до них рисунки, з'ясуйте котрі із завдань і за якими правилами-орієнтирами дій змодельовані авторами. Решту завдань реалізуйте самостійно. Дайте детальні обґрунтування візуальних наочно-образних випробувань і логічних міркувань.

33. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, гострий кут BAD якого дорівнює 60° (рис. 1.94). Бічне ребро SC перпендикулярне площині основи $ABCD$ і $AB : AD : SC = 1 : 2 : 3$. **1).** Опустіть перпендикуляр із вершини D на грань SAB і знайдіть його довжину, якщо $AB = 1$. **2).** Побудуйте перерізи піраміди двома площинами, які проходять через точку D перпендикулярно грані SAB ; окрім цього, одна із площин – перпендикулярна грані SBC , а іншу проведіть через точку X – середину ребра SC . **3).** Знайдіть справжню форму фігури перерізу піраміди першою із площин. **4).** Побудуйте спільний перпендикуляр прямих, визначених ребрами SA і DC .

34. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, гострий кут CBA якого рівний 45° . Бічне ребро SC перпендикулярне площині основи і $CB:BA:SC=1:2:3$. **1).** Опустіть перпендикуляр із вершини C на ребро SA . **2).** Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через вершину C перпендикулярно ребру SA . **3).** Знайдіть справжню форму фігури перерізу. **4).** Знайдіть градусну міру: **a)** кута нахилу ребра SA до площини основи піраміди; **б)** двогранного кута між площиною перерізу і основною площиною (рис. 1.95).

Приклади міркувань у покроковому моделюванні задач

13. Висота правильної трикутної піраміди рівна h . Знайти її повну поверхню, якщо площина, проведена через вершину основи піраміди перпендикулярно протилежній бічній грані, утворює з площиною основи кут 30° . (Порівняйте з № 25).

Найперше, проведемо аналіз умови задачі та рисунка 1.82 до неї. Оскільки переріз (CPQ) піраміди $SABC$ перпендикулярний до її бічної грані (SAB) , то у площині (CPQ) є хоча б одна пряма, перпендикулярна грані SAB (ознака перпендикулярності двох площин), тобто існує така пряма CM , що належить (CPQ) , котра перпендикулярна двом прямим, що перетинаються і лежать у грані SAB . Однією з таких прямих зручно обрати

апофему лівої грані SN в осьовому перерізі (SCN) піраміди. Інша із двох прямих пройде через точку M (основу перпендикуляра CM) паралельно ребру піраміди AB , оскільки, згідно із теоремою про три перпендикуляри, $CM \perp AB$, бо її проекція на площину (ABC) $CN \perp AB$ і, таким чином, $CM \perp PQ$.

Отже, якщо передбачається розв'язувати задачу на обчислення за **кресленням-картиною**, точку M на апофемі SN вибираємо будь-де, але так, щоб рисунок був якомога більш наочним. Далі через точку M проводимо відрізок $PQ \parallel AB$ та з'єднуємо точки P і Q з точкою C .

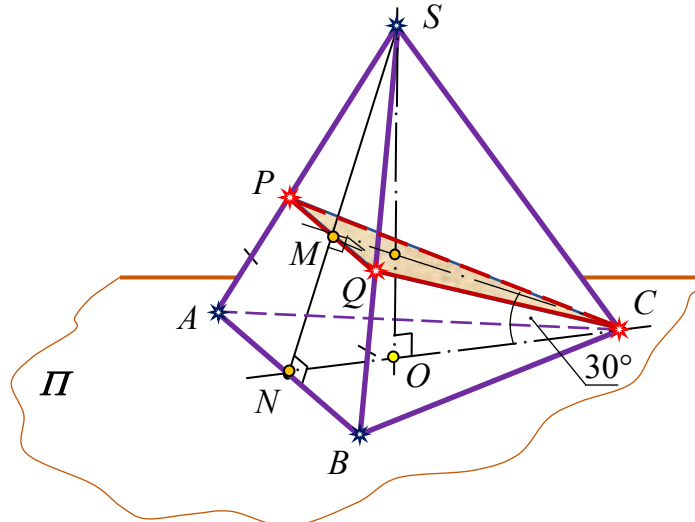


Рис. 1.82

Алгоритмічну схему розв'язання задачі резонно подавати шляхом аналітичних міркувань.

$$\text{Так, } S_{\Pi} = 3S_{\Delta SAB} + S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB(3SN + CN). \quad (*)$$

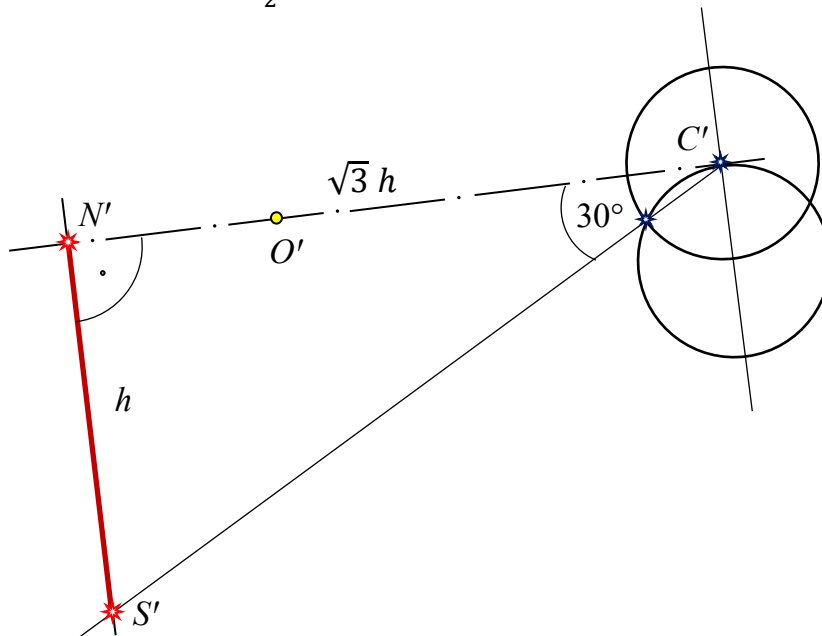


Рис. 1.83, а

Для вираження через h трьох установлених відрізків (AB , SN і CN), варто досить уважно подивитися на рисунок і зафіксувати факт подібності трикутників SON і CMN . Вони істинно подібні, оскільки один з катетів кожного трикутника перпендикулярний гіпотенузі іншого: $SO \perp CN$, а $CM \perp SN$. Скориставшись вихідними даними умови задачі та виконавши прості формальні перетворення, матимемо: $CN = \sqrt{3}h$, $AB = 2h$,

$SN = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. Підстановкою у формулу (*), отримаємо: $S_{\Pi} = 3\sqrt{3} h^2$. Задачу на обчислення розв'язано.

Тепер **геометризуємо** умову задачі, дещо підсиливши висновок і зумисне додавши її змісту конструктивізму та практицизму.

Правильна трикутна піраміда з висотою h перетнута площиною, що проходить через вершину основи піраміди і перпендикулярна протилежній бічній грані. Нахил площини перерізу до площини основи дорівнює 30° . 1) Побудуйте переріз піраміди даною площиною і обґрунтуйте його форму. 2) Знайдіть площу фігури перерізу обчислювально і побудовно, оцініть точність конструктивних операцій. 3) Побудуйте розгортку зрізаної піраміди й частини піраміди, яка прилягає до вершини і має в основі заданий переріз.

У такому формулюванні передбачається, що розв'язання задачі повинно вестися чи-то графічним, чи-то *графоаналітичним методом* на **кресленні-моделі**. Графоаналітичний метод допускає використання певних результатів, що отримані попередньо формально-логічним шляхом, а відповіді на поставлені у висновок умови задачі запитання потрібно подавати на картинній площині графічно у формі якісних зображень.

Зауважимо, що основним у прикладній геометрії є винятково графоаналітичний метод, який за умов ефективного використання ІКТ дозволяє різнохарактерні задачі науки і техніки алгоритмізувати і вирішувати в оптимальному режимі, зводячи до мінімуму фактичний розхід матеріалів і трудові затрати в часі.

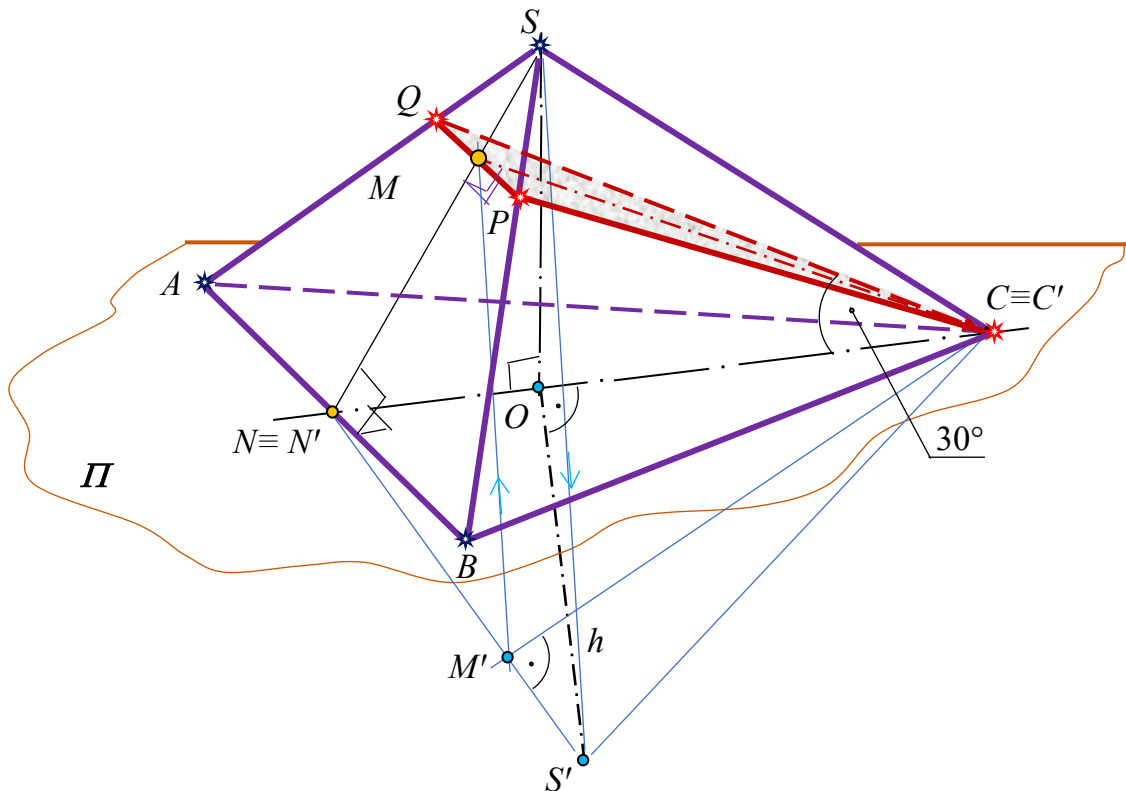


Рис. 1.83, б

1. Щоб вирішити перше завдання, варто скористатися результатами попередніх формально-аналітичних перетворень ($CN = \sqrt{3}h$, $AB = 2h$, $SN = \frac{2h}{\sqrt{3}}$) і методом обертання навколо прямої нульового рівня. Це означає, що в уявлених переміщеннях у просторі медіану $CN \equiv C'N'$ основи піраміди $SABC$ «кладемо» на площину зображень, яку приймаємо за вісь обертання, що вже є оригінальною за довжиною. Обертаючи

трикутник SCN (точка S), суміщаємо останній із площиною проєкційного креслення. Для цього, маючи довжину відрізка $CN = C'N' = \sqrt{3}h$, потрібно виразити зображенням істинну висоту h трикутника SNC , що й зроблено простим прийомом на рисунку 1.83, а. Подальший комплекс рисункових дій можна подати таким переліком (рис. 1.83, б): а) в центрі O' трикутника ABC' проводимо перпендикулярний до $C'N'$ промінь; б) відкладаємо на промені відрізок $O'S' = h$ (з рис. 1.83, а); в) з'єднуємо точку S' з кінцями C' і N' відрізка $C'N'$ ($S'C'N'$ – оригінальний осьовий переріз піраміди $SABC$); г) із точки C' опускаємо перпендикуляр $C'M'$ на сторону трикутника $S'N'$; д) ділимо точкою M' відрізок $S'N'$ у відношенні, в якому точка M' ділить відрізок $S'N'$; е) через точку M' ведемо відрізок $P'Q'$ паралельно стороні основи піраміди AB ; є) з'єднуємо точки P' і Q' з вершиною C' в основі піраміди.

Із очевидної рівності трикутників $Q'BC'$ і $P'AC'$ отримуємо, що $Q'C' = P'C'$, тобто трикутник $P'Q'C'$ рівнобедрений.

Переріз піраміди заданою площиною побудовано і встановлено його форму.

2. Для обчислення площі трикутника CPQ за формулою $S_{\Delta CPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot CM$, окрім уже відомих фактів ($AB = 2h$, $SN = \frac{2h}{\sqrt{3}}$, $CN = \sqrt{3}h$), варто долучити подібність трикутників SPQ і SAB . Тут $\frac{PQ}{AB} = \frac{SM}{SN}$, $SM = SN - MN$ ($MN = \frac{1}{2}CN$). Підставивши і обрахувавши, отримаємо: $PQ = \frac{h}{2}$. До того ж, із прямокутного трикутника CMN , $CM = CN \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2}h$. У результаті отримаємо, що $S_{\Delta CPQ} = \frac{3}{8}h^2$. (**)

Побудовного результату досягнемо, коли скористаємося рисунком 1.83, б, на якому трикутник $S'C'N'$ із висотою $C'M'$ трикутника $P'Q'C'$, що виродився у відрізок $C'M'$, уже зображено в натуральну величину. Отже, тепер достатньо ще одним рухом трикутник $P'Q'C'$ сумістити із площиною зображень, повернувши його на 90° навколо осі обертання, яка вміщує висоту $C'M'$ (рис. 1.84).

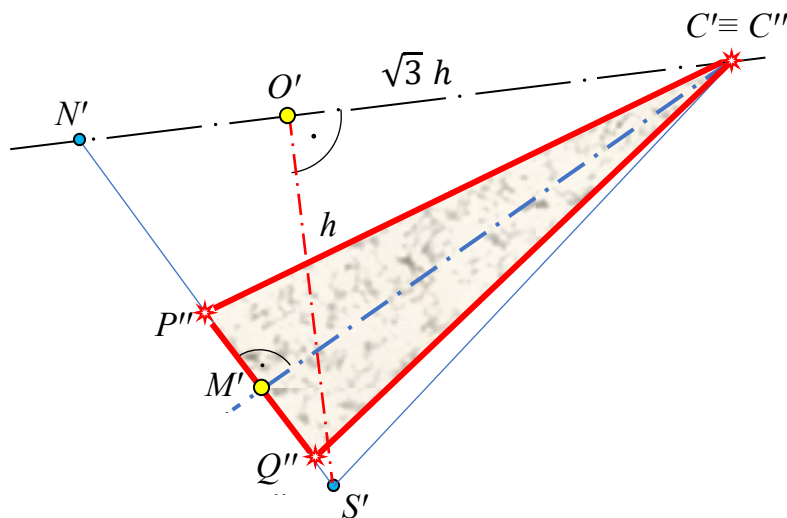


Рис. 1.84

Якщо (за замірами, з досить високим ступенем точності) довжина відрізка $S'O'$ дорівнює 4,87 од. м., то $P''Q'' = 2,435$ од. м.. У свою чергу, $C''M'' \cong 7,1$ од. м. Отже, площа трикутника-зображення рівна 8,644 кв. од. м. Підставивши значення h у формулу (**), отримаємо площу того ж трикутника, що виражається числом 8,894 кв. од. м., що вважатимемо істинним значенням шуканої площі. Отже, абсолютна похибка графічних операцій складає 0,25 кв. од. м, а відносна – 2,81%.

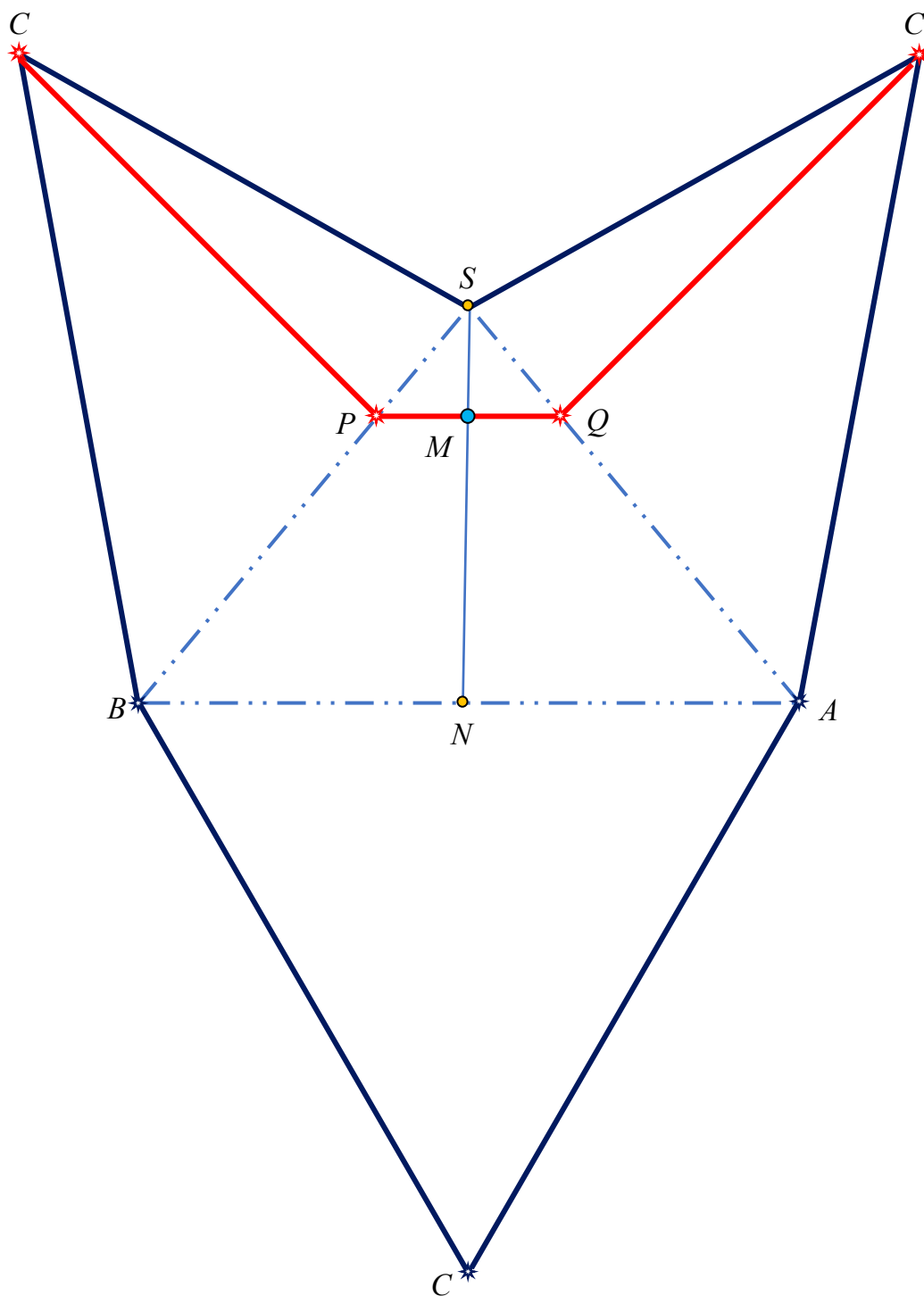


Рис. 1.85

3. Для виготовлення великогабаритних ємностей сільськогосподарського чи хімічного призначення, захисних кожухів верстатів, вентиляційних пристроїв, трубопроводів та багатьох інших виробів виникає потреба вирізати з листового матеріалу їх розгортки. **Розгорткою багатогранної поверхні** називають плоску фігуру, отриману в результаті послідовного суміщення з картинною площиною всіх граней багатогранника. Побудова розгортки включає в себе з'ясування натуральної величини кожної грані й послідовне їх розташування на площині. Розміри граней, якщо вони проєкціюються не в натуральну величину, знаходять способом обертання навколо нульової лінії рівня (суміщення) грані з площиною зображень.

У нашому випадку, щоб розгорнути зрізану піраміду і піраміду, в основі якої лежить трикутник перерізу, найбільш доречно побудувати розгортку всієї піраміди $SABC$ і на її зображенні у гранях вказати реальне місце розташування відповідних сторін трикутника CPQ . Річ у тім, що на рисунках 1.83, б і 1.84 уже є всі елементи такої розгортки, які, дякуючи виконаним перетворенням, метрично визначені (представлені в натуральну величину). Перерахуємо зображені на цих рисунках елементи піраміди, що обов'язкові в побудові розгортки методом триангуляції: а) бічне ребро $S'C'$; б) ребро основи $A'B' = 2h$ ($h = S'O'$); в) відстань від вершини піраміди S до основи трикутника перерізу PQ , що дорівнює $S'M'$; г) трикутник перерізу $P''Q''C''$ – істинний за формою і розмірами.

Отже, розрізаємо (в уявленнях) піраміду $SABC$ уздовж її ребер SC , AC і BC . Далі суміщаємо її бічні грані та грань основи з картинною площиною (рис. 1.85). Дану розгортку зовсім не важко розбити на дві складові, які цілком відповідали б пункту 3 умови задачі.

14. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 6, 8 і 10 од. м. Переріз призми нахилений до нижньої грані під кутом α ($\cos \alpha = \frac{4}{5}$) і відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини двох більших кутів основи, відрізки по 8 од. м. Знайти об'єм, площу повної поверхні та відстань від вершини нижньої основи призми C_1 до перерізу ABC .

Аналізуючи умову за кресленням-картиною (рис. 1.86), помічаємо, що в основі призми лежить прямокутний трикутник ($\angle B_1 = \angle L = 90^\circ$). Оскільки сторона перерізу AB розміщена перпендикулярно грані BB_1C_1C ($AB \perp B_1C_1$, $AB \perp BB_1$), то заданий кут між площиною перерізу та нижньою основою призми вимірюється лінійним кутом CBN ($\angle ABC = 90^\circ$, $(\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1)$).

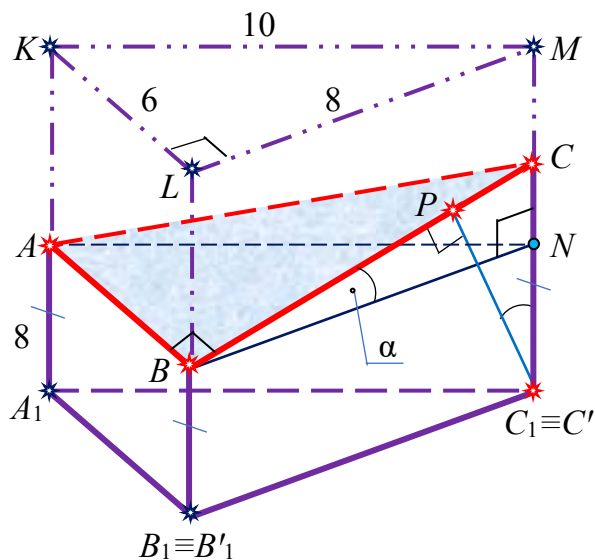


Рис. 1.86

Працюючи зі зрізаною призмою, в обчисленнях об'єму доречно розбити її на дві складові: пряму призму $ABNA_1B_1C_1$ і піраміду $CABN$. Так, $V_{ABNA_1B_1C_1} = 192$, а $V_{CABN} = 48$, що неважко підрахувати за відомими формулами. Остаточню для шуканого об'єму матимемо: $V_{\Pi} = 240$ (куб. од. м.).

Обчислюючи повну поверхню зрізаної призми, потрібно знайти площу кожної з бічних граней та площу основ, а саме: $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 24$, $S_{AA_1B_1B} = 48$, $S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta ABN}}{\cos \alpha} = 30$. Дві інші бічні грані, що мають форму прямокутних трапецій зі спільною основою CC_1 , де

$CC_1 = CN + NC_1$, а $NC_1 = 8$. Тут CN легко знаходимо із прямокутного трикутника CNB : $CN = NB \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6$. Отже, маємо $CC_1 = 14$, $S_{BB_1C_1C} = 88$, $S_{AA_1C_1C} = 110$. У сумі отримаємо такий результат: $S_{\Pi} = 300$ (кв. од. м.).

Відстань від вершини призми C_1 до зрізу ABC потрібно шукати в площині грані BB_1C_1C , оскільки шуканий відрізок C_1P перпендикулярний двом прямим AB і BC цього перерізу. Трикутники BNC і C_1PC подібні – вони прямокутні з рівними гострими кутами при вершині B і C_1 відповідно. Отже, $BC : C_1C = BN : C_1M$. Звідси матимемо наступне: $C_1P = (C_1C \cdot BN) : BC = 11,2$ (од. м.).

Отже, задачу на обчислення, з ефективним використанням **креслення-картини**, розв'язано повністю.

Тепер **геометризуємо висновок** цієї задачі, додаючи конструктивізму та (хоч і не надто помітного) практицизму.

Отже: 1) Побудуйте переріз призми заданою площиною. 2) З'ясуйте форму і обчисліть площу фігури перерізу обчислювально й побудовно, знайдіть похибки виконаних побудовних операцій. 3) Розгорніть зрізану призму на картинну площину, склейте модель.

У цій ситуації, в пошуку відповідей на поставлені запитання, доречно було б скористатися графоаналітичним методом, який найбільш ефективний у конструктивній стереометрії практичного спрямування. Подаємо відповіді.

1. Побудувати вершину C трикутника перерізу ABC на бічному ребрі C_1M неважко, оскільки в прямокутному трикутнику CNB уже відомо, що протилежний куту α катет $CN = 6$ од. м. Тому точка C віддалена від точки N на відстань, що дорівнює три чверті відрізка C_1N .

2. Площу трикутника ABC обчислювально вже знайдено вище ($S_{\Delta ABC} = 30 \text{ см}^2$). Констатуємо також, що трикутник ABC прямокутний, оскільки його катет AB перпендикулярний грані BB_1C_1N (на чому раніше наголошувалося).

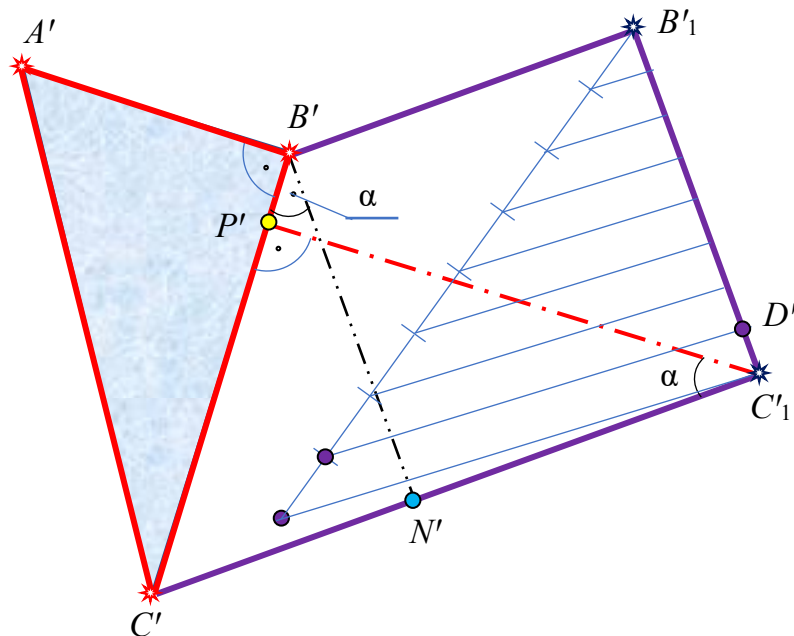


Рис. 1.87

Щоб якісно візуалізувати процес відшукування істинного розташування основи перпендикуляра P на відрізку BC , а також отримати в оригіналі площу трикутника ABC , потрібно, найперше, перемістити в уявленнях грань BB_1C_1C у просторі, поклавши її ребром B_1C_1 на картинну площину.

чином, розрізаємо призму $A'B'C'A_1B_1C_1$ уздовж ребер $A'A_1$, $A'B'$ і $A'C'$ та розгортаємо її поверхню на картинну площину (рис. 1.88).

15. Сторона основи правильної трикутної піраміди рівна a , а площа її перерізу, що має форму квадрата, рівна m^2 . Знайдіть відношення бічної поверхні піраміди до площі основи. (Порівняйте із уже розв'язаними вище задачами).

Розв'язуючи задачу обчислювально, найперше варто з'ясувати розташування відносно окремих елементів піраміди перерізу, що має форму квадрата.

Мислимо просто (рис. 1.89). У квадрата кожна з чотирьох сторін рівна m , протилежні сторони попарно паралельні, суміжні – перпендикулярні. Граней у трикутної піраміди теж чотири, які перетинаються уздовж її ребер. Проте, будь-яка третя площина висікає на двох інших площинах, які перетинаються по прямій лінії, дві прямі, паралельні лінії їх перетину. Звідси прямо випливає, що січна площина, поперше, перетинає всі грані піраміди та, по-друге, одна пара протилежних сторін квадрата паралельна, наприклад, ребру AB у гранях SAB і CAB , а друга – ребру SC у гранях SAC і SBC (можливі й інші два варіанти).

Таким чином, за умов оперування **кресленням-картиною** та розв'язуючи задачу обчислювально, надто важливо витримати на зображенні обумовлену паралельність сторін квадрата відповідним ребрам накресленої піраміди, його ж розташування (наприклад, точки P на апофемі SM) – не суть значимо.

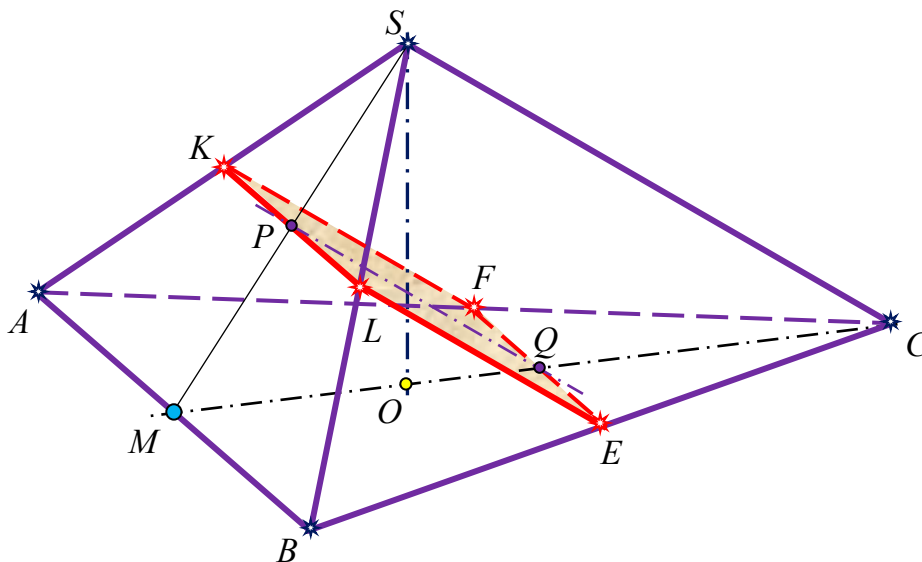


Рис. 1.89

Реалізуємо шлях пошуку результату аналітичним методом міркувань.

Бічна поверхня піраміди $S_6 = 3 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SM$, де $AB = a$, а SM слід виразити через a і m із прямокутного трикутника SMB . Площина квадрата $KLEF$ перетинає осевий переріз SMC уздовж відрізка $PQ \parallel SC$. Отже, трикутники SMC і PMQ подібні, тобто $\frac{SC}{PQ} = \frac{CM}{QM}$. З цього відношення можна знайти довжину бічного ребра піраміди. Але попередньо потрібно визначитися з місцем точки Q на медіані CM в основі піраміди SMC . Фіксуємо ще одну пару подібних трикутників: CFE і CAB . Тут $\frac{CQ}{CM} = \frac{FE}{AB}$, де $FE = m$, $AB = a$, а $CM = \frac{a}{2} \sqrt{3}$. Звідси $CQ = \frac{m}{2} \sqrt{3}$. Далі повертаємося до попередньої пропорції, де $QM = CM - CQ = \frac{\sqrt{3}}{2} (a - m)$, і знаходимо, що ребро $SC = \frac{am}{a-m}$. Скориставшись теоремою Піфагора, матимемо вираз для апофемі бічної грані піраміди $SM = \frac{a\sqrt{3m^2 - a^2 + 2am}}{2(a-m)}$ (*), і,

як результат, вираз для її бічної поверхні $S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3m^2-a^2+2am}}{4(a-m)}$. Площа основи піраміди

$$S_0 = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Поділивши бічну поверхню піраміди на площу її ж основи, остаточно отримаємо такий вираз: $\frac{S_6}{S_0} = \frac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}$ (**). Задачу обчислювального характеру розв'язано формально-логічно.

Геометризуємо висновок задачі, додавши конструктивізму.

Отже: 1) На вже готовому зображенні піраміди $SABC$ **побудуйте** її переріз у формі квадрата. 2) Розгорніть на картинну площину поверхню піраміди, нанесіть на розгортку лінію перерізу. 3) Оцініть точність виконаних конструктивних операцій у питанні відношення бічної поверхні піраміди до площі основи.

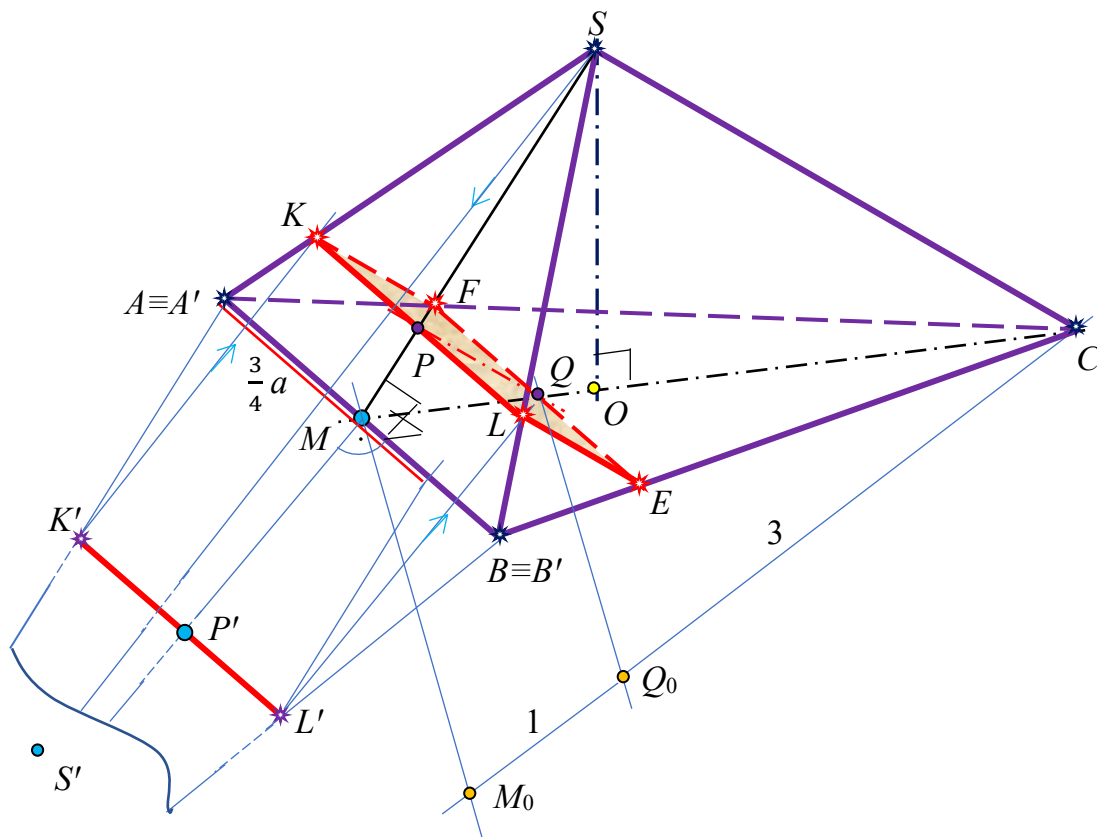


Рис. 1.90

Основним у розділі «Конструктивна геометрія» є відношення «побудувати геометричну фігуру». Тут мають місце загальна аксіоматика та аксіоми циркуля і лінійки, з яких компонується найпростіші та основні побудови. Фактично, аксіоми конструктивізму стосуються лише вказаного основного відношення і є, певною мірою, умовними, які впливають з базової аксіоматики геометрії та цілісної теорії, розбудованої дидактичним шляхом на визначеній системі аксіом. У середовищі загальних аксіом (з їх переліку) нам варто вирізнити одну: «Всяка, задана в умові задачі фігура, побудована».

У ситуації, яка склалася, будемо вважати, що відрізки a і m задані (накреслені) або ж, для конкретики, прийнемо, що відрізок m є частиною відрізка a (наприклад, $m = \frac{3}{4} a$, а відрізком a в оригіналі оберемо ребро основи $AB \equiv A'B'$). Це останнє означатиме, що переміщенням у просторі піраміду ребром AB уже «покладено» на картинну площину.

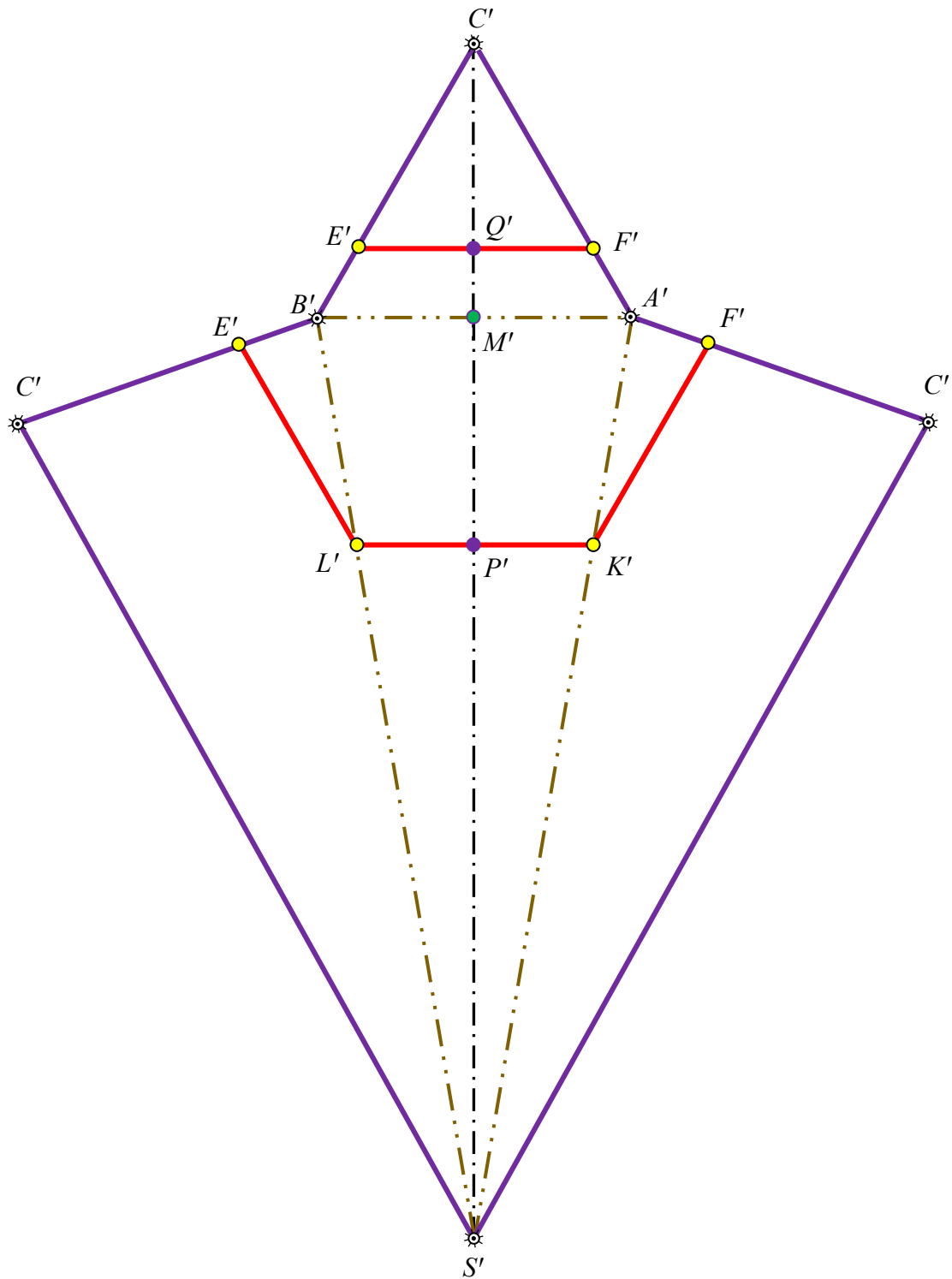


Рис. 1.91

1. Узявши до уваги попередньо виконані формально-аналітичні перетворення, переріз піраміди у формі квадрата можна побудувати двома способами (рис. 1.90). Вже встановлено, що $CQ = \frac{m}{2} \sqrt{3}$, а $QM = \frac{\sqrt{3}}{2} (a - m)$, тому $CQ : QM = m : (a - m)$. Скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки, замірявши довжину відрізка $AB \equiv A'B' = a = 4,8$ см та пам'ятаючи, що $m = \frac{3}{4} a$, вельми просто знаходимо на медіані SA основи піраміди ABC точку Q , яку вміщує сторона квадрата FE . Добудова до повного квадрата зрозуміла із попередніх міркувань.

Інший спосіб теж добре зрозумілий із рисунка. Тут бічна грань піраміди (точніше, точка S) методом суміщення «покладена» на площину зображень ($S \rightarrow S'$). Зроблено це з допомогою простої підстановки чисел $a = 4,8$ см, $m = 3,6$ см у вище отриману формулу (*), дякуючи чому підраховано (з досить високим ступенем точності) довжину апофеми бічної грані $SM = 14,195$ см. Такий підхід варто вважати більш прийнятним у нашій ситуації, адже отримано бічну грань піраміди в оригінальному вигляді, що тепер дозволяє без проблем побудувати її розгортку.

2. Розрізаємо (в уявленнях) піраміду $SABC$ уздовж ребер SC , CA і CB та розкладаємо методом тріангуляції грані стереометричного тіла на картинну площину (рис. 1.91). Розміри беремо прямо з рисунка ($A'B' = 4,8$ см, $M' \mid A'M' = M'B'$, $S'M' \perp A'B'$ і $S'M' = 14,195$ см). До речі, з подібності трикутників SMC і PMQ без особливих зусиль шукаємо оригінальну відстань від основи піраміди $A'B'$ до сторони квадрата $K'L'$ на грані $S'A'B'$: $M'P' = 3,55$ см.

3. Щодо оцінки точності виконаних побудовних операцій, то найперше підставляємо значення $a = 4,8$ см, $m = 3,6$ см у формулу (**), щоб отримати числове значення відношення бічної поверхні до площі основи піраміди. Приймаємо це значення в якості оригінального. Далі з рисунка 3 знімаємо шляхом якомога більш точного замірювання лінійкою потрібних розмірів для обчислення S_6 і S_6 та їх частки. Тоді відомим методом знаходимо абсолютну та відносну похибки конструктивізму, реалізованого власними зусиллями.

За потреби нескладно побудувати розгортку кожної окремо взятої складової піраміди, на які розбиває поверхню заданий переріз.

16. Знайдіть довжину діагоналі AC_1 правильної 4-кутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ зі стороною основи 5, якщо відомо, що довжина спільного перпендикуляра між цією діагоналлю та мимобіжним з нею ребром основи BC дорівнює 4 (див. задачу № 18).

Метод обчислювальний.

Зараз сформульовано традиційну в стереометрії задачу на обчислення. Розв'язуючи її на **кресленні-картині**, дозволяється на етапі виконання рисунка певні елементи побудов обирати, як на погляд авторів, довільно, але в допустимих межах (рис. 1.92).

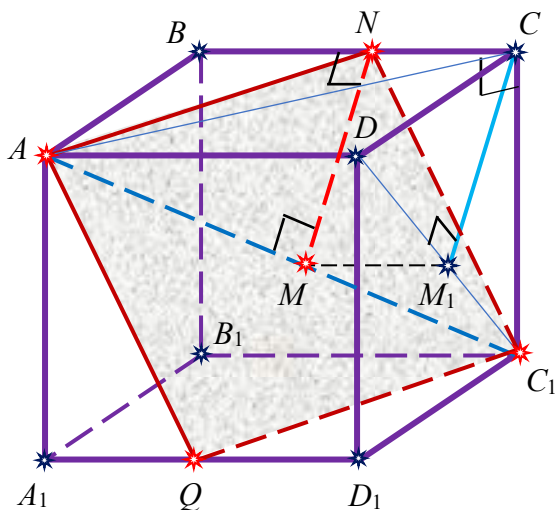


Рис. 1.92

конструюванні рисункових операцій цілком вичерпується.

На рисунку неважко помітити, що довжина діагоналі AC_1 стане відомою, якщо у прямокутному трикутнику ACC_1 знайдемо його катет CC_1 – бічне ребро призми.

Отже, маємо: 1) Із прямокутного трикутника DM_1C : $DM_1 = 3$. 2) У прямокутному трикутнику DCC_1 : $CM_1^2 = DM_1 \cdot M_1C_1$. Звідси $M_1C_1 = \frac{16}{3}$, $DC_1 = \frac{25}{3}$, а $CC_1 = \frac{20}{3}$. 3) Нарешті, у прямокутному трикутнику ACC_1 ($AC = 5\sqrt{2}$): $AC_1 = \frac{5\sqrt{34}}{3} \approx 9,72$ од. м.

Графічний спосіб розв'язання.

1. Уявимо собі, що ми призму тримаємо в руках і, переміщуючись у просторі, кладемо ребром D_1C_1 на картинну площину ($D_1C_1 = 5$ од. м. в оригіналі) (рис. 1.93).

2. Обертаючи прямокутник (грань) DCC_1D_1 навколо ребра нульового рівня D_1C_1 , суміщаємо його з площиною зображень ($D_1C_1D'C'$): а) на відрізку D_1C_1 (як на діаметрі) проводимо коло з радіусом R_1 ; б) розділимо D_1C_1 на п'ять рівних частин і з центром у точці D_1 радіусом $R_2 = 4$ од. м. проводимо ще одне коло; в) фіксуємо точку P перетину обох кіл; г) промінь C_1P у перетині з променем, що має початок у точці D_1 і перпендикулярний D_1C_1 , висікає точку D' – третю вершину оригінального прямокутника – грані призми; д) четверта вершина грані в оригіналі добудовується просто.

3. На відрізку C_1D' як на катеті будемо натуральної величини прямокутний трикутник $A'C_1C'$, в якого катет $A'C' = 5\sqrt{2}$, а гіпотенуза $A'C_1$ теж зображена в натуральну величину і (за наближеними замірами) рівна 9,8 од. м., що у порівнянні (9,72) дає невелику похибку, а саме: $9,8 - 9,72 = 0,08$; $\frac{0,08}{9,72} \cdot 100\% = 0,82\%$. Задачу розв'язано суто геометрично!

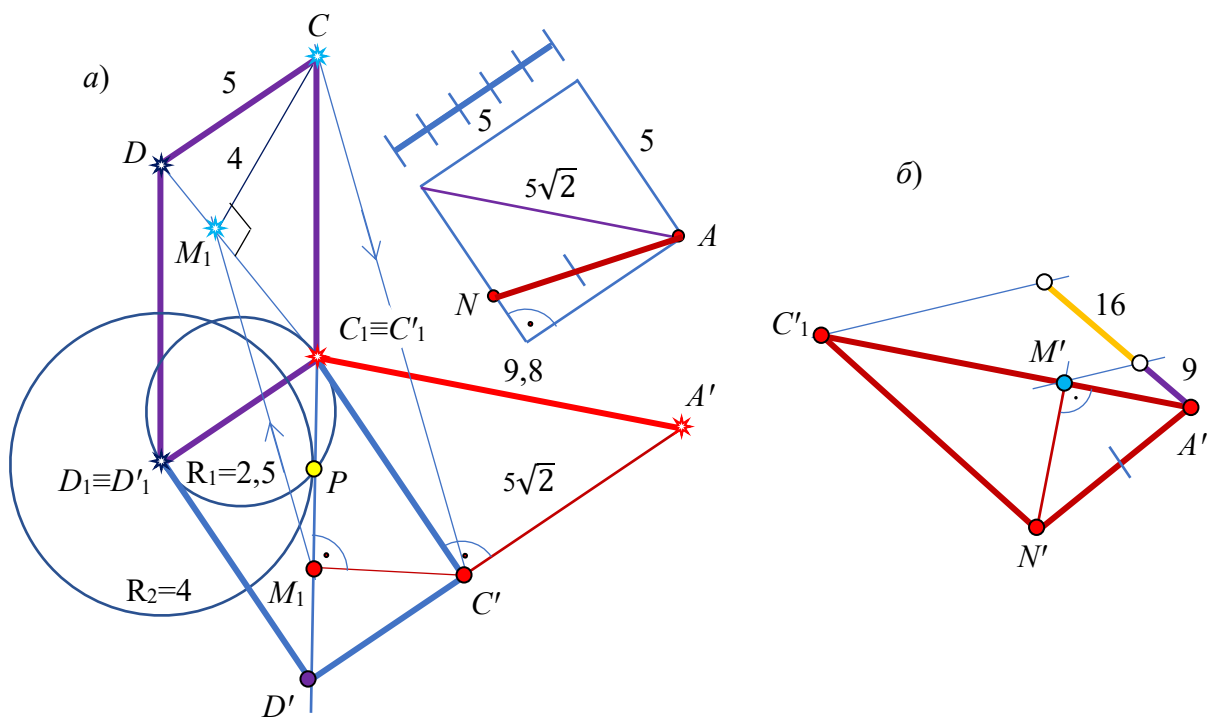


Рис. 1.93

Додаємо конструктивізму і практицизму, переформулювавши умову.

Отже: Знайдіть площу перерізу правильної 4-кутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, що заданий діагоналлю AC_1 та спільним перпендикуляром між цією діагоналлю і мимобіжним з нею ребром основи BC . Відомо, що довжина спільного перпендикуляра дорівнює 4, а сторона основи призми – 5. Побудуйте розгортку зрізаної призми.

Помічаємо, що $\frac{DM_1}{M_1C_1} = \frac{AM}{MC_1} = \frac{9}{16}$, а площа паралелограма ANC_1Q рівна площі двох трикутників ANC_1 . Сумістивши з картинною площиною трикутник ANC_1 (рис. 1.93, б), у результаті отримаємо шукану площу: $S_{ANC_1Q} \cong 2 \cdot \frac{1}{2} AC_1 \cdot MN = 38,48$ кв. од. м.

В оригіналі: $S_{ANC_1Q} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC_1 \cdot MN = 38,88$ кв. од. м. Отже, $\Delta S = 0,4$; $\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = 1,029\%$. На рисунку 3.93 є всі елементи для розгортання зрізаної призми на картинну площину. Пропонуємо побудувати розгортку самостійно.

Розглянемо кілька задач конструктивного характеру, у висновках яких поставлено вимогу провести пряму, перпендикулярну площині (прямій), котра є одним із заданих (чи таких, які потрібно побудувати) елементів наявного стереометричного тіла.

17. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з відношенням ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$ через вершини B, C_1 і D проведено площину. На ребрі $A_1 D_1$ узято точку P . Опустить перпендикуляр із точки P на площину $BC_1 D$, якщо $A_1 P : P B_1 = 1 : 2$.

Аналізуючи текст задачі та рисунок 1.94, а до неї, неважко помітити, що площина діагонального перерізу паралелепіпеда $\Delta(A_1 B C D_1)$ й площина $\Sigma(B C_1 D)$, визначена умовою, взаємно перпендикулярні, оскільки (згідно з ознакою перпендикулярності двох площин [4, § 3, п. 15]) діагональ DC_1 , що належить площині Σ і водночас грані $D C C_1 D_1$, яка має форму квадрата, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються у площині Δ : $A_1 D_1 \perp DC_1$ і $CD_1 \perp DC_1$. Лінією перетину площин Δ і Σ , очевидно, буде пряма BQ .

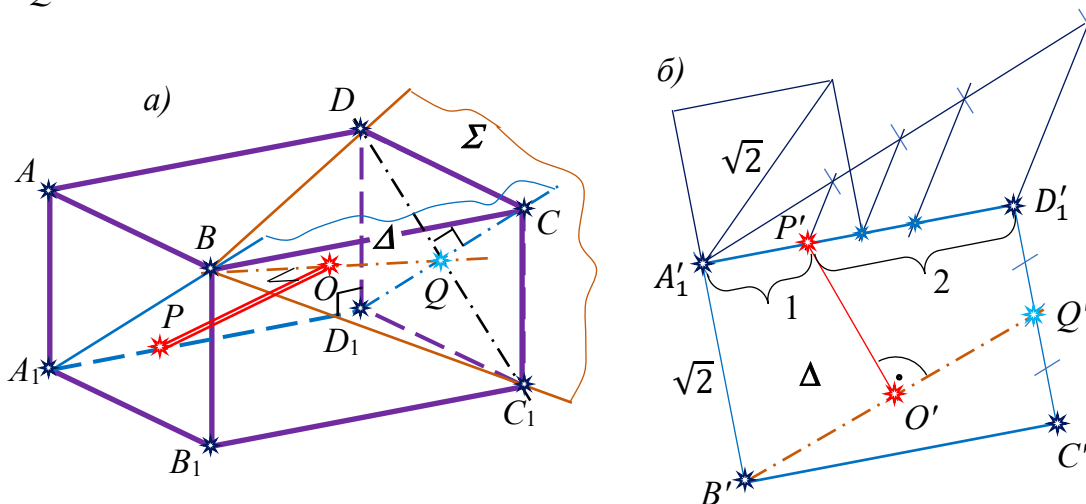


Рис. 1.94

Отже, тепер потрібно опустити перпендикуляр з точки P на пряму BQ .

Скориставшись уже відомим методом обертання навколо лінії нульового рівня, «покладемо» на картинну площину (див. виносне креслення, рис. 1.94, б) прямокутник $A_1 B C D_1$, де в якості оригінального обираємо відрізок $A_1 D_1 = A'_1 D'_1 = 2$ од. м. Елементарні площинні операції моделюють істинну відстань від точки P' до прямої $B' Q'$. Залишається відрізок BQ відомим прийомом поділити у відношенні $BO : OQ = B' O' : O' Q'$ (рис. 1.94, а). PO – шуканий перпендикуляр.

18. В основі призми лежить рівносторонній трикутник ABC . Дві бічні грані призми – ромби зі спільним ребром AA_1 і гострим кутом 60° . Опустить перпендикуляр із точки P , узятій на ребрі AA_1 , на діагональ BC_1 грані $BB_1 C_1 C$, якщо $AP : P A_1 = 1 : 1$.

Сформульована задача специфічна стосовно вдалого розміщення на картинній площині правильного й наочного рисунка, вибору ракурсу зовнішнього проєкціювання. Спочатку варто надто уважно осмислити її умову, хоча тут міркування

не складні. Гострі кути у двох бічних ромбів зі спільним ребром AA_1 рівні 60° . Це означає, що їхні діагоналі, протилежні кутам у 60° , розбивають кожен ромб на два рівносторонні трикутники. Звідси випливає, що всі ребра призми рівні між собою. Оскільки бічні грані AA_1C_1C і AA_1B_1B також рівні та ще й нахилені під рівними кутами до площини основи $A_1B_1C_1$ (ABC), то третя бічна грань призми BB_1C_1C є квадратом. Висоти трикутників ABB_1 і ACC_1 ділять відповідно їхні основи BB_1 і CC_1 навпіл, а трикутник ACB_1 – рівнобедрений, тому вершина A ортогонально проєкціюється в центр O квадрата BB_1C_1C .

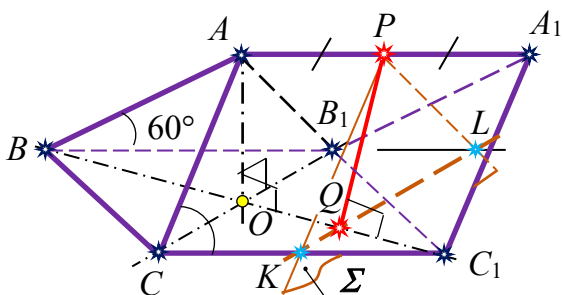


Рис. 1.95

Завдячуючи таким висновкам (рис. 1.95), можна легко провести через будь-яку точку ребра AA_1 площину, що перпендикулярна прямій BC_1 . Саме тому (для наочності), в якості основи призми, ми обрали її бічну грань, що є квадратною. Таким чином, можемо констатувати, що площина рівнобедреного трикутника ACB_1 перпендикулярна до прямої BC_1 . Поділивши точкою P відрізок AA_1 пополам (відповідно до умови), проводимо на рисунку через дану точку P площину Σ паралельно (ACB_1). Далі, скориставшись фактом, що дві паралельні площини перетнуті третьою площиною висікають паралельні прямі [4, § 2, п. 12] ($KL \parallel CB_1$), й за схемою ОПЗ-1 просто знаходимо точку Q – основу перпендикуляра, опущеного із середини (P) відрізка AA_1 на пряму BC_1 .

Щоб побудувати оригінальний за розмірами відрізок PQ , потрібно на виносному кресленні сумістити із площиною зображень рівнобедрений трикутник PKL , в якого $KL = CB_1 = K'L' = \sqrt{2}$, а $P'K' = P'L' = 1$, що ми й пропонуємо зацікавленій особі реалізувати самостійно.

Обидві задачі розв'язані виключно конструктивним методом.

Іншу із двох основних метричних задач – на відшукання відстані від точки до площини (ОМЗ-2), найліпше продемонструвати прикладами розв'язання пропозицій стереометричного характеру на обчислення.

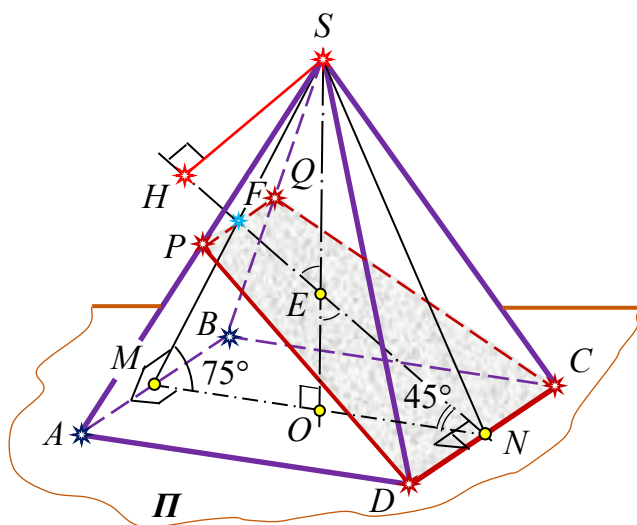


Рис. 1.96

19. У правильній чотирикутній піраміді з двограним кутом при основі 75° через сторону основи проведено площину перерізу під кутом 45° до площини основи. Знайти відношення об'єму верхньої (зрізаної) частини піраміди до об'єму всієї піраміди.

Обґрунтуємо побудову перерізу піраміди січною площиною.

Середня лінія MN , яка проходить через центр O квадрата $ABCD$ в основі піраміди, перпендикулярна двом його сторонам AB і CD (рис. 1.96). Апофема SM лівої грані SAB перпендикулярна AB (згідно із теоремою про три

перпендикуляри). Отже, $\angle SMN = 75^\circ$ – лінійний кут, яким вимірюється двограний кут при основі AB правильної піраміди. Апофема бічних граней SN і SM разом із середньою лінією MN визначають площину симетрії піраміди (SMN), яка теж перпендикулярна AB

і CD ($AB \parallel CD$). Тому будь-яка пряма площини (SMN) перпендикулярна CD і, отже, площина перерізу, що вміщує CD , перетне площину симетрії (SMN) по прямій NF , яка утворює з площиною основи даний лінійний кут ($\angle FNM = 45^\circ$).

Таким чином, розпочинати побудову перерізу потрібно із проведення у площині симетрії піраміди (SMN) відрізка NF під кутом 45° до NM . Січна площина перетинатиме бічну грань SAB по відрізку $PQ \parallel CD$, оскільки вона проходить через відрізок $CD \parallel AB$. Грані SAD і SBC площина перерізу перетне вздовж рівних відрізків DP і CQ , що впливає із рівності трикутників PAD і QBC (за двома сторонами і кутом між ними).

Маємо, що перерізом буде рівнобічна трапеція $PQCD$, яка відсікає від заданої піраміди $SABCD$ піраміду $SPQCD$. Об'єм кожної піраміди слід виражати формулою $V = \frac{1}{3} S_o \cdot h$. Якщо подати об'єми обох пірамід функцією деякого параметра a , то в шуканому відношенні цей параметр скоротиться. Тому для зручності у викладах покладемо, наприклад, сторону основи правильної чотирикутної піраміди рівною a .

Тепер площа основи піраміди $SABCD$, що очевидно, дорівнює a^2 ; висоту SO легко знаходимо у прямокутному трикутнику SOM , катет якого $MO = \frac{a}{2}$, а гострий кут рівний 75° . Отже, $SO = MO \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Отже, $V_1 = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. (*)

Для відшукування об'єму піраміди $SPQCD$ потрібно знайти площу її основи (трапеції $PQCD$) і висоту, тобто відстань від вершини S до площини перерізу.

Спочатку знайдемо площу трапеції $PQCD$. Її більша основа CD дорівнює a ; висота NF є стороною трикутника NFM , в якого кут при вершині F рівний 60° , а $NM = a$. За теоремою синусів матимемо: $\frac{NF}{\sin 75^\circ} = \frac{NM}{\sin 60^\circ}$. Звідси отримаємо $NF = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$. Меншу основу трапеції PQ шукатимемо з подібності трикутників SPQ і SAB : $\frac{PQ}{AB} = \frac{SF}{SM}$. Тут $AB = a$, у трикутнику SFN кут при вершині F рівний 120° , а при вершині N – 30° . Тому цей трикутник рівнобедрений, а $SF = NF$. У трикутнику SOM $SM = \frac{MO}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}-1}$. Таким чином, із записаного вище відношення отримаємо: $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Площу трапеції $PQCD$

обчислюємо за відомою формулою: $S = \frac{CD+PQ}{2} \cdot NF$. Отже, маємо: $S_{PQCD} = \frac{\sqrt{2}a^2(\sqrt{3}+1)^2}{12}$.

Відомо, що у просторі відстань від точки до площини знаходять у три кроки: 1) через точку проводять пряму, перпендикулярну площині; 2) шукають точку перетину прямої з площиною (ОПЗ-1); 3) заміряють відстань між двома точками.

У стереометричних фігурах, як правило, через задану точку проводять площину, котра перпендикулярна заданій площині та в якій (за ознакою перпендикулярності двох площин) і буде розміщено шуканий перпендикуляр до прямої їх перетину. В нашій ситуації площина симетрії піраміди (SMN) перпендикулярна її перерізу $PQCD$ і вони перетинаються по прямій NF . Отже, відстань від точки S до січної площини (висота піраміди $SPQCD$) вимірюється відрізком перпендикуляра SH , проведеного з точки S на пряму NF .

Зауважимо, оскільки $\angle SFN = 120^\circ$ (трикутник SFN – тупокутній), то основа H перпендикуляра лежить зліва від точки F , тобто за межами відрізка NF (що нижче буде продемонстровано конструктивно).

Прямокутні трикутники SHE і NOE подібні, адже $\angle SEH = \angle NEO$ як вертикальні. Причому, обидва трикутники рівнобедрені та прямокутні. Отже маємо: $SH : NO = SE : NE$. Звідси, як результат, отримаємо: $SH = \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$.

Записуємо вираз для об'єму піраміди $SPQCD$: $V_2 = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{12(\sqrt{3}-1)}$. (**)

Поділивши рівності (**) і (*), остаточно матимемо: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}+1}{6} \approx 0,45534$.

Констатуємо, що так отримане відношення менше одиниці, що цілком природньо. Задачу на обчислення розв'язано.

Тепер додамо задачі конструктивізму, змодельовавши побудовним методом місце розташування основи H перпендикуляра SH на відрізку NF , його істинну довжину і оригінальну форму та розміри трапеції, яка є перерізом даної піраміди (рис. 1.97).

Переміщенням у просторі «кладемо» середню лінію NM в основі піраміди на картинну площину. Це буде відрізок, довжина якого (у міліметрах) істинно рівна a . Поворотом навколо лінії нульового рівня $N'M'$ суміщаємо площину симетрії піраміди (SMN) з картинною площиною (рис. 1.97, а). При цьому трапеція $PQCD$, перпендикулярна площині (SMN), виродиться у відрізок $N'F'$, що є висотою трапеції в натуральну величину. Перпендикуляр $S'H'$ опускаємо на січну площину як це прийнято у планіметрії. Тепер (рис. 1.96) можна (за потреби) строго знайти точку H , поділивши зовнішнім чином відрізок NF у відношенні, в якому точка H' ділить відрізок $N'F'$, адже поділ відрізка в заданому відношенні є інваріантом будь-якого різновиду руху.

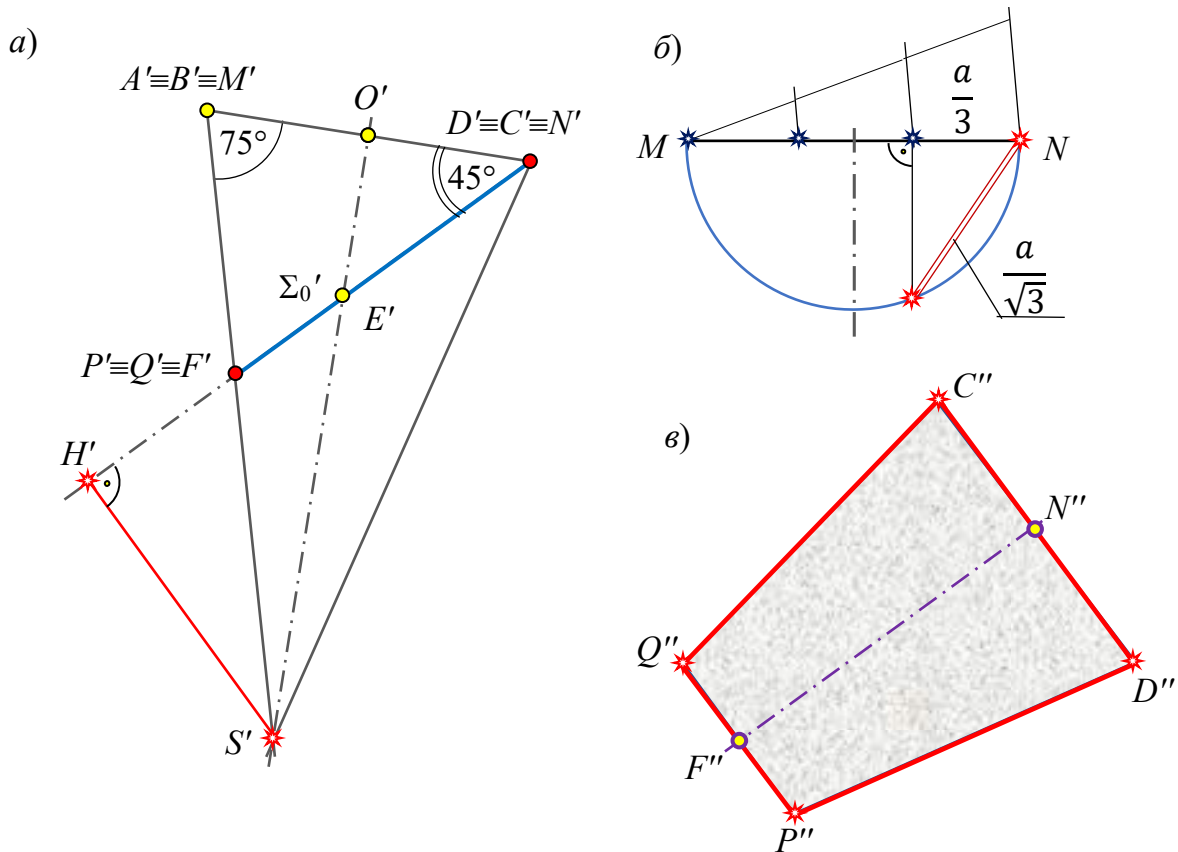


Рис. 1.97.

Щоб отримати оригінальним за формою і розмірами переріз піраміди, потрібно виконати ще один поворот трапеції $P'Q'C'D'$ на 90° навколо висоти $N'F'$, сумістивши її з площиною зображень (рис. 1.97, в). Тут, щоб мати ще й у натуральну величину довжину меншої основи трапеції $P'Q'$, скористаємося середніми геометричними у прямокутному трикутнику (рис. 1.97, б). Решту елементів трапеції беремо з рисунка 1.97, а.

Таким чином, зараз задачу розв'язано графоаналітичним методом, адже для

зображення трапеції використано отриману вище формулу $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Чи можна змоделювати відрізок PQ суто графічно? Так, звичайно. З цією метою досить сумістити з картинною площиною бічну грань піраміди (рівнобедрений трикутник) SAB , основу $AB = a = N'M'$ і висоту $S'M'$ якого слід узяти (заміряти) з рисунка 1.97, *a*. Розділивши висоту побудованого трикутника у відношенні $S'F' : F'M'$ та провівши через отриману точку пряму паралельно його основі, в перетині з бічними сторонами матимемо оригінальний за довжиною відрізок PQ (рисунок відсутній).

З метою оцінки точності конструктивних операцій, варто якомога більш точно «зняти» довжину відрізка $a = N'M'$ і підставити це значення у формули, виведені для площі основи і висоти піраміди $SPQCD$, прийнявши їх за істинні. Далі слід заміряти довжини відрізків $S''H''$, $N''F''$, $P''Q''$ і $C''D''$, обчислити площу трапеції $P''Q''C''D''$ і знайти абсолютну та відносну похибки рисункових операцій.

У наших замірах $a = 4,4$ см. Підставивши у формули (*) і (**) значення a , ми отримали $V_1 \approx 52,9866$ (см³), а $V_2 \approx 24,13$ (см³). Отже, $V_2 : V_1 \approx 0,455398$. Абсолютна похибка складає $0,58 \cdot 10^{-4}$ (см³), а відносна – $1,274 \cdot 10^{-2}$ %.

Пропонуємо ще одну задачу, яку, очевидно, легко розв'язати методами аналітичної геометрії. Ми ж демонструємо шлях до результату, який цілком прийнятний в умовах сучасної школи.

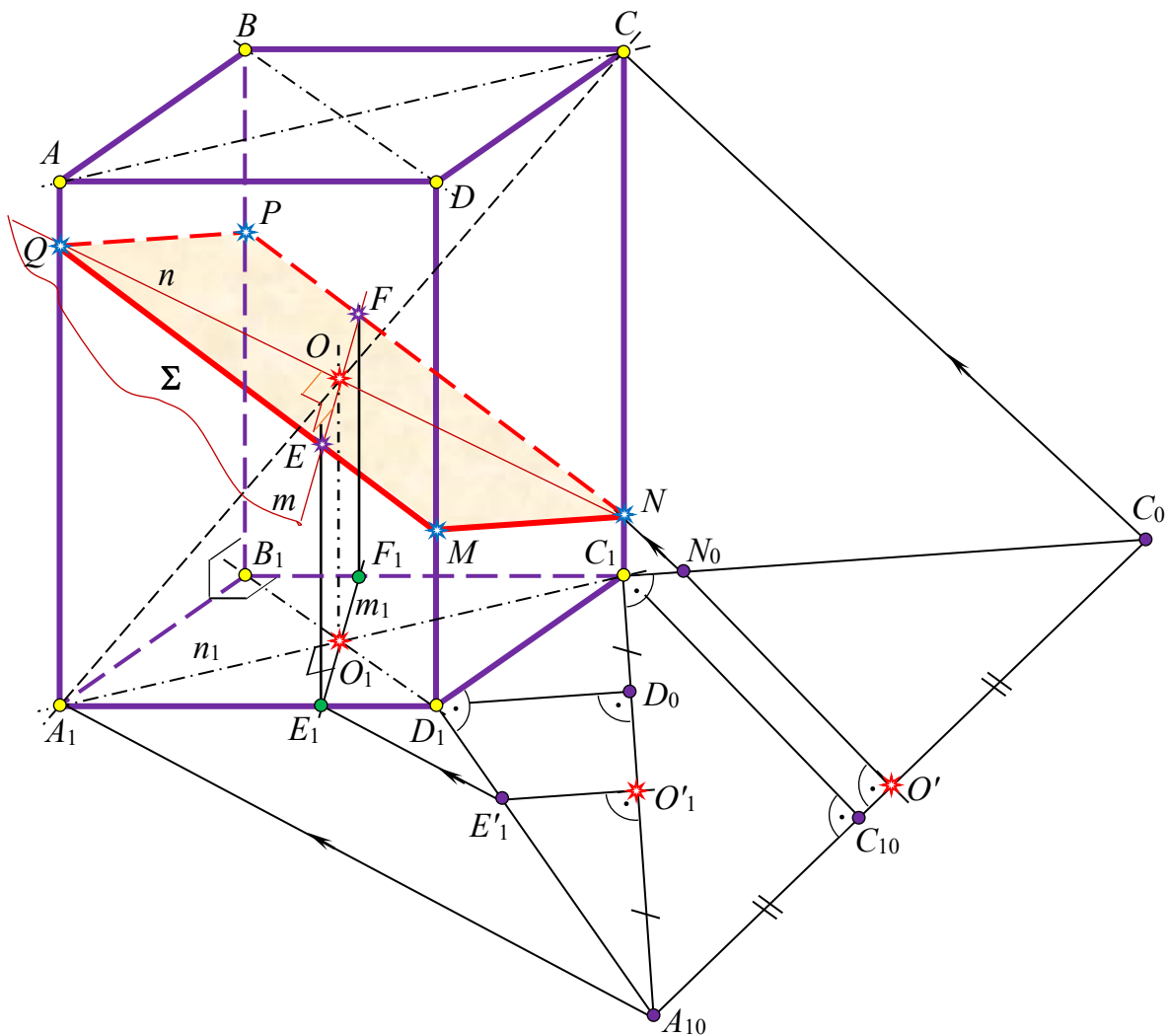


Рис. 1.98.

20. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда з вимірами a (3), b (5) і c (7) в од. м. площиною, що перпендикулярна до діагоналі та проходить через її середину (одиниці виміру взяті довільно).

Площину перерізу Σ зручно задати двома прямими m і n , які перетинаються (рис. 1.98) і проходять через точку O , що є серединою діагоналі A_1C . Першу з них (m) розташуємо горизонтально – паралельно основі $A_1B_1C_1D_1$ паралелепіпеда, побудувавши спочатку проєкцію E_1F_1 на основу, розмістивши її перпендикулярно проєкції A_1C_1 діагоналі A_1C . Іншу (n) проведемо у площині діагонального перерізу перпендикулярно до діагоналі.

Для виконання побудов скористаємося методом суміщення – обертання навколо лінії нульового рівня, яка належить картинній площині.

Уявляємо собі, що ми переміщуємо паралелепіпед у просторі та кладемо сторону його нижньої основи D_1C_1 на картинну площину й обираємо даний відрізок оригінальним за довжиною ($a = 3$). Оскільки кут D_1 прямий, а $A_1D_1 = b$ ($b = 5$), будуємо прямокутний трикутник $D_1A_{10}C_1$ за відомими катетами. Як результат, гіпотенуза трикутника $A_{10}C_1$ буде істинною (в розмірах) діагоналлю основи A_1D_1 . Опустивши перпендикуляр D_1D_0 з вершини прямого кута D_1 на $A_{10}C_1$ та провівши через середину гіпотенузи O'_1 пряму $O'_1E'_1$ паралельно D_1D_0 , отримаємо точку E'_1 ; розділивши точкою E_1 сторону основи A_1D_1 у відношенні, в якому точка E'_1 ділить $A_{10}D_1$, матимемо проєкцію $E_1F_1 \equiv m_1$ прямої m на площину основи паралелепіпеда. Пряму m ($m \equiv EF$) проведемо через точку O паралельно m_1 , що обґрунтовується оберненою теоремою про проєкціювання прямого кута.

За рисунком неважко зрозуміти шлях побудови точок E і F перетину прямої m із гранями паралелепіпеда: $E = m \cap AA_1D_1D$; $F = m \cap BB_1C_1C$.

Для відшукування спільних точок бічних ребер AA_1 і CC_1 із січною площиною (чого цілком достатньо для побудови перерізу), скористаємося вже набутим досвідом, а саме, на раніше зображеній (в оригіналі) діагоналі основи $A_{10}C_1$ (як на одному з катетів) побудуємо ще один прямокутний трикутник $A_{10}C_1C_0$, де іншим катетом буде бічне ребро c ($c = 7$). Уже відомим прийомом знайдемо на C_1C_0 точку N_0 і поділимо CC_1 у відношенні, в якому точка N_0 розділяє C_1C_0 . Так знайдена точка N буде однією з вершин шуканого перерізу; ще інша вершина Q на ребрі AA_1 – симетрична точці N відносно середини O діагоналі A_1C .

Побудову паралелограма $MNPQ$ перерізу паралелепіпеда січною площиною $\Sigma(m \cap n)$ здійснюємо у три кроки: 1) точку N з'єднуємо з точкою F і фіксуємо точку P на ребрі BB_1 ; 2) точку Q з'єднуємо з точкою E і фіксуємо точку M на ребрі DD_1 ; 3) провівши відрізки QP і MN у бічних гранях багатогранника, отримуємо шуканий переріз.

У дослідженні даної конструкції варто мати на увазі, що перерізом може бути також шестикутник за умови, коли оригінальна довжина бічного ребра CC_1 паралелепіпеда строго менша діагоналі його основи $A_{10}C_1$ (точки N і Q лежатимуть на прямих CC_1 і AA_1 за межами однойменних ребер). У такій ситуації точка N_0 належатиме A_1C_1 , а точка Q_0 – діагоналі AC . Тоді відрізки перетину січної площини з основами паралелепіпеда слід провести через точки N_0 і Q_0 паралельно $m \equiv EF$, що висіче чотири вершини багатокутника перерізу. Цей факт легко обґрунтувати методом від супротивного. Ще дві вершини лежатимуть на ребрах BB_1 і DD_1 . Завершуємо побудову як описано вище.

Для цієї ситуації пропонуємо зацікавленій особі виконати окремий рисунок.

21. Через точку R діагоналі AC_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ провести площину Σ ,

перпендикулярну цій діагоналі. Знайти площу фігури перерізу куба площиною Σ , якщо його ребро рівне одиниці, а $AR : RC_1 = 3 : 2$.

Побудовний етап, що реалізований нами на кресленні-моделі (рис. 1.99), вміщує упорядковано одну метричну і одну позиційну задачі. Відомо, що площини, перпендикулярні одній і тій самій прямій, паралельні. Крім того, вже відомо, що площина $\Lambda(A_1BD) \perp AC_1$. Тому, провівши через точку $R \in AC_1$ (яку, згідно з умовою, зобразити дуже просто) дві прямі, паралельні визначеним лінійним елементам трикутника $A_1BD - h \parallel BD$ і $f \parallel A_1O$, – одержимо зображення січної площини $\Sigma(h \cap f) \perp \perp AC_1$. Тепер потрібно побудувати фігуру перерізу куба цією площиною. Звісно, що в куба протилежні грані паралельні, а паралельні площини перетинаються іншою площиною по паралельним прямим; сторони BD, A_1B і A_1D трикутника A_1BD належать верхній, лівій і задній граням куба відповідно. Отже, площина Σ перетинає верхню і нижню грані багатогранника по прямим, паралельним BD , ліву і праву – по прямим, паралельним A_1B , а передню і задню – по прямим, паралельним A_1D . Якщо ще й врахувати, що пряма f площини Σ належить діагональному перерізу куба AA_1C_1C і, у зв'язку з цим, перетинає AC у точці L , а A_1C_1 – у точці K , у межах верхньої і нижньої граней тіла, то шестикутник перерізу $EFQNM$ будується елементарно.

Зауважимо, що тип багатокутника перерізу залежить винятково від місця розташування точки R на діагоналі куба AC_1 . Якщо визначальна точка лежить між точками G і H ($G = AC_1 \cap A_1O, H = AC_1 \cap CO_1$) і не зливається з ними, то в перерізі буде шестикутник. В усіх інших випадках – трикутник.

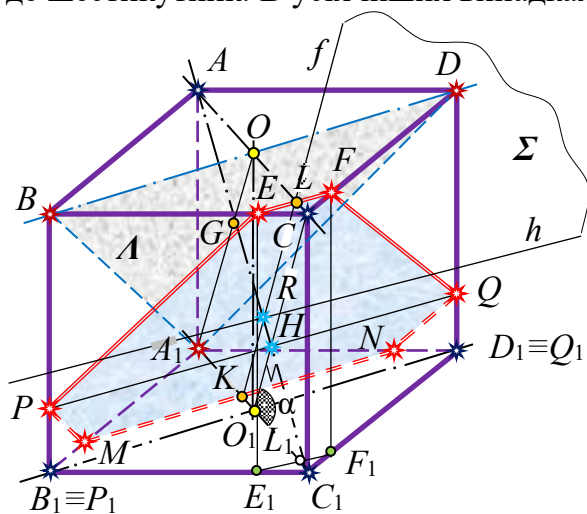


Рис. 1.99

Щоб ефективно провести **етап обчислень**, варто ще раз виконати аналіз умови задачі і рисунка до неї, осмислити вже відомі факти та знайти визначальні взаємозалежності між даними і шуканими стрижневими елементами стереометричної фігури, які так чи інакше виражали б одні параметри через інші. При цьому вести пошук розв'язання варто **аналітично** – від висновку до умови задачі.

Площу S шестикутника $EFQNM$ можна обчислити кількома способами. Геометрично привабливо **проеціювати фігуру перерізу $EFQNM$ ортогональними променями внутрішнього проєціювання** на площину основи куба $A_1B_1C_1D_1$ в інший шестикутник $E_1F_1D_1NMB_1$ і знайти площу S_1 останнього. За відомою теоремою ([25], п. 34) про площу ортогональної проєкції багатокутника, $S = \frac{S_1}{\cos \alpha}$, де α – лінійний кут, яким вимірюється двогранний кут між площиною перерізу і площиною основи куба. Тут S_1 доцільно шукати як площу квадрата $A_1B_1C_1D_1$, із стороною, рівною 1, без площ прямокутних трикутників MNA_1 і $E_1F_1C_1$.

Аналізуючи, помічаємо, що трикутник CC_1O_1 – теж прямокутний. У ньому: $O_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, CC_1 = 1, CO_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, а $\angle CO_1C_1 = \angle LKC_1 = \alpha$ і $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Крім цього, $LK \parallel CO_1$, а $LL_1 \parallel CC_1$. Тому $KO_1 = LC = L_1C_1$. Очевидно також, що $\Delta C_1RK \sim \Delta C_1HO_1$. Щоб знайти довжину відрізка KO_1 , запишемо пропорцію $\frac{RC_1}{KC_1} = \frac{HC_1}{O_1C_1}$. Звідси $KC_1 = \frac{RC_1 \cdot O_1C_1}{HC}$. За

умовою $RC_1 = \frac{2}{5}AC_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, а $HC_1 = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (див. вище задачу 2). Тому: $KC_1 = \frac{3\sqrt{2}}{5}$; $KO_1 = KC_1 - O_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}$; $KA_1 = A_1O_1 - KO_1 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. Далі, ввівши до розгляду ще дві пари подібних трикутників: $\Delta B_1D_1C_1 \sim \Delta E_1F_1C_1$ і $\Delta B_1D_1A_1 \sim \Delta E_1F_1C_1$, відповідно матимемо: $\frac{B_1D_1}{E_1F_1} = \frac{O_1C_1}{L_1C_1} \Rightarrow E_1F_1 = \frac{B_1D_1 \cdot L_1C_1}{O_1C_1} = \frac{\sqrt{2}}{5}$; $\frac{B_1D_1}{MN} = \frac{O_1A_1}{KA_1} \Rightarrow MN = \frac{B_1D_1 \cdot KA_1}{O_1A_1} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. Отже, одержимо таке: $S_{E_1F_1C_1} = \frac{1}{2}E_1F_1 \cdot L_1C_1 = \frac{1}{50}$ і $S_{MNA_1} = \frac{1}{2}MN \cdot KA_1 = \frac{16}{50}$. Нарешті, $S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{E_1F_1C_1} - S_{MNA_1} = \frac{33}{50}$, а $S = \frac{33\sqrt{3}}{50}$. Задачу розв'язано повністю.

22. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, висота дорівнює 20. Знайдіть найкоротшу відстань між стороною основи і діагоналлю призми, які не перетинаються ([10], §5, задача 19).

Із рисунка 119, виконаного до задачі 19 у шкільному підручнику з геометрії, вочевидь випливає, що в її розв'язанні автор мав на увазі пряме використання означення відстані між мимобіжними прямими. Процитуємо його ще раз: «Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі». Реально ж досить провести (рис. 1.100) лише одну з таких площин, приміром (ADC_1B_1) , яка містить діагональ призми AC_1 , і знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки A_1 ребра A_1D_1 на цю площину. Справді, оскільки ребро B_1C_1 перпендикулярне лівій грані призми AA_1B_1B , то перпендикуляр A_1L_0 до діагоналі AB_1 у цій грані також буде перпендикулярно розташованим у просторі до B_1C_1 . Але ж, AB_1 і B_1C_1 – дві прямі площини (ADC_1B_1) , які перетинаються. Тому, згідно з ознакою перпендикулярності прямої і площини, $A_1L_0 \perp (ADC_1B_1)$. З іншого боку, площина (ADC_1B_1) і її паралельне ребро A_1D_1 , що розташовані перпендикулярно грані AA_1B_1B , є проєкціювальними на цю грань: площина (ADC_1B_1) вироджується у пряму AB_1 , а ребро A_1D_1 – у точку A_1 . Такі елементарні уявлення взаємних розташувань прямих і площин та внутрішньо призматичне проєкціювання за напрямом $D_1 \rightarrow A_1$ відразу ж призводять просторову ситуацію до площинної. Залишається відомим прийомом у прямокутному трикутнику A_1AB_1 обчислити його висоту A_1L_0 , проведену з вершини прямого кута A_1 на гіпотенузу AB_1 . Тут $A_1B_1 = 15$, $A_1A = 20$, тому $AB_1 = 25$; площа трикутника (у двох варіантах обчислення) $S = \frac{1}{2}AB_1 \cdot A_1L_0 = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1A$, звідки $A_1L_0 = 12$.

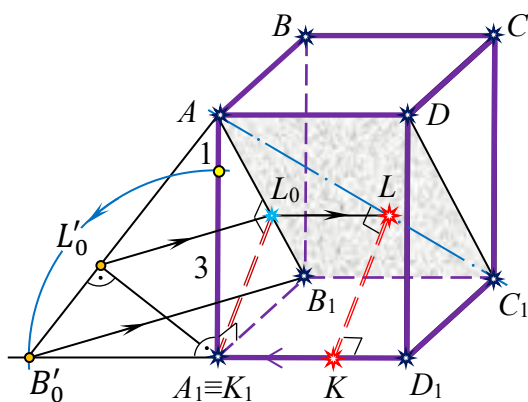


Рис. 1.100

Хоч задачу і розв'язано, все ж на користь справі її висновок варто було б геометричне посилити для того, щоб конструктивна складова в пошуку результату мала пріоритетне місце і, шляхом аналізу, учні більше оперували просторовими образами, оскільки (ми знову цитуємо З. І. Слєпкань): «Не можна не погодитися з тим, що правильна організація постановки й розв'язування задач і вправ значною мірою визначає ефективність навчання математики в сучасних умовах».

Отож, нехай тепер: «Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, висота дорівнює 20. Побудуйте спільний перпендикуляр сторони основи і діагоналлю призми, які не перетинаються, та обчисліть його довжину».

У цій порівняно простій ситуації важливо, знову ж таки, провести якісний аналіз задачі на побудову. Припустимо, що відрізок KL задовольняє її умову (рис. 1.100). Якщо $KL \perp AC_1$, а AB_1 – ортогональна проєкція похилої AC_1 на ліву грань AA_1B_1B призми, то $KL \perp AB_1$ (за теоремою про три перпендикуляри). Але ж відрізок KL перпендикулярний також ребру A_1D_1 , яке, у свою чергу, перпендикулярне цій самій грані AA_1B_1B , тому $KL \parallel (AA_1B_1B)$ і за напрямом $D_1 \rightarrow A_1$ проєкціюється на визначену площину проєкцій у натуральну величину: $A_1L_0 = KL$. Коли б точка L_0 була вже знайдена на кресленні, то оберненим проєкціюванням ($A_1 \rightarrow D_1$) можна було б побудувати як точку L , так і шуканий спільний перпендикуляр KL двох заданих мимобіжних прямих: $KL \parallel A_1L_0$. Точку L_0 доцільно будувати суміщенням грані AA_1B_1B із площиною рисунка. Адже, $A_1B = \frac{3}{4}AA_1$ і $A_1B \perp AA_1$ в оригіналі, тому: 1) поділимо відрізок AA_1 на чотири рівні частини; 2) в точці A_1 проведемо промінь перпендикулярно AA_1 і відкладемо на ньому відрізок $A_1B'_1 = \frac{3}{4}AA_1$; 3) з'єднаємо точки A і B'_1 ; 4) звичним на площині прийомом опустимо з точки A_1 перпендикуляр $A_1L'_1$ на AB'_1 ; 5) основа перпендикуляра L'_1 розділяє відрізок AB'_1 у тому ж відношенні, в якому точка L_0 ділить відрізок AB_1 , тому L_0 легко будемо використовувати теорему про пропорційні відрізки. Побудову завершено. Обчислювальний етап задачі резонно залишити незмінним.

Очевидно також, що розташування точки L_0 на гіпотенузі прямокутного трикутника AA_1B_1 можна легко розрахувати, адже $\frac{A_1B_1^2}{AA_1^2} = \frac{B_1L_0}{L_0A} = \frac{9}{16}$. Графічне завершення задачі в цьому випадку традиційно елементарне.

Окремо зауважимо, що в наведених випробуваннях ми посилаємося лише на факти геометрії ЗЗСО та мислимо винятково відомими учням просторовими образами і закономірностями, реалізуючи конкретні умовиводи на проєкційних кресленнях графічно. Тобто, в так організованому навчальному процесі вирішуються справді суто стереометричні питання, з доречним залученням до справи фігур (та їхніх елементів) і відомих тверджень планіметрії.

23. Осьовий переріз циліндра – квадрат. Відрізок AB , який з'єднує точку A кола верхньої основи з точкою B кола нижньої основи циліндра, дорівнює $2\sqrt{2}$ і віддалений від осі циліндра на відстань 1. Знайти кут між прямою AB і площиною основи циліндра.

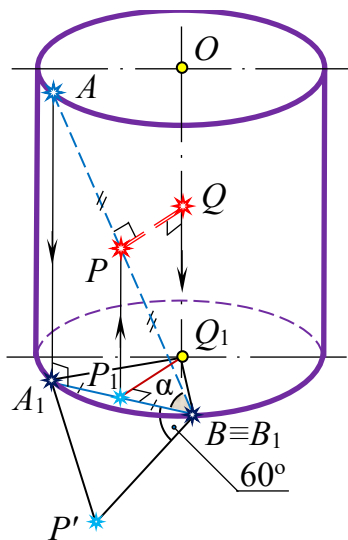


Рис. 1.101

Кутом між прямою і площиною називається, як відомо, кут між цією прямою і її проєкцією на площину. Ортогональною проєкцією прямої AB (рис. 1.101) на площину основи циліндра буде пряма A_1B ($B \equiv B_1$). Тож $\angle ABA_1 = \alpha$ – шуканий. Тут напрям *внутрішнього проєкціювання* встановлює вісь циліндра OQ_1 ($AA_1 \parallel OQ_1$). Але пряма OQ_1 є проєкціювальною, тому відрізок PQ , який є спільним перпендикуляром прямих AB і OQ_1 , розташовується паралельно площині основи циліндра ($PQ \parallel P_1Q_1$), а отже, як і прямий кут QPB_1 (згідно з теоремою про проєкціювання прямого кута), проєкціюється на неї в натуральну величину ($PQ = P_1Q_1$, $P_1Q_1 \perp A_1B_1$). Причому, точка P_1 розділяє відрізок A_1B_1 навпіл (згідно із властивістю хорди кола $\omega(Q_1, R)$).

Оберненим проєкціюванням, за напрямом $P_1 \rightarrow P$ ($P_1P \parallel Q_1Q$), побудовно строго

зображаємо на моделі спільний перпендикуляр PQ мимобіжних прямих AB і OQ_1 .

Таким чином, PP_1 – середня лінія трикутника AA_1B і, якщо $AA_1 = 2R$ (за умовою), то $PP_1 = R$. Відомо також, що $AB = 2\sqrt{2}$ а $PQ = 1$. У прямокутному трикутнику $A_1Q_1P_1$ $A_1P_1 = P_1B = \sqrt{R^2 - 1}$. Однак, $PB = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$, а трикутник PP_1B теж прямокутний. Тому $PB^2 = PP_1^2 + P_1B^2$ або $(\sqrt{2})^2 = R^2 + (\sqrt{R^2 - 1})^2$. Звідки $R^2 = \frac{3}{2}$. Нарешті маємо: $P_1B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos \alpha = \frac{P_1B}{PB} = \frac{1}{2}$ і $\alpha = 60^\circ$.

Знайдений результат суто графічно встановлюється елементарно, адже трикутник $A_1P'B_1$ – рівносторонній ($A_1B_1 = A_1P' = B_1P' = \sqrt{2}$).

Неважко помітити, що розв'язана задача є оригінальною інтерпретацією другого наслідку з ОТМ, який подається нами як ще одне конструктивне означення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих (див. вище).

24. У правильній чотирикутній піраміді кут між суміжними бічними гранями дорівнює 2α . Знайти бічну поверхню піраміди, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює S .

Учні, в пошуку шляху розв'язання задачі (рис. 1.102), могли б міркувати приблизно так.

Нехай BKD – лінійний кут двогранного кута при ребрі SC . Тут точка K , яка належить ребру SC , на кресленні-картині вибирається будь-де. З'єднаємо точки O і K . Легко довести, що $BK = DK$, і тому OK – медіана трикутника BKD – є також його бісектрисою і висотою. Отож, $\angle OKD = \alpha$. Помічаємо, що $S_{\Delta SAC} = 2 \cdot S_{\Delta SOC} = SC \cdot OK$, а $S_6 = 4 \cdot S_{\Delta SCD} = 2SC \cdot DK$. Таким чином, $\frac{S_{\Delta SAC}}{S_6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{OK}{DK}$. Але, із прямокутного трикутника ODK , маємо: $\frac{OK}{DK} = \cos \alpha$, а отже, одержуємо: $S_6 = \frac{2S}{\cos \alpha}$.

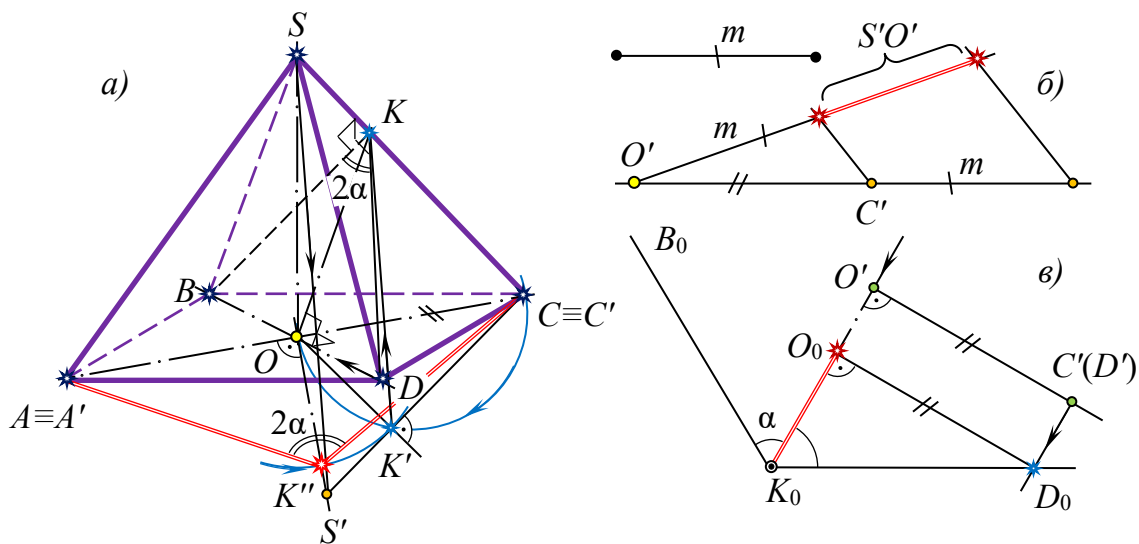


Рис. 1.102

З іншого боку, якщо уявити осьовий переріз піраміди (SAC) у ролі площини проєкцій внутрішнього ортогонального проєкціювання за напрямом $D \rightarrow O$, то в цьому перетворенні трикутник SOC буде проєкцією трикутника SDC . Узявши до уваги вже вживану нами раніше теорему про площу ортогональної проєкції багатокутника, матимемо: $S_{\Delta SOC} = S_{\Delta SDC} \cdot \cos \alpha$. Тому $S_{\Delta SDC} = \frac{S}{2 \cos \alpha}$ і $S_6 = \frac{2S}{\cos \alpha}$. Напевне, що саме такий шлях до формального розв'язання коротший, більш оригінальний, а ще й геометрично привабливий уявною динамічною операцією, реалізованою всередині тіла.

Щоб точку K на ребрі піраміди SC зобразити як на кресленні-моделі, потрібно рисунково визначитися або із площею її діагонального перерізу S , або ж із градусною мірою кута $B'K'D'$, що за умовою дорівнює 2α .

У першому випадку $S = m^2 = O'C' \cdot S'O' \Rightarrow S'O' = \frac{m \cdot m}{O'C'}$, де m – заданий відрізок.

Уявлювано перемістивши у просторі піраміду так, щоб діагональ основи $A'C'$ «лягла» на картинну площину ($OC = O'C'$) та, до того ж, виконавши на вільному місці поля креслення побудову відрізка $S'O'$ як четвертого пропорційного до відрізків m , m і $O'C'$ (рис. 1.102, б), суміщаємо із площиною дошки (зошита) трикутник $S'O'C'$. Два завершальні побудовні кроки ($O'K' \perp S'C'$ і $K'K \parallel S'S$) призводять до результату. Очевидно, що тут точку K на ребрі SC знайдено **графоаналітичним** методом. Кут 2α в натуральну величину зображується кутом $A'K''C'$, рівним куту $B'K'D'$.

Якщо ж попередньо задати градусну міру ($B_0K_0D_0$) кута $B'K'D'$, то справжню довжину відрізка $O'K'$ знаходимо, побудувавши окремо (рис. 1.102, в) за гострим кутом $\alpha = \frac{1}{2} \angle B_0K_0D_0$ і катетом $O_0D_0 = O'D'$ прямокутний трикутник $K_0O_0D_0$, рівний оригінальному прямокутному трикутнику $K'O'D'$, адже $O'D' = O'C$, а $O'K' = O_0K_0$. Оскільки трикутник $O'K'C'$ насправді теж прямокутний, точку K' шукаємо в перетині двох кіл, одне з яких проводимо на відрізку $O'C'$ як на діаметрі, а друге – з центром у точці O' і радіусом, рівним довжині побудованого відрізка $O'K'$. З'єднавши точки K' і C' променем, фіксуємо на перпендикулярі до $O'C'$ у точці O' точку S' . Завершуємо побудову **графічним** методом як уже описано вище.

25. Висота правильної трикутної піраміди рівна H . Знайти її повну поверхню, якщо площина, проведена через вершину основи піраміди перпендикулярно протилежній бічній грані, складає із площиною основи кут 30° . (Зіставте, задля експерименту, міркування і шлях розв'язання задачі з № 13).

У такому випадку (рис. 1.103), в якості площини проєкцій **внутрішнього ортогонального проєкціювання** за напрямом $S \rightarrow O$, зручно обрати площину основи піраміди $\Delta(ABC)$, оскільки її бічні грані SAB , SBC і SAC матимуть своїми проєкціями рівновеликі трикутники AOB , BOC і AOC відповідно. Тобто, матимемо $S_{\Pi} = S_0 + S_6 = 3 \cdot (S_{\Delta AOB} + S_{\Delta SAB})$ (*).

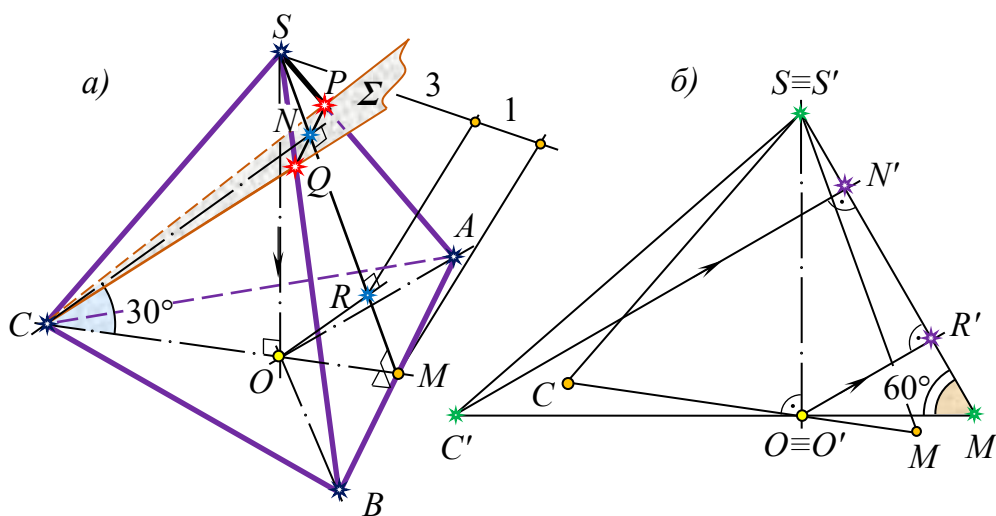


Рис. 1.103

Тепер виконаємо фахові добудови на кресленні-картині. Почнемо із проведення відрізка SM – апофеми грані SAB . Ребро AB , спільне для граней SAB і ABC , перпендикулярне двом прямим SM і CM , які власним перетином визначають площину

$\Lambda(SMC)$ осевого перерізу піраміди. Отже, площина $\Lambda(SMC)$ перпендикулярна граням SAB і ABC . Але ж дві площини взаємно перпендикулярні, якщо кожна з них уміщує пряму, перпендикулярну іншій площині. Тому основою перпендикуляра CN на грань SAB , який належить площині $\Lambda(SMC)$, буде точка N , узята, як зазвичай, будь-де на апофемі SM цієї грані. У свою чергу, через точку C (пряму CN) можна провести пучок площин, перпендикулярних грані SAB . Очевидно, що у цьому пучку слід вибрати таку площину $\Sigma(CPQ)$ з умови задачі, яка була б паралельна AB ($PQ \parallel AB$), а отже, перпендикулярна площині $\Lambda(SMC)$. Тоді площина осевого перерізу $\Lambda(SMC)$ у перетині з її перпендикулярними площинами $\Sigma(CPQ)$ і $\Delta(ABC)$ висіче на зображенні лінійний кут ($\angle NCM = 30^\circ$ за умовою), яким і буде вимірюватися двогранний кут, утворений цими площинами.

Зараз слушно перейти до формальних обчислень. У прямокутному трикутнику CNM $\angle NMC = 60^\circ$, а в іншому прямокутному трикутнику SOM $MO = SO \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} H$. Проте, згідно з умовою, піраміда $SABC$ – правильна, тому очевидно, що в трикутнику її основи $OC = OA = OB = 2 \cdot OM = \frac{2\sqrt{3}}{3} H$, а тому $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} H^2$ і $S_{\Delta SAB} = \frac{S_{\Delta AOB}}{\cos 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} H^2$. Урахувавши рівність (*), остаточно знайдемо: $S_{\Pi} = 3\sqrt{3}H^2$.

Таким чином, зважений аналіз стереометричних реалій усередині піраміди, якісно виконаний проєкційний рисунок та вдало введене *внутрішнє проєкціювання* (творчий момент), порівняно складну задачу на обчислення звели до простої.

Чи можна тепер на проєкційному рисунку переріз піраміди площиною $\Sigma(CPQ)$ побудувати строго як на кресленні-моделі? Так, звичайно ж, якщо, приміром, зображення висоти $SO = H$ обрати в якості оригінального відрізка піраміди.

Графічний метод. Приймаючи до уваги, що трикутник $S'O'M'$ – прямокутний, а $\angle S'O'M' = 60^\circ$ (отже, $\angle M'S'O' = 30^\circ$) і $M'O' = \frac{1}{3}M'C'$, обертанням навколо відрізка нульового рівня $SO = S'O'$ (рис 1.103, б) суміщаємо трикутник $S'M'C'$ із площиною зображення. Перпендикуляр $C'N'$, опущений у цьому трикутнику з вершини C' на його протилежну сторону $S'M'$, візуально на рисунку встановлює відношення, в якому точка N розділяє відрізок SM (рис 1.103, а) внутрішнім чином: $\frac{S'N'}{N'M'} = \frac{SN}{NM}$. Тож завершити задачу побудовно нескладно.

Графоаналітичний метод. У тому ж таки трикутнику $S'O'M'$, для з'ясування напрямку шуканого перпендикуляра $C'N'$, із вершини прямого кута O' опускаємо перпендикуляр $O'R'$ на гіпотенузу $S'M'$. Тоді $\frac{(O'M')^2}{(O'S')^2} = \frac{M'R'}{R'S'} = \frac{MR}{RS} = \frac{1}{3}$. Графічна кінцівка задачі, завдяки знайденому відношенню, відтворюється на картинній площині вже відомим прийомом: $C'N' \parallel O'R'$. Задачу розв'язано.

26. Дано зображення правильної трикутної піраміди $SABC$, сторона основи якої $AB = 1$, а висота трикутника основи (AF) складає $\frac{3}{4}$ висоти піраміди SO . На відрізку MN , що розташовується у грані SBC паралельно апофемі SF , задано таку точку P , що $SM : MC = 1 : 2$ і $MP : PN = 1 : 1$. Опустить перпендикуляр із точки P на ребро SA і знайдіть його довжину.

Надто просто переконатися, що зображення піраміди метрично визначене (рис. 1.104). Дійсно, згідно з умовою: $AB = BC$, $BC = CA$, $SO \perp CD$, $SO \perp AF$, $AF = \frac{3}{4}SO$.

Отже, на першому кроці ланцюжка конструктивних дій нам потрібно через точку P провести площину $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярну ребру SA . З цією метою раціонально

(виважено, дотепно) виберемо на зображенні пару взаємно перпендикулярних площин проєкцій $\Pi_1(ABC)$ і $\Pi_2(SAF)$ та ортогонально проєкціюємо на кожну з них точку P і ребро SA : $P_1 \in M_1N$ ($M_1 \in CO$ і $M_1N \parallel AF$), $S_1A_1 \equiv OA$; $P_2 \in SF$, $S_2A_2 \equiv SA$. Нагадаємо, що площину $\Sigma(h \cap f)$ слід задати так, щоб виконувалися вимоги теореми-наслідку, покладеної в основу розглядуваного методу. Отже, $P_1 \in h_1$ і $h_1 \perp OA$ ($h \parallel h_1$), $P_2 \in f_2$ і $f_2 \perp SA$ ($f \parallel f_2$). Останню побудову здійснюємо всередині квадрата $KLEA$, сторона якого $AK = SO$ ($OF = FK$). Тут, як завжди, спочатку проведемо через точку K пряму $KG \perp SA$, а потім через точку P_2 – пряму $f_2 \parallel KG$.

Наступний графічний крок, суть якого полягає у відшуванні на проєкційному кресленні точки перетину ребра SA із площиною Σ , не розпочавшись уже, фактично, завершився. Справа в тому, що прямі f_2 і SA належать одній і тій самій вертикальній площині проєкцій (та, водночас, площині симетрії піраміди) $\Pi_2(SFA)$. Але пряма f_2 належить також ще й площині перерізу Σ , адже f_2 проходить через точку $P_2 \in h$ і паралельна прямій f цієї площини. Тому точка $Q = f_2 \cap SA$ – шукана.

Відрізок PQ зобразить відстань від точки P до ребра SA . Тут TQR – трикутник перерізу піраміди площиною $\Sigma \perp SA$.

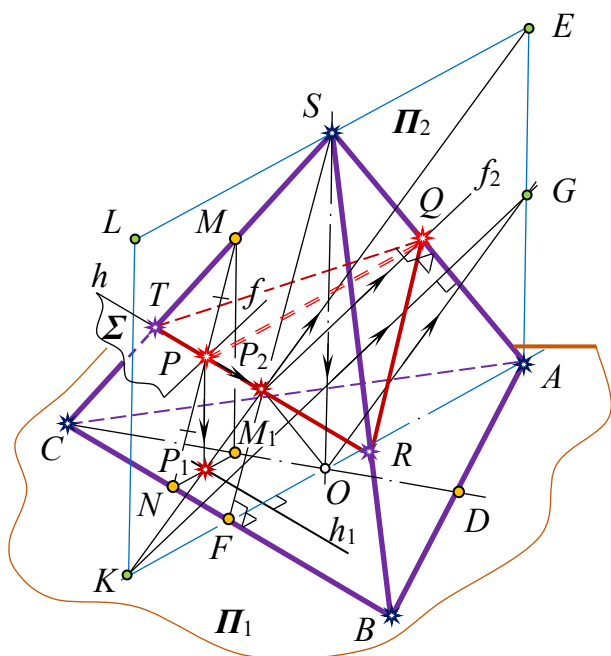


Рис. 1.104

Тепер, маючи чіткі уявлення міжелементних залежностей усередині піраміди, завдяки якісному рисунку і врахувавши дані умови задачі, переконуємося, що $SP_2 : SF = 2 : 3$. Але ж $\Delta STR \sim \Delta SCB$, а $CB = 1$ (за умовою), тому $TR : CB = 2 : 3$ і $TR = \frac{2}{3}$. Отже, $TR_2 = \frac{1}{3}$, а $PP_2 = \frac{1}{6}$. Щоб відшукати довжину відрізка PQ , залишилося знайти у прямокутному трикутнику PP_2Q ($\angle P_2 = 90^\circ$) його катет P_2Q . У зв'язку з цим, привертає до себе увагу той факт, що $AO : AF = 2 : 3$ (O – точка перетину медіан трикутника ABC). Отже, $\Delta FP_2O \sim \Delta FSA$ і $P_2O \parallel SA$. Тому $P_2Q = OH$, де точка H (на рисунку відсутня) – основа перпендикуляра, опущеного з вершини прямого кута O прямокутного трикутника SOA на його ж гіпотенузу SA . Тут матимемо таке: $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а $SO = 2AO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Тому $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ і точка H ділить відрізок SA

у відношенні 4 : 1. Це останнє означає, що $SH = \frac{4}{5}SA = \frac{4}{\sqrt{15}}$ і $HA = \frac{1}{5}SA = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Отже: $OH^2 = P_2O^2 = SH \cdot HA = \frac{4}{15}$ і $PQ = \sqrt{PP_2^2 + P_2Q^2} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{53}{5}}$. Пошук розв'язку задачі завершено повністю.

Читачу, спробуйте самостійно (на винесеному кресленні) двома послідовними суміщеннями з картинною площиною трикутників SFA (перше суміщення з віссю SF) і TQR (друге суміщення з віссю P_2Q) знайти справжню форму трикутника TQR .

27. Основою прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є паралелограм із кутом BAD , що дорівнює 60° . $A_1 B_1 : A_1 D_1 : AA_1 = 1 : 2 : 1$ і $A_1 B_1 = a$. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точку O – середину діагоналі BD_1 – перпендикулярно до цієї діагоналі, та знайти площу фігури перерізу.

Метрична визначеність зображення паралелепіпеда (рис. 1.105) забезпечується п'ятьма метричними параметрами: $A_1 D_1 = 2 \cdot A_1 B_1$, $\angle B_1 A_1 D_1 = 60^\circ$, $AA_1 \perp A_1 D_1$, $AA_1 \perp A_1 B_1$, $AA_1 = A_1 B_1$.

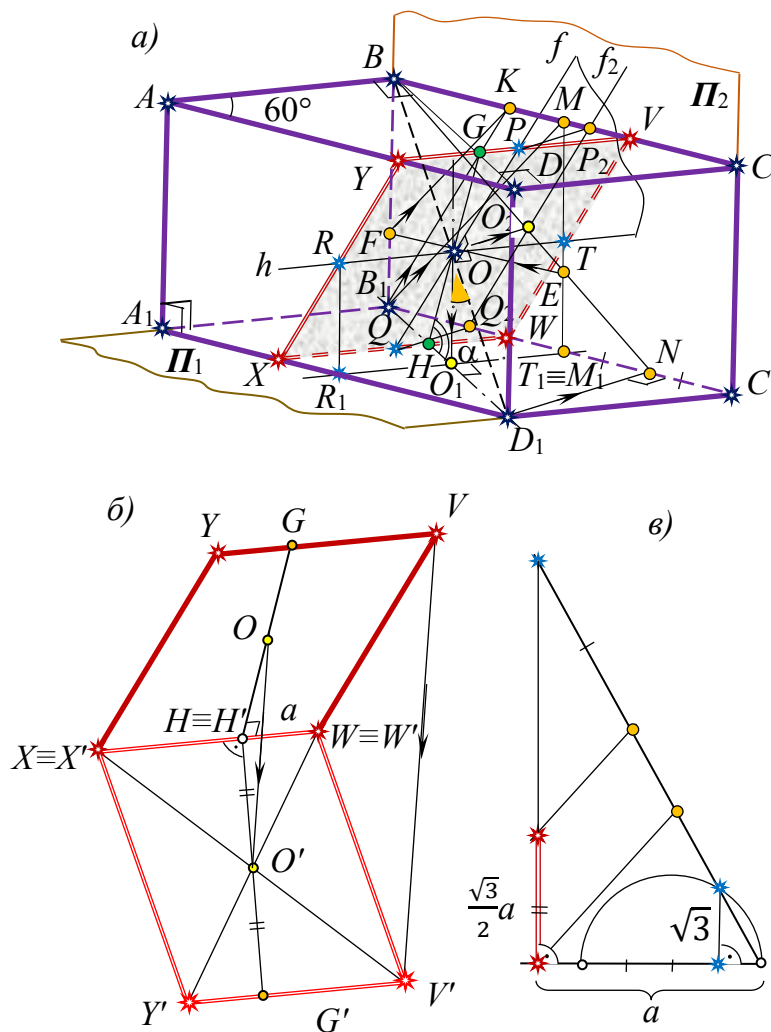


Рис. 1.105

Як і в попередніх задачах, віднесемо спочатку діагональ BD_1 і точку O на ній до вдало вибраної пари взаємно перпендикулярних площин проєкцій $\Pi_1(A_1 B_1 C_1 D_1)$ і $\Pi_2(B_1 B C C_1)$. Внутрішнє ортогональне проєкціювання на першу з них (Π_1) будемо здійснювати за напрямом OO_1 ($OO_1 \parallel AA_1$). Для того, щоб визначитися з напрямом ортогонального проєкціювання на Π_2 , потрібно з будь-якої точки, наприклад із точки D_1 площини основи Π_1 , опустити перпендикуляр на грань $BB_1 C_1 C$. Якщо розділимо

відрізок C_1B_1 точкою N у відношенні $1 : 3$, то D_1N якраз і буде таким перпендикуляром, адже $C_1N = \frac{a}{2}$ ($C_1B_1 = 2a$), а у трикутнику NC_1D_1 , що утворився, $\angle NC_1D_1 = 60^\circ$ і одна з його прилеглих сторін NC_1 у два рази менша іншої прилеглої сторони C_1D_1 , що дорівнює a . Це означає, що NC_1 лежить проти кута в 30° , а розглядуваний трикутник прямокутний ($\angle N = 90^\circ$). Тож B_1D_1 буде горизонтальною проекцією діагоналі BD_1 , а BN – її фронтальною проекцією. Точки O_1 і O_2 розташуються відповідно на BD_1 і BN усередині цих відрізків.

Шукану площину перерізу Σ , обумовлену теоремою-наслідком, задаємо лініями рівня h і f , кожна з яких інцидентна точці O і перпендикулярна діагоналі BD_1 . При цьому горизонталь побудуємо так, що $h \parallel h_1 \parallel A_1B_1$, оскільки $\angle A_1B_1D_1 = \angle R_1O_1D_1 = 90^\circ$ ($\angle B_1A_1D_1 = 60^\circ$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_1D_1$ за умовою). Щоб зобразити ще й фронталь $f \parallel f_2$, перпендикулярно розміщену в оригіналі до BN , скористаємося квадратом BB_1M_1M ($B_1M_1 = M_1C_1 = a$) на фронтальній площині проекцій Π_2 . А саме, звичним прийомом будуємо спочатку $B_1K \perp BE$, а потім через точку O_2 проводимо пряму $f_2 \parallel B_1K$. Отже, площину перерізу $\Sigma(h \cap f)$ визначено на проекційному кресленні однозначно.

Уже зараз фігуру перерізу заданого паралелепіпеда площиною $\Sigma(h \cap f)$ побудувати зовсім нескладно, оскільки оберненим внутрішнім проєкціюванням за напрямом $O_1 \rightarrow O$ легко знаходимо на горизонталі h точки R і T , а за напрямом $O_2 \rightarrow O$ – на фронталі f – точки P і Q , які обов'язково належать поверхні (відповідним граням) багатогранника. Окрім цього, січна площина Σ містить горизонталь h , яка паралельна A_1B_1 , тому в її перетині з нижньою і верхньою гранями стереометричного тіла висікаються відповідно відрізки XW і YV , що містять точки Q і P , та також паралельні A_1B_1 . Цим остаточно визначається зображення чотирикутника перерізу $XYVW$, який, що очевидно, є паралелограмом.

Як відомо, площа паралелограма рівна добутку основи на висоту. Тобто, якщо $XW = A_1B_1 = a$, то $S = a \cdot h$. Оскільки $XW \perp B_1D_1$ і $H = XW \cap B_1D_1$, то HG (див. рисунок), що містить точку O , й буде (згідно з теоремою про три перпендикуляри) висотою паралелограма і, водночас, відрізком найбільшого нахилу площини Σ до площини основи паралелепіпеда.

Тепер, задля формальних виражень, розглянемо ще й пару трикутників HOD_1 і OO_1D_1 . Вони прямокутні ($\angle HOD_1 = \angle OO_1D_1 = 90^\circ$) і мають спільний гострий кут у вершині D_1 . Майже очевидний факт, у свою чергу, означає, що $\triangle HOD_1 \sim \triangle OO_1D_1 \Rightarrow \frac{O_1D_1}{OO_1} = \frac{OD_1}{OH}$, де $O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OO_1 = \frac{1}{2}a$, а $OD_1 = \sqrt{O_1D_1^2 + OO_1^2} = a$. Тому маємо: $OH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ і $HG = h = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Остаточно, $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$. Задачу розв'язано.

Що ж стосуються позиційних і метричних результатів стереометричної задачі на обчислення (яка необхідно вміщує в собі побудовний блок), їх змістового візуального підкріплення моделлю, на завершення ми знову звертаємося до читача з нагальними пропозиціями: «Уважно проаналізуйте і обґрунтуйте самостійно авторські рисункові випробування (див. рис. 1.105, б, в). Яким методом встановлено справжню форму паралелограма $XYVW$? Чи можна досягти адекватних представлень іншим (підказ: графічним) методом і, якщо можна, то як це потрібно зробити?» Акуратно виконайте побудову.

28. У правильній трикутній піраміді $SABC$ бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° . Із точки P , що належить грані SAB , опустить перпендикуляр PQ на іншу бічну грань піраміди SBC .

Метрична визначеність проєкційного креслення (рис. 1.106, а) забезпечується п'ятьма параметрами з умови: $AB = BC$, $BC = AC$, $SA = SB$, $SB = SC$, $\angle SCD = 60^\circ$.

Очевидно, що сформульована задача досить схожа до попередньої, а саме, – вони обидві ідентичні постановкою питання в загальногеометричному тлумаченні. Разом із тим, зараз ми матимемо справу з дещо складнішими побудовами. Оскільки піраміда $SABC$ правильна, то спочатку найкраще опустити перпендикуляр n^0 на грань SBC з вершини A , а потім через точку P провести пряму n , паралельну цьому перпендикуляру (див. правило-орієнтир), і знайти його основу на площині Σ – точку $Q = n \cap \Sigma(SBC)$.

Досить прості алгебричні вираження одних елементів через інші в заданій піраміді засвідчують, що її висота SO дорівнює стороні основи: якщо $AB = a$, то $DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ і $SO_1 = O_1C \cdot \text{tg } 60^\circ = a$.

Тому в якості площини проєкцій Π_1 доречно вибрати основну площину, задану трикутником ABC , а за площину проєкцій Π_2 – площину осьового перерізу піраміди SE_1F_1 , паралельну, наприклад, ребру AB . За таких обставин нульовою горизонталлю $h_0 \equiv h_1$ грані SBC буде пряма BC , а нульовою фронталлю $f_0 \equiv f_2$ – пряма лінія SF_1 перетину грані SBC із залученою до справи площиною осьового перерізу багатогранника $\Pi_2 (SE_1F_1)$, тобто пряма, яка на кресленні будується зовсім легко. Тут $A_1 \equiv A$, а A_2 (як і B_2) шукаємо на Π_2 у вигляді ортогональної проєкції точки A (B) за напрямом $AA_2 \perp E_1F_1$ ($\parallel CD$). Напрямок шуканого перпендикуляра n знайдемо, провівши через вершину піраміди A (A, A_2) пряму $n^0 (n_1^0, n_2^0)$, перпендикулярну до площини $\Sigma(SBC)$, яка в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій Π_1 і Π_2 Perezадано нуль-лініями рівня h_1 і f_2 . Горизонтальна проєкція n_1^0 перпендикуляра n^0 містить медіану рівностороннього трикутника ABC в основі піраміди, а $n_2^0 \perp f_2$ знаходимо за знайомою схемою у квадраті A_2MNB_2 (винесене креслення 1.106, б).

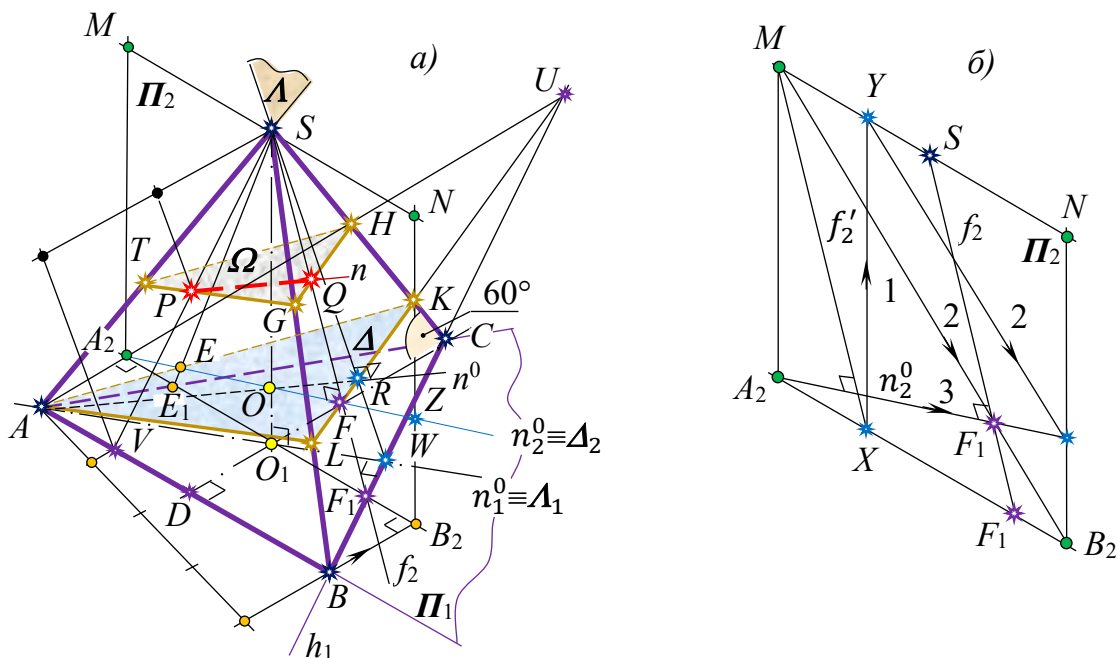


Рис. 1.106

Далі міркуємо і діємо **графічно** надто просто. Горизонтально проєкціювальна площина $\Lambda (SAn_1^0)$, якій обов'язково належить n^0 , у перетині з поверхнею піраміди дасть трикутник SAW ($\Lambda_1 \equiv n_1^0$), а фронтально проєкціювальна площина $\Delta (AA_2n_2^0)$, що також уміщує в собі n^0 , – трикутник AKL ($\Delta_2 \equiv n_2^0$). Визначальними в побудові

останнього трикутника є точки E і F перетину n_2^0 із гранями піраміди SAC і SBC відповідно (або ж, точка $O = n_2^0 \cap SO_1$). Відрізок AR перетину площин Λ і Δ у межах піраміди й буде перпендикуляром, опущеним на грань SBC із точки A , а n^0 – променем, що містить цей перпендикуляр.

А зараз, зваживши на висновок задачі, перетнемо поверхню піраміди площиною Ω , паралельною площині Δ так, щоб вона проходила через задану точку P у грані SAB . Напевне, що площина Ω теж буде фронтально проєкціовальною, а в перерізі з пірамідою висіче трикутник THG , сторони якого будуть паралельні відповідно сторонам трикутника AKL . Відрізок PQ променя n , що виходить із точки P паралельно n^0 , зафіксує на зображенні шуканий перпендикуляр, а точка Q перетину n зі стороною HG останнього трикутника перерізу буде його основою.

Щоб вирішити геть усі геометричні проблеми з цією досить цікавою задачею, додатково до вже виконаного щойно об'єму робіт, сформулюємо завдання читачеві для самостійного опрацювання, які конче потрібно реалізувати на проєкційному кресленні: 1) знайдіть методом розгортки справжню форму трикутника THG і місце відрізка PQ в його внутрішньому розташуванні; 2) конкретизуйте відношеннями відрізків координатне розміщення точки P на грані піраміди SAB (див. рис.) і знайдіть довжину відрізка PQ , якщо $AB = a$; 3) відшукайте значно простіший шлях побудови відрізка PQ з використанням методу суміщення і сформулюйте алгоритм конструктивних операцій виконавця в цьому останньому варіанті дій.

29. У правильній трикутній призмі, всі ребра якої рівні, побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох її бічних граней. Обчислити відстань між діагоналями, якщо ребро призми рівне 1.

4-й спосіб розв'язання. Можливість широкого варіювання у виборі методу вирішення добре знайомої нам конструктивної ситуації, серйозний набір методів (див. основний текст, §1, задача 4) спонукають до висновку, що метричні характеристики заданого умовою багатогранника досить прості в уявленнях. Це дало змогу без надмірних зусиль покласти в основу кожного кроку, описаних вище побудовних алгоритмів, строгі геометричні факти, які логічно напрошуються з доречно помічених взаємних залежностей між елементами усередині призми. *Схожі підходи в пошуку розв'язань задач вважаються пріоритетними в навчанні*, однак, як можна помітити, у стрижневих побудовах вони не завжди є загальними геометричними. Тому природно постає запитання, а чи не можна хоча б окремо вилучені з цілісної системи дій операції проведення перпендикулярних прямих і площин відтворити у стилі класичних стереометричних схем?

Виявляється, можна. Для цього досить залучити до справи теорему-наслідок про перпендикулярність прямої і площини в системі двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій, яка в цій ситуації пріоритетно «працюватиме» не над задачею в цілому, а лише над її визначальними складовими побудовами.

Наприклад, щоб одну із двох заданих умовою діагоналей (LA) ортогонально проєкціювати на площину $\Lambda(XLC)$, перпендикулярну іншій діагоналі BM , як похилу до цієї площини, потрібно скористатися відомим класичним алгоритмом рисункових дій у три кроки (рис. 1.107): 1) через точку A проведемо пряму n , перпендикулярну площині Λ ; 2) знайдемо точку F перетину прямої n із площиною Λ ; 3) з'єднаємо точки L (адже $L \in \Lambda$) і F прямою лінією: $LF \equiv q$.

Віднесемо точку A і площину Λ до пари взаємно перпендикулярних площин проєкцій, одну з яких $\Pi_1(ABC)$ за домовленістю (для зручності) називатимемо горизонтальною, а іншу $\Pi_2(BCML)$ – фронтальною. Очевидно, що такий вибір площин з

апарату *внутрішнього подвійного ортогонального проєкціювання* є досить вдалим, оскільки, по-перше, сторона LC трикутника XLC є нуль-фронтальною введеної площини Λ ($LC \equiv f \equiv f_2$), а роль горизонталі h цієї площини виконуватиме пряма XY , горизонтальною проєкцією якої h_1 є медіана AA_2 трикутника ABC ($h_1 \equiv AA_2$); по-друге, точка A зливається зі своєю ж горизонтальною проєкцією A_1 ($A \equiv A_1$), а її фронтальною проєкцією буде відома нам точка A_2 – середина відрізка $BC \subset \Pi_{11}$.

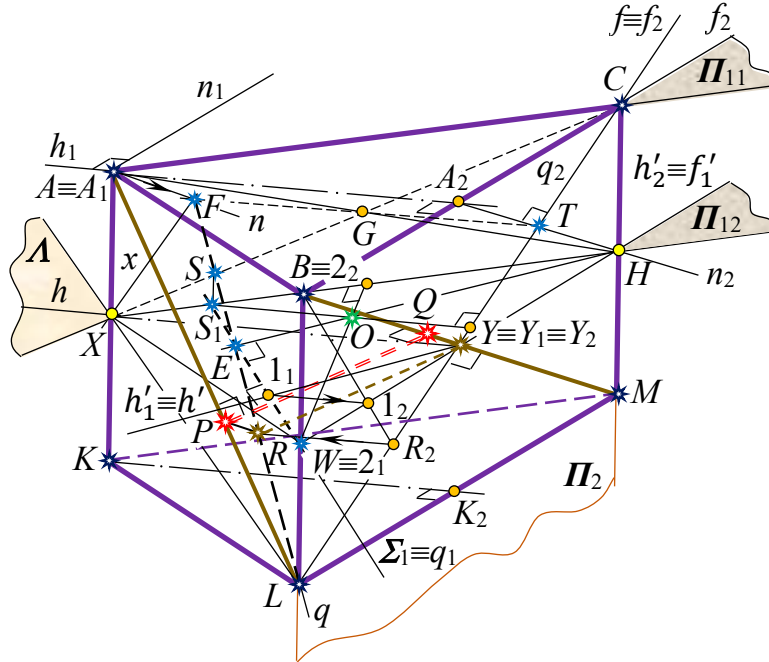


Рис. 1.107

У подальших побудовах на зображенні суть важливо не забувати про таке. Із залученої до справи теореми-наслідку випливає, що перпендикуляр n на проєкційному кресленні зобразиться своїми проєкціями n_1 і n_2 обов'язково в такому розташуванні: $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$. Отже, n_1 проходить через точку A_1 паралельно BC , а n_2 – через точку A_2 паралельно BM . Зображення ж самого перпендикуляра n знаходимо як пряму перетину проєкціювальних на Π_{11} і Π_2 площин, які вміщують n_1 і n_2 відповідно. Перша із проєкціювальних площин ($n_1 AK$) перетне площину загального розташування $\Lambda(XLC)$ по прямій $x \parallel LC$, оскільки $(n_1 AK) \parallel (BCML)$, $(BCML) \cap \Lambda(XLC) = LC$, а дві паралельні площини, як відомо, перетинаються третьою вздовж паралельних прямих, друга ж ($AA_2 n_2$) – по прямій $TG \parallel AA_2$, адже площини $(AA_2 n_2)$ і Λ перпендикулярні Π_2 за побудовою, а відрізок $AA_2 \perp \Pi_2$ за умовою. Прямі x і TG у власному перетині висікають точку F прямої n ($AF \equiv n$), яка й буде точкою зустрічі перпендикуляра n із площиною $\Lambda(XLC)$. З'єднавши точки L і F , одержимо пряму $LF = q$ – ортогональну проєкцію діагоналі LA на площину Λ .

У ще одній визначальній побудові, щоб із точки Y , яка є виродженою проєкцією діагоналі BM на площині $\Lambda(XLC)$, опустити перпендикуляр на пряму q , потрібно, знову ж таки, звернутися до класичного правила-орієнтира дій у геометрії: 1) через точку Y провести площину $\Delta(h' \cap f')$, перпендикулярну q ; 2) знайти точку R перетину прямої q і площини Δ ; 3) з'єднавши точки Y і R , визначитися з шуканим перпендикуляром YR .

У такій ситуації доречно горизонтальну площину проєкцій Π_{12} задати серединним нормальним перерізом призми – трикутником XWH , а фронтальну площину проєкцій $\Pi_2(BLMC)$ залишити незмінною. Тоді: $Y \equiv Y_1 \equiv Y_2$, $q_2 \equiv LC$, а $q_1 \equiv WS_1$, де S_1 – горизонтальна проєкція точки S : $S = q \cap XC$. Площину Δ задаємо у просторі перетином

двох прямих h' і f' так, щоб кожна з них була перпендикулярна прямій q . Як відомо, на проєкційному кресленні $f'_2 \perp q_2$, й тому $f' \equiv f'_2 \equiv BM$, а $h' \equiv h'_1 \perp q_1$ і вміщує точку $Y \equiv Y_1$, а отже, за «принципом висот», розташовується паралельно третій висоті (HE) трикутника S_1WH ; ортоцентр цього трикутника (точка O) будується елементарно в перетині двох інших його висот з урахуванням факту, що трикутник XWH – рівносторонній, ($(XWH) \parallel (ABC)$).

Для строго закономірного відшукування точки R перетину прямої q і площини Δ , скористаємося *найбільш загальним у стереометрії правилом-орієнтиром конструктивних дій у три кроки*: 1) через пряму q проведемо проєкціювальну площину-посередник Σ ; 2) побудуємо пряму (1 - 2) перетину площини Σ і Δ ; 3) знайдемо точку R перетину прямих (1 - 2) і q .

Напевне, що площину Σ найбільш зручно обрати горизонтально проєкціювальною ($\Pi_{12} \parallel \Pi_{11}$), оскільки вона де-факто задана на проєкційному кресленні перетином прямих q і q_1 . Більше того, $q_1 \equiv \Sigma_1$ є виродженою проєкцією площини Σ на Π_{12} , а тому горизонтальна проєкція прямої (1 - 2) зливається з q_1 , адже вироджена проєкція проєкціювальної площини має *збиральну властивість*. Якщо врахувати, що пряма (1 - 2) належить також площині Δ , то точки 1 і 2 доречно зафіксувати відповідно на прямих h' і f' із площини Δ : $h'_1 \equiv h'$ перетинає $\Sigma_1 \equiv q_1$ у точці 1_1 , яка є горизонтальною проєкцією точки 1 ($1 \equiv 1_1$), а її фронтальною проєкцією буде точка 1_2 на $h'_2 \equiv WH$ ($(1_1 - 1_2) \parallel XY$). У свою чергу, $f'_1 \equiv HW$ перетинає Σ_1 у точці W , яка є горизонтальною проєкцією тепер уже точки 2, фронтальною проєкцією якої буде точка $B \in f'_2 \equiv BM$. Отже, фронтальною проєкцією спільної прямої площин Δ і Σ буде пряма 1_22_2 , яка в перетині із прямою $q_2 \equiv LC$ висікає точку R_2 . Провівши через точку R_2 пряму, паралельну 1_11_2 , на прямій q знаходимо точку R – основу перпендикуляра. Відрізок XR – результат рисункових операцій.

Зсунувши відрізок YR за напрямом $M \rightarrow B$ на відстань RP ($P \in AL$), фіксуємо на проєкційному кресленні спільний перпендикуляр PQ заданих мимобіжних прямих BM і AL . Задачу на побудову розв'язано.

30. На ребрах B_1C_1 , D_1E_1 і AF правильної n 'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, висота якої в півтора рази більша сторони основи, взято відповідно точки P , Q і R . Із вершини A_1 опустить перпендикуляр на площину перерізу $\Sigma(PQR)$, якщо $C_1P : C_1B_1 = D_1Q : D_1E_1 = 1 : 4$ і $AR : AE = 1 : 3$.

Обґрунтовуючи на рисунку 1.108, б метричну визначеність правильного п'ятикутника $ABCDE$ (основи призми), пригадаємо особливості його побудови, де після зображення будь-якого паралелограма $AEDL$ уже неприпустима сваволя в подальших діях виконавця на проєкційному кресленні.

Справді, паралелограм $A'E'D'L'$ має у просторі цілком визначену форму (рис. 1.106, а, на якому показано також графічний метод уписання правильного п'ятикутника в коло): 1) $A'E' = E'D'$, 2) $A'D' \perp E'L'$, тобто це в оригіналі – ромб. На картинній площині, як відомо, можна вибрати будь-який паралелограм $AEDL$ в якості зображення ромба. Цими ж двома параметрами на зображенні метрично визначається й п'ятикутник, оскільки він може бути добудованим із ромба, посиленнями лише до афінних властивостей паралельних проєкцій. Така добудова легко виконується, адже в оригіналі $D'B' \parallel E'A'$ і точка L' ділить діагональ $D'B'$ у крайньому і середньому відношенні, а золотий поділ відрізка зберігається при паралельному проєкціюванні. Тому на зображенні точка L також має ділити відрізок DB у крайньому і середньому відношенні. Отже, на правильно виконаний рисунок п'ятикутника, що зображає основу заданої призми, витрачено два

метричні параметри. Крім цього, з умови відомо, що: 3) $A_1A \perp AB$; 4) $A_1A \perp AE$; 5) $A_1A = 1,5AB$. Тож зображення призми, в цілому, теж є метрично визначеним.

Шестикутник $PQMRTN$ перерізу призми площиною $\Sigma(PQR)$ будується досить просто, якщо скористатися слідом TR січної площини на площині основи $ABCDE$, що на рисунку 3.106, б не потребує додаткових пояснень.

На самому початку помічаємо, що площина $\Lambda(AA_1Z_1Z)$ є не лише площиною симетрії багатогранника і побудованого перерізу, вона ще й містить у собі шуканий перпендикуляр A_1K , оскільки у просторі площини Σ і Λ взаємно перпендикулярні ($P'Q' \perp A'_1Z'_1$ і $P'Q' \perp U'V'$). Тому, напевне, задачу можна було б розв'язати графічно, якби вдалося сумістити з картинною площиною прямокутник AA_1Z_1Z , а отже, й трикутник A_1UV , в якому A_1K є його висотою, опущеною з вершини A_1 на протилежну сторону UV . Однак про це будемо вести мову трохи пізніше.

А зараз віднесемо точку A_1 і площину Σ до пари взаємно перпендикулярних площин проєкцій Π_1 і Π_2 . Очевидно, що за горизонтальну площину проєкцій Π_1 зручно в даному випадку вибрати верхню грань призми $A_1B_1C_1D_1E_1$, оскільки вона містить точку A_1 і нульову горизонталь даної площини перерізу: $h_1 \equiv h_0 \equiv PQ$. З аналогічних причин, грань AA_1E_1E приймаємо за фронтальну площину проєкцій Π_2 . Тут $A_1 \equiv A_2$, а $f_2 \equiv f_0 \equiv MR$. Знову звертаємося до основної теореми-наслідку про перпендикулярність прямої та площини в системі площин Π_1, Π_2 і проводимо через точку A_1 пряму $n_1 \perp h_1$, роль якої виконує висота A_1Z_1 п'ятикутника верхньої основи призми, та пряму $n_2 \perp f_2$. Останню графічну дію виконуємо, що вже звично, у квадраті $AFGE$, визначеному у відповідності метричним умовам, накладеним на це зображення: $AF : FA_1 = 2 : 1$; $n_2 \equiv A_1J \parallel FW$, а $FW \perp AS \parallel MR$.

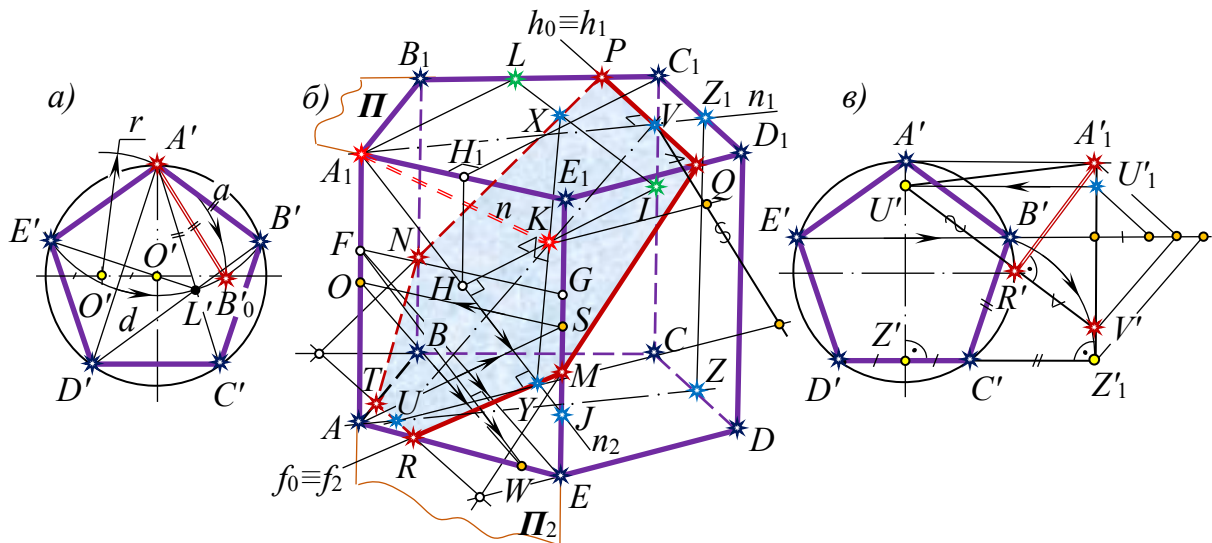


Рис. 1.108

Щоб не довелось надто захаращувати рисунок побудовними лініями, проведення променя $n_2 \perp f_2$ в лівій грані призми можна було виконати окремо – на винесеному кресленні.

Нагадаємо, що n_1 і n_2 є лише ортогональними проєкціями шуканого перпендикуляра. Але саме тому n обов'язково належить і горизонтально проєкціювальній площині $\Lambda(AA_1n_1)$ і фронтально проєкціювальній площині $\Delta(IHn_2)$, де IH – перпендикуляр до площини проєкцій Π_2 в її точці H , яка ділить відрізок A_1J прямої n_2 навпіл ($C_1H_1 \perp A_1E_1$). Отже, тепер будемо відповідно прямі лінії UV і XY перетину цих проєкціювальних площин із площиною перерізу Σ (у побудові, зокрема,

посилаємося на властивість належності прямої й площини та теорему про проєкціювання прямого кута; на рисунку $A_1L \parallel H_1C_1 \parallel HI$). Точка K , що належить одночасно прямим UV і XY , однозначно встановлює зображення основи шуканого перпендикуляра n на площині Σ . Очевидно, що тут відразу можна було б з успіхом скористатися також прямою IH , оскільки $HI = \Delta \cap \Lambda$.

Не секрет, що будь-які два правильні п'ятикутники подібні між собою. Тому зараз, повертаючись до вище сказаного, відшукаємо на проєкційному кресленні справжню форму трикутника A_1UV і місце розташування точки K , яка належить відрізку UV , традиційним у навчальних посібниках методом, який, між іншим (на чому ми вже наголошували), не можна назвати загальним геометричним.

Тож скористаємося для цього оригіналом $A'B'C'D'E'$ правильного п'ятикутника, вписаного в коло будь-якого радіуса, а також методом суміщення (рис. 1.108, в). Якщо за вісь обертання взяти пряму $AZ \equiv A'Z'$, то прямокутник $A'Z'Z'_1A'_1$, в якому $Z'Z'_1 = 1,5C'B'$, й буде представляти істинну форму перерізу багатогранника його площиною симетрії Λ . Далі, застосувавши двічі теорему Фалеса, у відповідності з даними умови задачі, знайдемо вершини U' і V' трикутника $A'_1U'V'$. Нарешті, перпендикуляр, проведений із точки A'_1 на сторону $U'V'$ цього трикутника, й висіче на ній точку K' таку, що $U'K' : K'V' = UK : KV$, а це дозволяє легко знайти точку K на заданому зображенні правильної п'ятикутної призми.

Чи можна обчислювальним методом знайти відстань від точки A_1 до площини перерізу призми $\Sigma(PQR)$ (довжину відрізка A_1K), якщо сторона основи рівна 1? Так, звичайно, що можна. Проте, у зв'язку з необхідністю проведення в цьому випадку не надто цікавих, уже відомих нам формальних перетворень у трикутнику A_1UV , наполягати на обов'язковому виконанні такої роботи недоречно. Тим паче, що досягнути дуже хороших результатів можна, знову ж таки, графічно. Для цього варто скористатися **ненаочним** комплексним кресленням призми, виконаним за методом Г. Монжа. Над таким варіантом розв'язання задачі ми пропонуємо поміркувати читачеві. Слід визначитися спочатку (рис. 1.109) у доладній орієнтації призми (творчий момент) відносно горизонтальної і фронтальної площин проєкцій, а потім виконати всі необхідні побудови в масштабі 1 : 1 та заміряти довжину

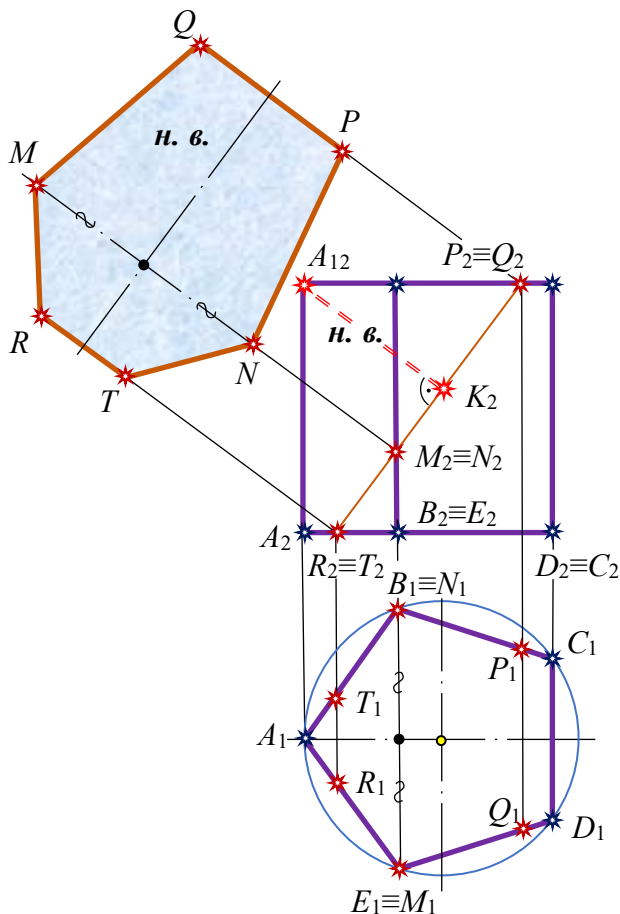


Рис. 1.109

відрізка A_1K . Методом заміни площин проєкцій ($\Pi_1 \rightarrow \Pi_4 \mid \Pi_4 \perp \Pi_2, \Pi_4 \parallel \Sigma$) знайдіть натуральну величину перерізу призми площиною $\Sigma(PQR)$ і вивіріть ваші графічні результати на рисунках 1.108 і 1.109. Нарешті, порівняйте два останні рисунки за складністю їх виконання і зробіть відповідні висновки.

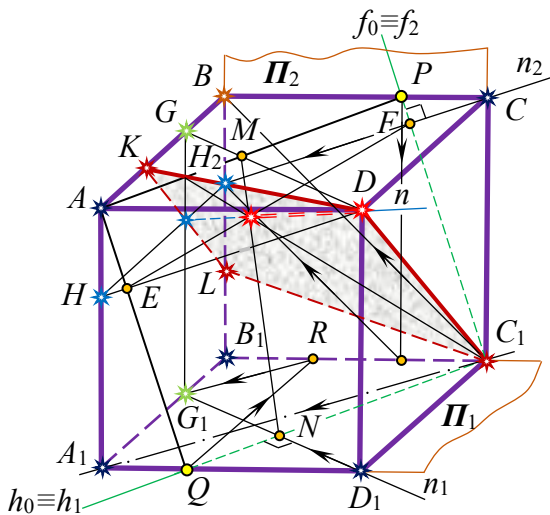


Рис. 1. 110

APC_1Q . Точка C_1 спільна для заданого умовою і шуканого перерізів. Тому, щоб визначитися на проєкційному кресленні із площиною Λ перерізу, який потрібно побудувати (перезадати площину Λ перерізом куба), досить із точки D опустити перпендикуляр DR на площину даного перерізу $\Sigma : \Lambda(C_1D_1 \cap n)$ і подати зображення шуканого перерізу.

Нехай горизонтальна площина проєкцій Π_1 визначається квадратом $A_1B_1C_1D_1$, а фронтальна площина проєкцій Π_2 – квадратом B_1BCC_1 . Тоді нуль-горизонталлю площини Σ буде пряма C_1Q ($h_1 \equiv h_0 \equiv C_1Q$), а нуль-фронталлю – C_1P ($f_2 \equiv f_0 \equiv C_1P$). Горизонтальною проєкцією точки D буде D_1 , а фронтальною – $D_2 \equiv C$. У квадратах $A_1B_1C_1D_1$ і B_1BCC_1 будемо відповідно $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$. Горизонтально проєкціювальна площина $\Delta(DD_1n_1)$, що містить n , перетинає площину Σ по прямій MN , а фронтально проєкціювальна площина $\Omega(DD_2n_2)$, що теж вміщує в собі шуканий перпендикуляр n , – по прямій HF . Ці дві прямі площини Σ у власному перетині висікають спільну точку R , яка безсумнівно слугуватиме основою перпендикуляра $DR \equiv n$, проведеного з точки D на площину перерізу Σ .

Завершальний етап побудови шуканого перерізу $DKLC_1$ добре зрозумілий із рисунка й додаткових пояснень не потребує (привертаємо лише увагу читача до проєкціювальної площини DGG_1D_1 , яка вміщує перпендикуляр DR).

Рекомендуємо самостійно (*методом розгортки*) знайти справжню форму чотирикутника $DKLC_1$ та місце розташування в ньому відрізка DR ; обчисліть довжину останнього, якщо ребро куба рівне a .

32. У правильній трикутній піраміді $SABC$ бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45° . Через вершину A піраміди проведіть площину, перпендикулярну протилежній грані SBC і паралельну ребру BC . Знайдіть істинну форму і обчисліть площу фігури перерізу, якщо довжина ребра AB дорівнює 1.

33. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, гострий кут BAD якого дорівнює 60° (рис. 3.111). Бічне ребро SC перпендикулярне площині основи $ABCD$ і $AB : AD : SC = 1 : 2 : 3$. **1).** Опустіть перпендикуляр із вершини D на грань SAB і знайдіть його довжину, якщо $AB = 1$. **2).** Побудуйте перерізи піраміди двома площинами, які проходять через точку D перпендикулярно грані SAB та, крім цього, одна із площин – перпендикулярно грані SBC , а іншу проведіть через точку X – середину ребра SC . **3).** Знайдіть справжню форму фігури перерізу піраміди першою із площин. **4).** Побудуйте спільний перпендикуляр прямих, визначених на зображенні ребрами

31. На ребрах BC і A_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взято відповідно точки P і Q такі, що $BP : BC = 2 : 3$ і $A_1Q : A_1D_1 = 1 : 3$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через пряму C_1D перпендикулярно площині Σ , що задана трикутником (APQ) .

Метричну визначеність зображення куба обґрунтуйте самостійно.

Посилаючись на задані умовою відношення, в яких точки P і Q розділяють відповідні ребра куба (рис. 1.110), констатуємо (що очевидно): його перерізом площиною $\Sigma(APQ)$ буде паралелограм

піраміди SA і DC .

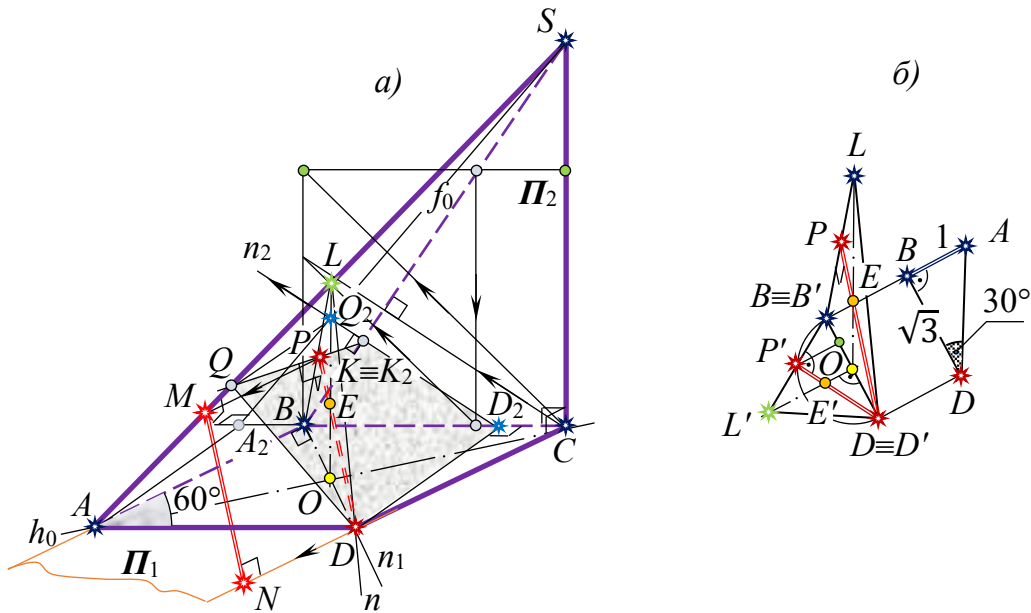


Рис. 1.111

34. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, гострий кут CBA якого рівний 45° . Бічне ребро SC перпендикулярне площині основи і $CB : BA : SC = 1 : 2 : 3$. **1)** Опустіть перпендикуляр із вершини C на ребро SA . **2)** Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через вершину C перпендикулярно ребру SA . **3)** Знайдіть справжню форму фігуру перерізу. **4)** Знайдіть градусну міру: а) кута нахилу ребра SA до площини основи піраміди; б) двогранного кута між площиною перерізу і основною площиною (рис. 3.112).

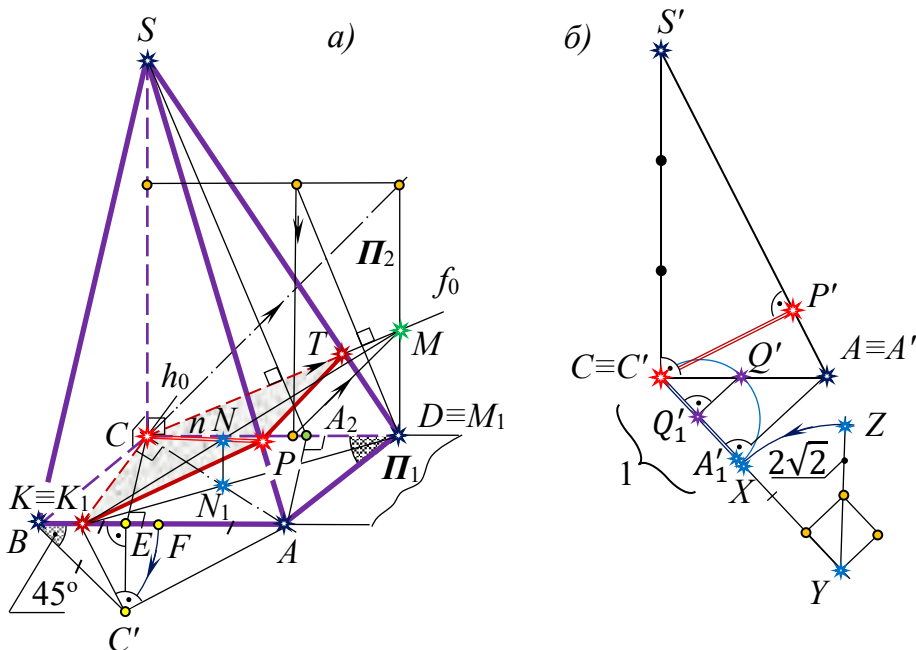


Рис. 1.112

Пропонуючи для розв'язання дві останні комплексні задачі, ми ставили за мету зробити наголос на тому факті, що в геометрії, як і у кресленні, можна не лише за професійно сконструйованим алгоритмом дій вирішувати питання закономірного візуального моделювання тієї чи іншої вербально сформульованої пропозиції, але також – формувати навички «прочитання» вже готових, наочно представлених вирішень

геометричних завдань в їх конструктивних реалізаціях.

Схожі вправи суто індивідуального характеру вельми корисні в розвитку особистісного наочно-образно і логічного мислення, сприяють розумінню методу, яким скористався автор у вирішенні завдання, розвитку уявлень і уяви, формують уміння цілісного сприйняття геометричних ситуацій із стереометричними фігурами, додають знань й усталених навичок конструктивізму.



СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ



1. **Боравльов А.П., Ленчук І.Г.** Аналіз у розв'язуванні задач на побудову : навч. посіб. К. : Вища школа, 2002. 192 с.
2. **Бурда М.І.** Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах : навч.-метод. посіб. К. : Радянська школа, 1986. 112 с.
3. **Ванін В.В, Перевертун В.В., Надкернична Т.М., Власюк Г.Г.** Інженерна графіка. К. : Видавнича група ВНУ, 2009. 400 с.
4. **Жовнір Я.М.** Позиційні задачі в стереометрії : посіб. для вчителя. К. : Освіта, 1991. 96 с.
5. **Ленчук І.Г.** Системний підхід у навчанні планіметричним побудовам : навч.-метод. посіб. Житомир: ЖДУ імені І. Франка, 2006. 154 с.
6. **Ленчук І.Г.** Конструктивна стереометрія в задачах : навч. посіб. Житомир: ЖДУ імені І. Франка, 2010. 367 с.
7. Методика викладання стереометрії / за ред. **О.М. Астряба і О.С. Дубинчук.** К. : Радянська школа, 1956. 280 с.
8. **Михайленко В.Є., Тесленко І.Ф.** Зв'язки у викладанні геометрії і креслення у середній школі : навч.-метод. посіб. К. : Радянська школа. 1965. 85 с.
9. **Погорєлов О.В.** Геометрія : Планіметрія : підручник для 7-9 класів середньої школи. К. : Освіта, 1998. 224 с.
10. **Погорєлов О.В.** Геометрія : Стереометрія : підручник для 10-11 класів середньої школи. К. : Освіта, 2002. 129 с.
11. **Прокопович Т.** Філософія в Києво-Могилянській академії : журн. Філософська думка. 1970. №5. С. 98-110.
12. **Слепкань З.І.** Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.
13. **Скрипченко О.В., Долинська Л.В., Огороднійчук З.В., Лисянська Т.М.** та ін. Загальна психологія : підручник для студентів. К. : Либідь, 2005. С. 464.
14. **Тесленко І.Ф., Боровик В.Н., Матюшко І.С., Рафаловський Е.В.** Геометрія : практикум з розв'язування задач : навч. посіб. К. : Вища школа, 1985. 184 с.

