№ 5(59) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online
УДК 004.896:519.6

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-5(59)-5203-5217

Мельник Анна Віталіївна кандидат педагогічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, https://orcid.org/0000-0001-7983-3598

Федорчук Анна Леонідівна кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, https://orcid.org/0000-0001-8227-3210

Постова Світлана Анатоліївна кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, https://orcid.org/0000-0002-0864-6290

Зіновчук Андрій Васильович кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, https://orcid.org/0000-0003-1376-853X

ГІБРИДНІ АРХІТЕКТУРИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПРОЄКТУВАННЯ НА ОСНОВІ ПОЄДНАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ГЛИБОКИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Анотація. Сучасна парадигма інженерного проєктування переживає фундаментальну трансформацію, зумовлену вичерпанням екстенсивних можливостей класичних чисельних методів, таких як метод скінченних елементів (FEM), метод скінченних об’ємів (FVM) або метод скінченних різниць (FDM). Необхідність розв’язання багатопараметричних задач оптимізації, створення цифрових двійників у реальному часі та аналізу надійності за умов невизначеності вимагає впровадження нових підходів, оскільки традиційні інструменти характеризуються надмірною обчислювальною трудомісткістю. Перспективним вирішенням цієї проблеми є застосування гібридних архітектур, що інтегрують математичні моделі фундаментальної фізики з глибокими нейронними мережами, забезпечуючи високу обчислювальну швидкість при збереженні фізичної достовірності.

ISSN 2786-6025 Online
Метою дослідження є систематизація теоретичних основ, аналіз архітектурної таксономії та оцінка практичної ефективності гібридних систем проєктування, що базуються на синергії математичного моделювання та глибокого навчання.

Досліджено концепцію вбудовування диференціальних рівнянь у частинних похідних (PDE) у функцію втрат нейронних мереж за допомогою автоматичного диференціювання. Здійснено порівняльний аналіз точкових фізично-інформованих нейронних мереж (PINN) та сучасних нейронних операторів (DeepONet, FNO, GNO, PINO). Розглянуто підходи до геометричного кодування CAD-моделей за допомогою знакових функцій відстані, R-функцій та графових нейронних мереж (GNN).

Визначено структурні особливості та переваги гібридних моделей порівняно з традиційними чисельними методами та суто емпіричним глибоким навчанням. Проаналізовано методи стабілізації процесів навчання через динамічне зважування втрат та адаптивну вибірку точок колокації. Досліджено прикладні кейси застосування гібридних моделей в ядерній енергетиці, обчислювальній гідродинаміці, теплообмінних системах, топологічній оптимізації та квантовій наноелектроніці при моделюванні систем рівнянь Шредінгера-Пуассона. Гібридні архітектури забезпечують кардинальне прискорення інженерного аналізу (до 100 разів при моделюванні перехідних процесів у ядерних реакторах за допомогою TL-PINN з похибкою менше 1%). Вони складають технологічну основу для цифрових двійників нового покоління та систем автоматизованого генеративного дизайну.
Ключові слова: гібридні архітектури, фізично-інформовані нейронні мережі, PINN, нейронні оператори, автоматичне диференціювання, DeepONet, Fourier Neural Operator, геометрична поінформованість, цифрові двійники, CAD/CAE системи, диференціальні рівняння.

Melnyk Anna Vitaliivna PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technologies, Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, https://orcid.org/0000-0001-7983-3598

Fedorchuk Anna Leonidivna PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technologies, Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, https://orcid.org/0000-0001-8227-3210

Postova Svitlana Anatoliivna PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technologies, Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, https://orcid.org/0000-0002-0864-6290

№ 5(59) 2026
Наука і техніка сьогодні
ISSN 2786-6025 Online
Zinovchuk Andriy Vasylovich PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technologies, Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, https://orcid.org/0000-0003-1376-853X

HYBRID ARCHITECTURES OF INTELLIGENT DESIGN SYSTEMS BASED ON THE COMBINATION OF MATHEMATICAL MODELS AND DEEP NEURAL NETWORKS

Abstract. The modern paradigm of engineering design is undergoing a fundamental transformation driven by the exhaustion of the extensive capabilities of classical numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM), Finite Volume Method (FVM), or Finite Difference Method (FDM). The need to solve multi-parametric optimization problems, create real-time digital twins, and conduct reliability analysis under conditions of uncertainty requires the implementation of new approaches, as traditional tools are characterized by excessive computational complexity.

A promising solution to this problem lies in the application of hybrid architectures that integrate mathematical models of fundamental physics with deep neural networks, ensuring high computational speed while preserving physical fidelity. The aim of this study is to systematize the theoretical foundations, analyze the architectural taxonomy, and evaluate the practical efficiency of hybrid design systems based on the synergy of mathematical modeling and deep learning. The concept of embedding partial differential equations (PDEs) into the loss function of neural networks via automatic differentiation is investigated. A comparative analysis is carried out between point-wise Physics-Informed Neural Networks (PINNs) and state-of-the-art neural operators (DeepONet, FNO, GNO, PINO). Approaches to the geometric encoding of CAD models using signed distance functions, R-functions, and Graph Neural Networks (GNNs) are considered.

The structural features and advantages of hybrid models compared to traditional numerical methods and purely empirical deep learning are determined. Methods for stabilizing training processes through dynamic loss weighting and adaptive collocation point sampling are analyzed. Applied case studies of hybrid models are explored in nuclear engineering, computational fluid dynamics (CFD), heat exchange systems, topology optimization, and quantum nanoelectronics when modeling Schrödinger-Poisson equation systems. Hybrid architectures provide a drastic acceleration of engineering analysis (up to 100 times when simulating transient processes in nuclear reactors using TL-PINN with an error of less than 1%). They form the technological foundation for next-generation digital twins and computer-aided generative design systems.

ISSN 2786-6025 Online

Keywords: hybrid architectures, physics-informed neural networks, PINN, neural operators, automatic differentiation, DeepONet, Fourier Neural Operator, geometric awareness, digital twins, CAD/CAE systems, differential equations.

Постановка проблеми. Сучасна парадигма інженерного проєктування переживає фундаментальну трансформацію, зумовлену вичерпанням екстенсивних можливостей традиційних обчислювальних методів у контексті вимог до швидкості та адаптивності розробок. Протягом десятиліть системи автоматизованого проєктування (CAD) та інженерного аналізу (CAE) базувалися виключно на чисельному розв'язанні диференціальних рівнянь у частинних похідних (PDE) за допомогою методів скінченних елементів (FEM), скінченних об'ємів (FVM) або скінченних різниць (FDM) [1; 2]. Хоча ці методи забезпечують високу точність, вони характеризуються надмірною обчислювальною трудомісткістю, особливо при виконанні багатопараметричної оптимізації, аналізі надійності за умов невизначеності або створенні цифрових двійників у реальному часі [3; 4]. Поява гібридних архітектур, що інтегрують математичні моделі фундаментальної фізики з глибокими нейронними мережами, маркує перехід до епохи інтелектуального проєктування, де швидкість нейромережевого отримання прогнозу з моделі поєднується з фізичною достовірністю класичних моделей [5; 6]. Таблиця 1 дає порівняльний аналіз парадигм інтелектуального моделювання.

Таблиця 1

Порівняльний аналіз парадигм інтелектуального моделювання

Характеристика	**Суто емпіричне глибоке навчання**	**Традиційні чисельні методи**	**Гібридні архітектури**
Джерело істини	Навчальний датасет	Математичне моделювання	Поєднання даних та фізичних законів
Обчислювальна швидкість	Дуже висока	Низька (ітеративне розв'язання)	Висока (після завершення навчання)
Потреба в даних	Екстремально висока	Мінімальна (тільки граничні умови)	Від низької до середньої
Фізична консистентність	Низька/Відсутня	Абсолютна (в межах дискретизації)	Висока (через штрафування за порушення законів)

ISSN 2786-6025 Online

Характеристика	Суто емпіричне глибоке навчання	Традиційні чисельні методи	Гібридні архітектури
Гнучкість геометрії	Обмежена структурою сітки	Висока (через складну генерацію сіток)	Висока (часто безсіткові методи)

[Джерело: 1; 8]

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Інтеграція штучного інтелекту в інженерне моделювання пройшла шлях від суто емпіричних моделей, що навчалися виключно на великих масивах даних, до гібридних структур, де фізичні закони вбудовані безпосередньо в топологію або функцію втрат нейронної мережі [7; 8]. Традиційні нейронні мережі часто ігнорують базові закони збереження, що призводить до отримання фізично некоректних результатів [1; 9].

Гібридні архітектури, зокрема нейронні мережі, що використовують закони фізики як основу для навчання, вирішують цю проблему шляхом використання диференціальних рівнянь у частинних похідних як регуляторів процесу навчання [1; 5; 10].

Гібридизація дозволяє значно знизити вимоги до обсягу навчальних даних, оскільки фізичні обмеження діють як потужне апріорне знання, що структурує простір пошуку параметрів мережі [3; 11]. Це особливо критично в інженерних доменах, таких як ядерна енергетика або глибоководне буріння, де отримання експериментальних даних є надзвичайно дороговартісним або небезпечним процесом [10; 12].

Незважаючи на значні успіхи фізично-інформованого глибокого навчання, залишається низка невирішених проблем. Зокрема, критичним викликом є інтеграція складної CAD-геометрії у безсіткові нейромережеві структури без втрати точності на межах областей [13].

Крім того, наявний суттєвий брак досліджень щодо ефективних методів стабілізації навчання за наявності конфліктів градієнтів різних компонентів цільової функції, а також застосування таких підходів у високоспецифічних фізичних задачах, таких як квантово-механічне моделювання наноструктур за допомогою систем рівнянь Шредінгера-Пуассона [14].

Метою статті є систематизація теоретичних основ побудови гібридних архітектур, дослідження сучасних підходів до геометричного кодування CAD-моделей, аналіз методів стабілізації навчання нейромережевих моделей та оцінка практичної ефективності використання гібридних систем у складних інженерних і фізичних задачах (включаючи ядерну енергетику, обчислювальну гідродинаміку, топологічну оптимізацію та квантову наноелектроніку).

ISSN 2786-6025 Online

Виклад основного матеріалу. Фундаментом гібридних архітектур є концепція вбудовування диференціальних рівнянь у функцію втрат нейронної мережі за допомогою автоматичного диференціювання [1; 11]. Це дозволяє мережі виступати не просто апроксиматором функцій, а сурогатним розв'язувачем крайових задач.

Для типової інженерної задачі, що описується PDE, загальна функція втрат L, яка конструюється як зважена сума кількох компонентів, що представляють різні аспекти фізичної системи [5; 9; 15]:

$$\mathcal{L}_{total} = \lambda_p \mathcal{L}_{pde} + \lambda_{bc} \mathcal{L}_{bc} + \lambda_{ic} \mathcal{L}_{ic} + \lambda_d \mathcal{L}_{data}$$

де:

$\mathcal{L}_{pde}$ мінімізує залишок керуючого рівняння у випадкових точках колокації всередині домену [1; 5].

$\mathcal{L}_{bc}$ забезпечує виконання граничних умов на межах геометрії [10; 15].

$\mathcal{L}_{ic}$ фіксує початковий стан системи для нестаціонарних процесів [8; 9].

$\mathcal{L}_{data}$ враховує наявні експериментальні вимірювання або дані сенсорів [5; 16].

Механізм автоматичного диференціювання дозволяє обчислювати точні похідні виходу мережі по її вхідних координатах без використання сіткових наближень, що усуває помилки дискретизації, характерні для скінченних різниць [1; 11]. Це робить гібридні системи ідеальними для задач з нерегулярною геометрією, де побудова якісної обчислювальної сітки є трудомістким процесом [1; 8].

Останні дослідження вказують на те, що нейронні мережі можна розглядати як дискретизовані динамічні системи, де архітектура мережі відповідає певній схемі розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ODE) [10].

Залежно від способу взаємодії нейронної мережі та математичної моделі, гібридні системи класифікують на кілька ключових типів [6].

Точкові моделі (Point-based PINNs) — це класична архітектура, де вхідними даними є координати простору та часу, а виходом — фізичні величини (швидкість, тиск, напруження) [15; 16]. Вони найкраще підходять для розв'язання конкретної задачі з фіксованими параметрами. Проте їхнім головним недоліком є необхідність повного перенавчання при зміні будь-якого вхідного параметра або граничної умови [5; 18].

Нейронні оператори (Neural Operators), такі як DeepONet та Fourier Neural Operator (FNO), представляють наступний крок в еволюції гібридних систем. Вони навчаються відображати цілі функціональні простори, тобто вчаться розв'язувати не одне рівняння, а ціле сімейство PDE [13; 18; 19].

ISSN 2786-6025 Online

Глибока операторна нейронна мережа (DeepONet): Базується на універсальній теоремі апроксимації операторів і складається з двох гілок — "branch network" та "trunk network" [20; 21].

Нейронний оператор Фур'є (FNO (Fourier Neural Operator)): Використовує перетворення Фур'є для реалізації глобальних згорток у частотній області. Це дозволяє ефективно враховувати багатомасштабні взаємодії в рідинах та газах [18]. Порівняльні характеристики розглянутих гібридних систем наведені в Таблиці 2.

Таблиця 2

Класифікація гібридних систем

Тип оператора	Архітектурна домінанта	Ключова перевага	Область застосування
DeepONet	Розділення функцій та координат	Стійкість до шумів у даних	Тверде тіло, контактні задачі
FNO	Спектральні згортки	Інваріантність до роздільної здатності	Турбулентність, метеорологія
GNO (Graph)	Графові нейронні мережі	Робота з нерегулярними сітками CAD	Аеродинаміка складних форм
PINO	Гібрид FNO та PINN втрат	Фізична консистентність оператора	Дистанційне зондування, двійники

[Джерело: 14; 16; 18; 19]

Одним із критичних викликів для гібридних систем є узгодження представлення геометрії в CAD (традиційно граничного представлення або нерівномірних раціональних B-сплайнів) з архітектурою нейронних мереж [1; 7]. Традиційні згорткові нейронні мережі вимагають регулярних сіток, що призводить до втрати точності на вигнутих поверхнях інженерних деталей [13; 25].

Для забезпечення "геометричної поінформованості" в фізично-інформованих нейронних мережах (PINN) інтегрують аналітичні описи геометрії. Причому знакові функції відстані дозволяють мережі миттєво визначати відстань до найближчої поверхні, що значно спрощує накладання граничних умов [2]. R-функції дозволяють конструювати складні об'єкти за допомогою логічних операцій, зберігаючи при цьому диференційованість функцій [2].

№ 5(59) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

Використання графових нейронних мереж (GNN) дозволяє працювати безпосередньо з неструктурованими сітками або хмарами точок, що генеруються CAD-системами [7; 13; 14]. Це дозволяє системі "розуміти" топологію об'єкта і передбачати вплив конструктивних особливостей на напружено-деформований стан без детального сіткового аналізу [12; 25].

Гібридні архітектури демонструють здатність вирішувати задачі, які раніше вважалися обчислювально неможливими для реального часу. В Таблиці 3 наведені приклади використання гібридних систем в деяких фізичних задачах.

В ядерній інженерії гібридні фізично-інформовані нейронні мережі використовуються для моделювання перехідних процесів у реакторах. Наприклад, TL-PINN дозволяє використовувати результати моделювання одного режиму для передбачення іншого з похибкою менше 1%, забезпечуючи прискорення обчислень у 100 разів.

Використання PINNs для розв'язання рівняння переносу Больцмана в гетерогенних середовищах дозволяє обійти складність дискретизації в фазовому просторі високої розмірності [15]. Це забезпечує точний розрахунок полів нейтронного потоку в активній зоні реактора [15].

У галузі обчислювальної гідродинаміки (CFD) гібридні системи дозволяють моделювати складні потоки, інтегруючи методи відстеження інтерфейсу у структуру нейронної мережі [15]. Це усуває потребу в надзвичайно дрібних сітках біля межі розподілу фаз.

Для систем теплообміну PINNs вбудовують рівняння теплопровідності в функцію втрат, що дозволяє проводити інверсне моделювання — наприклад, визначати невідому теплопровідність матеріалу за показами обмеженої кількості датчиків [8; 11].

Гібридні системи революціонізують процес створення легких та міцних конструкцій. Дуальні мережі дозволяють одночасно апроксимувати поле переміщень та розподіл щільності матеріалу [16]. Ці системи генерують оптимальні топології для 3D-друку значно швидше, ніж класичні алгоритми [25; 26].

Таблиця 3

Використання гібридних систем в деяких фізичних задачах

Інженерний кейс	**Фізична база (PDE)**	**Результат впровадження гібридної системи**
Автомобільні колеса	Лінійна еластичність	Генерація та оцінка 3D-моделей у реальному часі
МР-демпфери	Нелінійна динаміка	Точне моделювання гістерезису

Інженерний кейс	Фізична база (PDE)	Результат впровадження гібридної системи
Газові турбіни	Нав'є-Стокс + Теплопередача	Зменшення виробничого браку на 35%
Акумулятори	Кінетика Літій-іону	Прогнозування стану заряду з врахуванням деградації

[Джерело: 9; 12]

Ефективність гібридної системи критично залежить від стратегії навчання, оскільки поєднання фізичних втрат та втрат за даними часто призводить до конфліктів градієнтів [1; 5; 27].

Сучасні архітектури використовують динамічне зважування, де коефіцієнти λ коригуються автоматично на основі аналізу локальної кривини ландшафту втрат [1; 14]. Також застосовується адаптивна вибірка точок колокації, яка фокусує обчислювальні ресурси на ділянках з найбільшими залишками PDE [1; 27].

Використання попередньо навчених моделей дозволяє кардинально скоротити час розробки [15; 23; 25]. Наприклад, PINN, навчена на загальних рівняннях пружності, може бути швидко доналаштована для специфічної геометрії деталі, що забезпечує прискорення процесу аналізу в 23 рази [21].

Для підвищення стабільності використовується поєднання автоматичного диференціювання для перших похідних та скінченних різниць або спектральних методів для похідних вищих порядків [14]. Це дозволяє уникнути обчислювального вибуху в глибоких графах [2; 14].

Проєктування відповідальних об'єктів вимагає оцінки їхньої надійності за умов варіативності властивостей матеріалів [3]. Гібридні системи інтегрують методи аналізу надійності безпосередньо в цикл навчання. PINNs дозволяють проводити стохастичне моделювання значно швидше за методи Монте-Карло, зберігаючи фізичну достовірність навіть при екстраполяції в зону відмов [6; 24; 28].

Наступне покоління систем проєктування базуватиметься на концепції використання великих фундаментальних моделей штучного інтелекту, спеціально адаптованих для наукових задач, де величезні оператори навчаються на терабайтах даних з різних фізичних доменів [4; 29].

Завдяки швидкості отримання прогнозу з моделі, гібридні моделі стають ядром цифрових двійників [18; 24]. Вони здатні за мілісекунди обробляти дані з сенсорів і виявляти приховані дефекти ще до того, як вони призведуть до аварії [24; 28].

№ 5(59) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

Поєднання генеративних моделей з фізичними обмеженнями дозволяє реалізувати системи, які за текстовим описом вимог автоматично генерують 3D-геометрію, перевіряють її на міцність і готують файл для виробництва [1; 7; 30].

Оскільки основна ідея фізично-інформованих нейронних мереж полягає у включенні фізичних законів безпосередньо до функції втрат нейронної мережі, це дозволяє поєднати експериментальні дані з фундаментальними рівняннями квантової механіки. У контексті квантових структур такими рівняннями найчастіше виступають рівняння Шредінгера, Пуассона або їх самоузгоджені системи. Для таких систем важливо точно визначати просторовий розподіл хвильових функцій, енергетичні рівні та ймовірності тунелювання носіїв заряду. PINN дозволяють уникнути жорсткої дискретизації області, апроксимуючи розв’язок у неперервному просторі та забезпечуючи узгодженість із фізичними законами в кожній точці області визначення. Особливо перспективним є використання PINN для задач, пов’язаних із багатопараметричною оптимізацією квантових пристроїв.

Ще одним важливим аспектом є можливість використання PINN у задачах оберненого моделювання квантових систем. На основі обмеженої кількості експериментальних даних мережа може відновлювати приховані параметри потенціалу або матеріальних характеристик наноструктур. Це відкриває перспективи для автоматизованого аналізу експериментів у наноелектроніці та квантовій фотоніці. Таким чином, PINN поєднують високу гнучкість методів машинного навчання з фізичною коректністю класичних математичних моделей, що робить їх одним із перспективних підходів для дослідження складних квантових структур.

Висновки. Гібридні архітектури інтелектуальних систем проєктування, що базуються на синергії математичного моделювання та глибокого навчання, представляють собою найбільш перспективний шлях подолання обчислювальних обмежень сучасного інжинірингу. Вбудовування фізичних законів у нейромережеві структури дозволяє створювати моделі, що поєднують інтерпретованість класичної фізики з гнучкістю штучного інтелекту.

Література

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019. Vol. 378. P. 686-707.

2. Xiaoyan Shen, Hongkui Zhong and Ruiqing Han. A Physics-Informed Neural Network with Hybrid Architecture for Magnetic Core Loss Prediction Under Complex Conditions. *Mathematics*. 2025. Vol. 13, iss. 20. https://doi.org/10.3390/magnetochemistry12010007 (дата звернення: 24.04.2026).

ISSN 2786-6025 Online
3. Jan Bieniek, Innocent Boakye Ababio, Mohamed Rahouti, Dinesh C. Verma, Tom Sheffler. Evaluation of different approaches for the function matching problem Proceedings SPIE Digital Library. 2025. Volume 13473. https://doi.org/10.1117/12.3054057 (дата звернення: 24.04.2026).

4. Yuandi Wu, Patrick Kosierb, Alex McCafferty Leroux, Thomas French, Brett Sicard, S. Andrew Gadsden. Neural operators for surrogate modeling in complex dynamic systems. *SPIE Digital Library. 2025. Proceedings Volume 13473, https://doi.org/10.1117/12.3052304*

5. Luo K., Liao Sh., Guan Zh., Liu B. An enhanced hybrid adaptive physics-informed neural network for forward and inverse PDE problems. *Applied Intelligence*. 2025. Vol. 55, iss. 4. https://doi.org/10.1007/s10489-024-06195-2

6. Guo Ya., Ai X., Zhou Yi. Physics-Informed Multi-Task Generation: Toward Automated Risk Control Optimization. Reliability Engineering & System Safety2026. Volume 272, Part 1. https://doi.org/10.1016/j.ress.2026.112531

7. Karuppaswamy S.,. Bhakti Govind Shinde Ma, Akansh Garg , Shivendu Bhushan, Ninad Thorat, Ramesh S. AI-Driven Computer-Aided Design (CAD) Systems: Leveraging Neural Networks for Optimized Engineering Product Development. TPM. 2025. Vol. 32, № 5. P. 1600-1606.

8. Pang G., Lu L., Karniadakis G. E. fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks // SIAM Journal on Scientific Computing. 2019. Vol. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845.

9. Zhang Hui, Zhang Hongnan, Yuan Man, Li Xianguo, Li Bo. Residual-based physics-informed neural network modelling for coupled transport phenomena in porous gas diffusion layers. Energy and AI. № 24. 2026. https://doi.org/10.1016/j.egyai.2026.100735

10. Cai S., Mao Z., Wang Z. et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: A review // Acta Mechanica Sinica. 2022. Vol. 38. Article 422605. DOI: 10.1007/s10409-021-01148-1.

11. Jagtap A. D., Kharazmi E., Karniadakis G. E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 365. Article 113028. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113028.

12. Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F. et al. Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next // Journal of Scientific Computing. 2022. Vol. 92. Article 88. DOI: 10.1007/s10915-022-01939-z.

13. Li Haolin, Miao Yuyang, Zahra Khodaei Sharif, Aliabadi M.H. Finite-PINN: A physics-informed neural network with finite geometric encoding for solid mechanics. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. № 203. Article: 106222. 2025. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2025.106222

14. Khan M. R. et al. A Physics-Informed Neural Network-Based Waveguide Eigenanalysis. *IEEE Access*. VOLUME 12, 2024. P. 120777- 120787. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3452160

15. Nabian M. A., Gladstone R. J., Meidani H. Efficient training of physics-informed neural networks via importance sampling. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2021. Vol. 36, No. 8. P. 962–977. DOI: 10.1111/mice.12696.

16. Gao H., Sun L., Wang J.-X. PhyGeoNet: Physics-informed geometry-adaptive convolutional neural networks for solving parameterized steady-state PDEs on irregular domain // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 428. Article 110079. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.110079.

17. Li Zongyi, Zheng Hongkai, Kovachki Nikola, Jin David, Chen Haoxuan, Liu Burigede, Azizzadenesheli Kamyar, Anandkumar Anima. Physics-Informed Neural Operator for Learning Partial Differential Equations. ACM/IMS Journal of Data Science, Volume 1, Issue 3, Article No.: 9, P. 1-27. https://doi.org/10.1145/3648506

18. Zhang, D., Guo, L., Karniadakis, G.E. (2020). Learning in modal space: Solving time-dependent stochastic PDEs using physics-informed neural networks. SIAM Journal on Scientific Computing, 42 (2), A639-A665. DOI: 10.1137/19M1260141.

19. Sifan Wang, Wang Hanwen, Perdikaris Paris. Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed DeepONets. Science Advances. 2021. Vol. 7, Issue 40. DOI: 10.1126/sciadv.abi8605.

20. Bahmani Bahador, Goswami Somdatta, G. Kevrekidis Ioannis, D. Shields Michael. A resolution independent neural operator. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2025. Article: 118113. Volume: Volume 444. DOI: 10.1016/j.cma.2025.118113

21. White Colin, Berner Julius, Kossaifi Jean, Elleith Mogab, Pitt David, Leibovici Daniel, Li Zongyi, Azizzadenesheli Kamyar, Anandkumar Anima. Physics-Informed Neural Operators with Exact Differentiation on Arbitrary Geometries. DLDE-III Wksp in the 37th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2023). URL: https://openreview.net/pdf/0f3828969827c24cdf554cb7ec4717d4c70fa633.pdf (дата звернення: 24.04.2026).

22. Ngo Nghi Truyen Huynh, Pierre-André Garambois, François Colleoni, Jérôme Monnier. A hybrid physics–AI approach using universal differential equations with state-dependent neural networks for learnable, regionalizable, spatially distributed hydrological modeling. Geoscientific Model Development. 2026. Vol. 19, P. 1055-1074. https://doi.org/10.5194/gmd-19-1055-2026.

23. Yoo S., Lee S., Kim S. *et al.* Integrating deep learning into CAD/CAE system: generative design and evaluation of 3D conceptual wheel. *Struct Multidisc Optim* **64**, 2725–2747 (2021). https://doi.org/10.1007/s00158-021-02953-9.

24. Singh Ajendra, Chakraborty Souvik, Chowdhury A dual physics-informed neural network for topology optimization. Journal of Computational Physics. 2026. Article: 114666. Volume 551. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2026.114666.

25. Manmatharasan Piragash, Bitsuamlak Girma, Grolinger Katarina. AI-driven design optimization for sustainable buildings: A systematic review. Energy & Buildings. Vol. 332. 2025. https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2025.115440.

26. Yu J., Lu L., Meng X., Karniadakis G. E. Gradient-enhanced physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. Vol. 393. Article 114823. DOI: 10.1016/j.cma.2022.114823.

27. Luo Kuang, Liao Shaolin, Guan Zhong, Liu Baiquan. An enhanced hybrid adaptive physics-informed neural network for forward and inverse PDE problems. Applied Intelligence, Vol. 55(4). 2025. DOI: 10.1007/s10489-024-06195-2.

28. Salvatore Cuomo, Vincenzo Schiano Di Cola, Fabio Giampaolo, Gianluigi Rozza, Maziar Raissi, Francesco Piccialli. Scientific Machine Learning Through Physics–Informed Neural Networks: Where We Are and What's Next? Journal of Scientific Computing. 2022. Vol. 92. https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-022-01939-z

29. Integrating Deep Learning into CAD/CAE System: Case Study on Road Wheel. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2021. Structural and Multidisciplinary Optimization, Volume 64, Issue 4. P. 2725-2747 https://dl.acm.org/doi/abs/10.1007/s00158-021-02953-9

ISSN 2786-6025 Online

References

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019. Vol. 378. P. 686-707.

2. Xiaoyan Shen, Hongkui Zhong and Ruiqing Han. A Physics-Informed Neural Network with Hybrid Architecture for Magnetic Core Loss Prediction Under Complex Conditions. *Mathematics*. 2025. Vol. 13, iss. 20. https://doi.org/10.3390/magnetochemistry12010007

3. Jan Bieniek, Innocent Boakye Ababio, Mohamed Rahouti, Dinesh C. Verma, Tom Sheffler. Evaluation of different approaches for the function matching problem. *Proceedings SPIE Digital Library*. 2025. Vol. 13473. https://doi.org/10.1117/12.3054057

4. Yuandi Wu, Patrick Kosierb, Alex McCafferty Leroux, Thomas French, Brett Sicard, S. Andrew Gadsden. Neural operators for surrogate modeling in complex dynamic systems. *Proceedings SPIE Digital Library*. 2025. Vol. 13473. https://doi.org/10.1117/12.3052304

5. Luo K., Liao Sh., Guan Zh., Liu B. An enhanced hybrid adaptive physics-informed neural network for forward and inverse PDE problems. *Applied Intelligence*. 2025. Vol. 55, iss. 4. https://doi.org/10.1007/s10489-024-06195-2

6. Guo Ya., Ai X., Zhou Yi. Physics-Informed Multi-Task Generation: Toward Automated Risk Control Optimization. *Reliability Engineering & System Safety*. 2026. Vol. 272, Part 1. https://doi.org/10.1016/j.ress.2026.112531

7. Karuppaswamy S., Bhakti Govind Shinde Ma, Akansh Garg, Shivendu Bhushan, Ninad Thorat, Ramesh S. AI-Driven Computer-Aided Design (CAD) Systems: Leveraging Neural Networks for Optimized Engineering Product Development. *TRM*. 2025. Vol. 32, № 5. P. 1600-1606.

8. Pang G., Lu L., Karniadakis G. E. fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. Vol. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845

9. Zhang Hui, Zhang Hongnan, Yuan Man, Li Xianguo, Li Bo. Residual-based physics-informed neural network modelling for coupled transport phenomena in porous gas diffusion layers. *Energy and AI*. № 24. 2026. https://doi.org/10.1016/j.egyai.2026.100735

10. Cai S., Mao Z., Wang Z. et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: A review. *Acta Mechanica Sinica*. 2022. Vol. 38. Article 422605. DOI: 10.1007/s10409-021-01148-1

11. Jagtap A. D., Kharazmi E., Karniadakis G. E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 365. Article 113028. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113028

12. Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F. et al. Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next. *Journal of Scientific Computing*. 2022. Vol. 92. Article 88. DOI: 10.1007/s10915-022-01939-z

13. Li Haolin, Miao Yuyang, Zahra Khodaei Sharif, Aliabadi M.H. Finite-PINN: A physics-informed neural network with finite geometric encoding for solid mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. № 203. Article: 106222. 2025. https://doi.org/10.1016 /j.jmps.2025.106222

14. Khan M. R. et al. A Physics-Informed Neural Network-Based Waveguide Eigenanalysis. *IEEE Access*. Vol. 12, 2024. P. 120777- 120787. DOI: 10.1109/ACCESS.2024. 3452160

15. Nabian M. A., Gladstone R. J., Meidani H. Efficient training of physics-informed neural networks via importance sampling. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2021. Vol. 36, No. 8. P. 962–977. DOI: 10.1111/mice.12696

ISSN 2786-6025 Online
16. Gao H., Sun L., Wang J.-X. PhyGeoNet: Physics-informed geometry-adaptive convolutional neural networks for solving parameterized steady-state PDEs on irregular domain. *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 428. Article 110079. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.110079

17. Li Zongyi, Zheng Hongkai, Kovachki Nikola, Jin David, Chen Haoxuan, Liu Burigede, Azizzadenesheli Kamyar, Anandkumar Anima. Physics-Informed Neural Operator for Learning Partial Differential Equations. *ACM/IMS Journal of Data Science*. Vol. 1, Issue 3, Article No.: 9, P. 1-27. https://doi.org/10.1145/3648506

18. Zhang D., Guo L., Karniadakis G.E. Learning in modal space: Solving time-dependent stochastic PDEs using physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2020. Vol. 42(2). P. A639-A665. DOI: 10.1137/19M1260141

19. Sifan Wang, Wang Hanwen, Perdikaris Paris. Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed DeepONets. *Science Advances*. 2021. Vol. 7, Issue 40. DOI: 10.1126/sciadv.abi8605

20. Bahmani Bahador, Goswami Somdatta, G. Kevrekidis Ioannis, D. Shields Michael. A resolution independent neural operator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2025. Vol. 444. Article: 118113. DOI: 10.1016/j.cma.2025.118113

21. White Colin, Berner Julius, Kossaifi Jean, Elleith Mogab, Pitt David, Leibovici Daniel, Li Zongyi, Azizzadenesheli Kamyar, Anandkumar Anima. Physics-Informed Neural Operators with Exact Differentiation on Arbitrary Geometries. *DLDE-III Wksp in the 37th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2023)*. URL: https://openreview.net/pdf/0f3828969827c24cdf554cb7ec4717d4c70fa633.pdf

22. Ngo Nghi Truyen Huynh, Pierre-André Garambois, François Colleoni, Jérôme Monnier. A hybrid physics–AI approach using universal differential equations with state-dependent neural networks for learnable, regionalizable, spatially distributed hydrological modeling. *Geoscientific Model Development*. 2026. Vol. 19. P. 1055-1074. https://doi.org/10.5194/gmd-19-1055-2026

23. Yoo S., Lee S., Kim S. et al. Integrating deep learning into CAD/CAE system: generative design and evaluation of 3D conceptual wheel. *Struct Multidisc Optim*. 2021. Vol. 64. P. 2725–2747. https://doi.org/10.1007/s00158-021-02953-9

24. Singh Ajendra, Chakraborty Souvik, Chowdhury. A dual physics-informed neural network for topology optimization. *Journal of Computational Physics*. 2026. Vol. 551. Article: 114666. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2026.114666

25. Manmatharasan Piragash, Bitsuamlak Girma, Grolinger Katarina. AI-driven design optimization for sustainable buildings: A systematic review. *Energy & Buildings*. Vol. 332. 2025. https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2025.115440

26. Yu J., Lu L., Meng X., Karniadakis G. E. Gradient-enhanced physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 393. Article 114823. DOI: 10.1016/j.cma.2022.114823

27. Luo Kuang, Liao Shaolin, Guan Zhong, Liu Baiquan. An enhanced hybrid adaptive physics-informed neural network for forward and inverse PDE problems. *Applied Intelligence*. Vol. 55(4). 2025. DOI: 10.1007/s10489-024-06195-2

28. Salvatore Cuomo, Vincenzo Schiano Di Cola, Fabio Giampaolo, Gianluigi Rozza, Maziar Raissi, Francesco Piccialli. Scientific Machine Learning Through Physics–Informed Neural Networks: Where We Are and What's Next? *Journal of Scientific Computing*. 2022. Vol. 92. https://link.springer.com/article/10.1007/s10915-022-01939-z

ISSN 2786-6025 Online
29. Integrating Deep Learning into CAD/CAE System: Case Study on Road Wheel. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2021. Volume 64, Issue 4. P. 2725-2747. https://dl.acm.org/doi/abs/10.1007/s00158-021-02953-9

Дата першого надходження статті до видання: 05.05.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 21.05.2026