

Володимир Рязанов (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.; Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького),

Руслан Салімов (Інститут математики НАН України, Київ),

Євген Севостьянов¹ (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ БЕЛЬТРАМІ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ

We consider the problem of local behavior of solutions of the Beltrami equations in arbitrary domains. We have found sufficient conditions for the complex coefficient of the Beltrami equation guaranteeing the existence of its Hölder continuous solution in an arbitrary domain. These results can be used in the boundary-value problems for the Beltrami equation, as well as in the hydromechanics of strongly anisotropic and inhomogeneous media.

Розглядається задача про локальну поведінку розв'язків рівнянь Бельтрамі в довільних областях. Знайдено достатні умови на комплексний коефіцієнт рівняння Бельтрамі, що забезпечують існування її розв'язку в довільній області, який є в ній неперервним за Гельдером. Ці результати можна застосовувати до крайових задач для рівняння Бельтрамі та в гідромеханіці в сильно анізотропних і неоднорідних середовищах.

1. Вступ. Нехай D — область комплексної площини $\mathbb{C}$ тобто, зв'язна відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с. (майже скрізь) у D . Рівнянням Бельтрамі називається рівняння

$$\bar{f}_z = \mu(z)f_z, \quad (1)$$

де $\bar{f}_z = \partial f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, а f_x і f_y — частинні похідні від f по x та y відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом* цього рівняння, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

— *максимальною дилатацією* рівняння (1). Рівняння Бельтрамі (1) називається *виродженням*, якщо $\text{ess sup } K_\mu(z) = \infty$. Існування гомеоморфних $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язків нещодавно було встановлено для багатьох вироджених рівнянь Бельтрамі (див., наприклад, відповідні посилання в монографіях [1, 2] та обзорах [3, 4]).

Для заданої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ *дотичною дилатацією* рівняння (1) по відношенню до точки $z_0 \in \mathbb{C}$ називається величина

$$K_\mu^T(z, z_0) = \frac{\left| 1 - \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} \mu(z) \right|^2}{1 - |\mu(z)|^2}.$$

У подальшому будемо вважати, що K_μ і K_μ^T продовжені тотожною одиницею зовні області D .

Покладемо $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $\mathbb{D} = B(0, 1)$, $S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ і $A(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Найбільш важливими результатами статті є такі твердження.

¹ Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

Теорема 1. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{C}$ і $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с., до того ж $K_\mu \in L^1(D)$. Припустимо також, що

$$\frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B(z_0, \varepsilon)} K_\mu^T(z, z_0) dm(z) < K < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta), \quad (2)$$

де δ — евклідов діаметр області D .

Тоді рівняння Бельтрамі (1) має неперервний за Гельдером гомеоморфний $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок у D , який має неперервне за Гельдером продовження в $\overline{D}$.

Зауваження 1. Нехай $q_{z_0}^T(t)$ і $q_{x_0}(t)$ — інтегральні середні по колу $S(z_0, t)$ від $K_\mu^T(z, z_0)$ та $K_\mu(z)$ відповідно і

$$M_{z_0}^T(\varepsilon, \delta) := \frac{1}{\delta} \int_{\ln \frac{\delta}{\varepsilon}}^{\delta} q_{z_0}^T(t) d \ln t, \quad M_{z_0}(\varepsilon, \delta) := \frac{1}{\delta} \int_{\ln \frac{\delta}{\varepsilon}}^{\delta} q_{z_0}(t) d \ln t$$

— логарифмічні середні від $q_{z_0}^T(t)$ і $q_{x_0}(t)$.

Тоді висновок теореми 1 є правильним, якщо в (2) замінити K_μ^T на K_μ або умову (2) замінити однією з умов: $M_{z_0}^T(\varepsilon, \delta) < K$ або $M_{z_0}(\varepsilon, \delta) < K$ для всіх $z_0 \in \overline{D}$ і $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Теорема 2. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{C}$, δ — її евклідов діаметр, $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с., до того ж $K_\mu(z) \in L^1(D)$. Припустимо, що для деякого $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left(\alpha - \frac{1}{q_{z_0}^T(t)} \right) \frac{dt}{t} < C < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta), \quad (3)$$

де $q_{z_0}^T(t)$ позначає інтегральне середнє функції $K_\mu^T(z, z_0)$ по колу $S(z_0, t)$.

Тоді рівняння Бельтрамі (1) має гомеоморфний $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок у D , який є неперервним за Гельдером з показником α та має α -неперервне за Гельдером продовження в $\overline{D}$.

Наслідок 1. Зокрема, висновок теореми 2 є справедливим, якщо для деякого $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left(\alpha - \frac{1}{q_{z_0}(t)} \right) \frac{dt}{t} < C < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta),$$

де $q_{z_0}(t)$ позначає інтегральне середнє функції $K_\mu(z)$ по колу $S(z_0, t)$.

Теорема 3. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{C}$, δ — її евклідов діаметр, $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с., до того ж $K_\mu(z) \in L^1(D)$. Припустимо, що

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left(1 - \frac{1}{q_{z_0}^T(t)} \right) \frac{dt}{t} < C < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta),$$

де $q_{z_0}^T(t)$ — інтегральне середнє функції $K_\mu^T(z, z_0)$ по колу $S(z_0, t)$.

Тоді рівняння Бельтрамі (1) має гомеоморфний $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок у D , який є неперервним за Ліпшицем та має неперервне за Ліпшицем продовження в $\overline{D}$.

Наслідок 2. Зокрема, висновок теореми 3 є правильним, якщо виконується умова

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left(1 - \frac{1}{q_{z_0}(t)}\right) \frac{dt}{t} < C < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta),$$

де $q_{z_0}(t)$ — інтегральне середнє функції $K_{\mu}(z)$ по колу $S(z_0, t)$.

Теорема 4. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{C}$, δ — її евклідов діаметр, $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с., до того ж $K_{\mu}(z) \in L^1(D)$. Припустимо, що виконується співвідношення

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \delta} \frac{K_{\mu}^T(z, z_0)}{|z - z_0|^2} dm(z) < C \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta).$$

Тоді рівняння Бельтрамі (1) має гомеоморфний $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок у D , який є неперервним за Гельдером з показником α та має α -неперервне за Гельдером продовження в $\overline{D}$, до того ж $\alpha = 2\pi/C$.

Наслідок 3. Зокрема, твердження теореми 4 справджується, якщо

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \delta} \frac{K_{\mu}(z)}{|z - z_0|^2} dm(z) < C \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta).$$

Теорема 5. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{C}$, δ — її евклідов діаметр, $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову $|\mu(z)| < 1$ м. с., до того ж $K_{\mu}(z) \in L^1(D)$. Припустимо, що виконується співвідношення

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \delta} \frac{K_{\mu}^T(z, z_0)}{|z - z_0|^2} dm(z) < 2\pi \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta).$$

Тоді рівняння Бельтрамі (1) має гомеоморфний $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок, неперервний за Ліпшицем у D , який має неперервне за Ліпшицем продовження в $\overline{D}$.

Наслідок 4. Зокрема, твердження теореми 5 справджується, якщо

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \delta} \frac{K_{\mu}(z)}{|z - z_0|^2} dm(z) < 2\pi \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta).$$

2. Ємності кілець, конформний модуль, відповідні означення та факти. Для заданої області D і множин E і F у $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ позначимо через $\Delta(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma: [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, які з'єднують E і F у D , іншими словами, $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Покладемо $\Delta(E, F) := \Delta(E, F, \overline{\mathbb{C}})$.

Кільцевою областю (або скорочено кільцем) у $\overline{\mathbb{C}}$ називається двозв'язна область R у $\overline{\mathbb{C}}$. Нехай R — кільце в $\overline{\mathbb{C}}$. Якщо C_1 і C_2 — компоненти $\overline{\mathbb{C}} \setminus R$, будемо записувати це у вигляді $R = R(C_1, C_2)$. Як відомо, 2-ємність і модуль сімей кривих $\Delta(C_1, C_2, R)$ збігаються, тобто

$$\text{cap } R(C_1, C_2) = M(\Delta(C_1, C_2, R)) \quad (4)$$

(див., наприклад, [5–7], а також додаток А.1 у [2]). Зауважимо, що

$$M(\Delta(C_1, C_2, R)) = M(\Delta(C_1, C_2))$$

(див., наприклад, теорему 11.3 у [8]).

Нагадаємо також означення так званих кільцевих Q -гомеоморфізмів, адаптоване до комплексної площини $\mathbb{C}$. Нехай D — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $r_0 \leq \text{dist}(z_0, \partial D)$ і $Q: B(z_0, r_0) \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна функція. Згідно з [2, 3], гомеоморфізм $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ будемо називати *кільцевим Q -гомеоморфізмом* у точці z_0 , якщо співвідношення

$$M(\Delta(f(S_1), f(S_2), f(D))) \leq \int_A Q(z) \eta^2(|z - z_0|) dx dy \quad (5)$$

виконується для довільного кругового кільця $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, межових кіл $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$, і довільної вимірної функції $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

3. Оцінки спотворення відстані. Доведення наступної леми впливає з означення кільцевого Q -гомеоморфізму, якщо в (5) функція $\eta(t) := \psi(t)/I(\varepsilon)$.

Лема 1. Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $z_0 \in D$, $Q: B(z_0, r_0) \rightarrow [0, \infty]$, $r_0 \leq \text{dist}(z_0, \partial D)$, і $\psi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна функція, така що

$$0 < I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 < r_0.$$

Тоді для кільця $A(\varepsilon) := A(z_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ і його межових компонент C і C_0 виконується співвідношення

$$M(\Delta(f(C), f(C_0), f(D))) \leq \omega(\varepsilon) := \frac{1}{I^2(\varepsilon)} \int_{A(\varepsilon)} Q(z) \psi^2(|z - z_0|) dm(z).$$

У подальшому будемо дотримуватися таких домовленостей: $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ і $0 \cdot \infty = 0$ (див., наприклад, розділ І.3 в [9]).

Нехай $z, \zeta \in \overline{\mathbb{C}}$. Хордальну (сферичну) відстань $h(z, \zeta)$ між точками z і ζ визначимо з огляду на співвідношення

$$h(z, \zeta) = \frac{|z - \zeta|}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } z \neq \infty \neq \zeta,$$

$$h(z, \infty) = \frac{1}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } z \neq \infty.$$

Для заданої множини $E \subset \mathbb{C}$ позначимо через $h(E)$ її хордальний діаметр, визначений співвідношенням

$$h(E) = \sup_{z, \zeta \in E} h(z, \zeta).$$

Зауважимо, що для всіх $z, \zeta \in \mathbb{C}$ $h(z, \zeta) \leq |z - \zeta|$, до того ж для всіх $z, \zeta \in \mathbb{D}$ виконується нерівність

$$h(z, \zeta) \geq \frac{1}{2}|z - \zeta|, \quad (6)$$

яка переходить у рівність на $\partial\mathbb{D}$.

Основне смислове навантаження містить у собі наступна лема, яка забезпечує доведення основних результатів статті.

Лема 2. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо також, що існує невід'ємна вимірна функція $\psi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ така, що співвідношення

$$\int_{\varepsilon < |z - \zeta| < d(S)} Q_\zeta(z) \psi^2(|z - \zeta|) dm(z) \leq C I^p(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, d(S)], \quad (7)$$

виконано при деякому $p \leq 2$ у кожній точці $\zeta \in S$, де

$$0 < I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{d(S)} \psi(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, d(S)].$$

Тоді існує стала $L > 0$, можливо, залежна від f , така що для всіх $\eta, \zeta \in S$

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L \exp \left(-\frac{2\pi}{C} \left(\int_{|\eta - \zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{2-p} \right).$$

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що образ компакта S при відображенні f належить одиничному кругу $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$. Покладемо

$$A = \{z \in \mathbb{C}: |\eta - \zeta| < |z - \zeta| < d(S)\}.$$

Для $\zeta \in S$ позначимо через E_ζ компоненту $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(A)$, що містить $f(\zeta)$, а через F_ζ компоненту цієї ж множини, що містить ∞ . За відомою лемою Герінга отримуємо, що

$$\text{cap} R(E_\zeta, F_\zeta) \geq \text{cap} R_T \left(\frac{1}{h(E_\zeta)h(F_\zeta)} \right), \quad (8)$$

де $R_T(t)$ — кільце Тейхмюлера

$$R_T(t) = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1, 0] \cup [t, \infty]), \quad t > 1$$

(див., наприклад, [7] або наслідок 7.37 у [10]). Зауважимо, що

$$\text{cap} R_T(t) = \frac{2\pi}{\log \Phi(t)},$$

де Φ — деяка функція, що задовольняє оцінки

$$t + 1 \leq \Phi(t) \leq 16(t + 1) < 32t, \quad t > 1$$

(див., наприклад, [7, с. 225, 226] або співвідношення (7.19) і лему 7.22 у [10]). З огляду на співвідношення (8) отримуємо, що

$$\operatorname{cap} R(E_\zeta, F_\zeta) \geq \frac{2\pi}{\log \frac{32}{h(E_\zeta)h(F_\zeta)}}$$

і, отже,

$$h(E_\zeta) \leq \frac{32}{h(F_\zeta)} \exp\left(-\frac{2\pi}{\operatorname{cap} R(E_\zeta, F_\zeta)}\right). \quad (9)$$

Далі, застосовуючи співвідношення (4), (5) і лему 1, приходимо до оцінки

$$\operatorname{cap} R(E_\zeta, F_\zeta) \leq \frac{1}{I^2(|\eta - \zeta|)} \int_{|\eta - \zeta| < |z - \zeta| < d(S)} Q_\zeta(z) \psi^2(|z - \zeta|) dm(z).$$

У такому випадку з огляду на співвідношення (7) маємо нерівність

$$\operatorname{cap} R(E_\zeta, F_\zeta) \leq C \left(\int_{|\eta - \zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{p-2}. \quad (10)$$

Поєднуючи тепер (9) і (10), одержуємо, що

$$h(E_\zeta) \leq \frac{32}{h(F_\zeta)} \exp\left(-\frac{2\pi}{C} \left(\int_{|\eta - \zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{2-p}\right)$$

і, отже,

$$h(f(\eta), f(\zeta)) \leq \frac{32}{h(F_\zeta)} \exp\left(-\frac{2\pi}{C} \left(\int_{|\eta - \zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{2-p}\right).$$

Зауважимо, що $S \subset T := \bigcup_{\zeta \in S} \overline{B(\zeta, d(S))}$ і T є компактом у $\mathbb{C}$. Тоді $f(T)$ також є компактом у $\mathbb{C}$, оскільки f — гомеоморфізм. Отже, $h(f(V)) > 0$, де $V := \mathbb{C} \setminus T$. І навіть більше,

$$f(V) \subseteq F_\zeta = f(\mathbb{C} \setminus B(\zeta, d(S))) \quad \forall \zeta \in S.$$

З останнього співвідношення випливає, що $h(F_\zeta) \geq h(f(V)) > 0$ при всіх $\zeta \in S$, тому

$$h(f(\eta), f(\zeta)) \leq \frac{32}{h(f(V))} \exp\left(-\frac{2\pi}{C} \left(\int_{|\eta - \zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{2-p}\right).$$

Враховуючи включення $f(S) \subset \mathbb{D}$ і нерівність (6), отримуємо, що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L \exp \left(-\frac{2\pi}{C} \left(\int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right)^{2-p} \right),$$

де $L = \frac{64}{h(f(V))}$.

Лемму 2 доведено.

Наступний важливий наслідок випливає з леми 2 при $p = 1$.

Наслідок 5. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що існує невід'ємна функція $\psi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ така, що при всіх $\zeta \in S$

$$\int_{\varepsilon < |z-\zeta| < d(S)} Q_\zeta(z) \psi^2(|z-\zeta|) dm(z) \leq CI(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, d(S)],$$

де

$$0 < I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{d(S)} \psi(t) dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, d(S)].$$

Тоді існує стала $L > 0$, залежна, можливо, від f , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L \exp \left(-\frac{2\pi}{C} \int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \psi(t) dt \right) \quad \forall \eta, \zeta \in S.$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з леми 2 при $p = 1$ і $\psi(t) = \frac{1}{t}$.

Теорема 6. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що

$$\int_{\varepsilon < |z-\zeta| < d(S)} \frac{Q_\zeta(z)}{|z-\zeta|^2} dm(z) \leq C \ln \left(\frac{d(S)}{\varepsilon} \right) \quad \forall \zeta \in S, \quad \varepsilon \in (0, d(S)].$$

Тоді існує стала $L > 0$, можливо, залежна від f , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L |\eta - \zeta|^{\frac{2\pi}{C}} \quad \forall \eta, \zeta \in S,$$

тобто відображення f є неперервним за Гельдером з показником $\alpha = 2\pi/C$.

Наслідок 6. Зокрема, відображення f з теореми 6 є неперервним за Ліпішицем, якщо $C = 2\pi$.

Наступну інтегральну рівність можна знайти в [11] (лема 10.4).

Твердження 1. Нехай φ — вимірний за Лебегом функція, визначена в крузі $B(z_0, \varepsilon_0)$, і

$$\eta_\varphi(t) = \frac{1}{\pi t^2} \int_{B(z_0, t)} \varphi(z) dm(z), \quad 0 < t \leq \varepsilon_0.$$

Тоді виконуються співвідношення

$$\int_{A(z_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(z)}{|z - z_0|^2} dm(z) = \pi(\eta_\varphi(\varepsilon_0) - \eta_\varphi(\varepsilon)) + 2\pi \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\eta_\varphi(t)}{t} dt.$$

Ґрунтуючись на твердженні 1, встановимо такий факт.

Лема 3. Нехай $Q_\zeta : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — вимірний за Лебегом функція, така що

$$\sup_{r \in (0, d(S))} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(\zeta, r)} Q_\zeta(z) dm(z) < K < \infty. \quad (11)$$

Тоді

$$\int_{A(\zeta, \varepsilon, d(S))} \frac{Q_\zeta(z)}{|z - \zeta|^2} dm(z) \leq 2\pi K \ln\left(\frac{e d(S)}{\varepsilon}\right) \quad \forall \varepsilon \in (0, d(S)).$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0, d(S))$. З огляду на твердження 1 отримуємо

$$J = \int_{A(\zeta, \varepsilon, d(S))} \frac{Q_\zeta(z)}{|z - \zeta|^2} dm(z) = \pi(\eta_Q(d(S)) - \eta_Q(\varepsilon)) + 2\pi \int_\varepsilon^{d(S)} \frac{\eta_Q(t)}{t} dt,$$

$$\text{де } \eta_Q(t) := \frac{1}{\pi t^2} \int_{B(\zeta, t)} Q_\zeta(z) dm(z).$$

Застосовуючи нерівність трикутника і використовуючи умову (11), одержуємо

$$\begin{aligned} J = |J| &\leq \pi|\eta_Q(d(S)) - \eta_Q(\varepsilon)| + 2\pi \left| \int_\varepsilon^{d(S)} \frac{\eta_Q(t)}{t} dt \right| \\ &\leq \pi(|\eta_Q(d(S))| + |\eta_Q(\varepsilon)|) + 2\pi K \int_\varepsilon^{d(S)} \frac{dt}{t} \leq 2\pi K + 2\pi K \ln\left(\frac{d(S)}{\varepsilon}\right) \\ &= 2\pi K \ln\left(\frac{e d(S)}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

Лему 3 доведено.

Теорема 7. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що

$$\sup_{r \in (0, d(S)]} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(\zeta, r)} Q_\zeta(z) dm(z) < K < \infty \quad \forall \zeta \in S. \quad (12)$$

Тоді існує стала $L > 0$, можливо, залежна від f , така що при всіх η і $\zeta \in S$

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L |\eta - \zeta|^{\frac{1}{2K}}.$$

Доведення. З огляду на співвідношення (12) та за лемою 3 отримуємо, що для всіх $\zeta \in S$ і $\varepsilon \in (0, d(S)]$ виконується нерівність

$$\int_{\varepsilon < |z - \zeta| < d(S)} \frac{Q_\zeta(z)}{|z - \zeta|^2} dm(z) \leq 2\pi K \ln\left(\frac{ed(S)}{\varepsilon}\right) \leq 4\pi K \ln\left(\frac{d(S)}{\varepsilon}\right).$$

У такому випадку бажаний висновок випливає з теореми 6 при $C = 4\pi K$.

Теорему 7 доведено.

Інший наслідок з теореми 6 може бути сформульований у термінах логарифмічного середнього функції Q_ζ над кільцем $A(\varepsilon) = A(\zeta, \varepsilon, d(S)) = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z - \zeta| < d(S)\}$, яке визначено з використанням співвідношення

$$M_{\log}^{Q_\zeta}(\varepsilon) := \frac{1}{\ln\left(\frac{d(S)}{\varepsilon}\right)} \int_{\varepsilon}^{d(S)} q_\zeta(t) d \ln t,$$

де $q_\zeta(t)$ позначає інтегральне середнє значення функції Q_ζ по колу $\{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| = t\}$.

Наслідок 7. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що

$$M_{\log}^{Q_\zeta}(\varepsilon) \leq K < \infty \quad \forall \zeta \in S, \quad \varepsilon \in (0, d(S)]. \quad (13)$$

Тоді існує стала $L > 0$, можливо, залежна від f , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L |\eta - \zeta|^{\frac{1}{K}} \quad \forall \eta, \zeta \in S. \quad (14)$$

Доведення. За теоремою Фубіні отримуємо

$$\int_{\varepsilon < |z - \zeta| < d(S)} \frac{Q_\zeta(z)}{|z - \zeta|^2} dm(z) = 2\pi \int_{\varepsilon}^{d(S)} q_\zeta(t) \frac{dt}{t} = 2\pi M_{\log}^{Q_\zeta}(\varepsilon) \ln\left(\frac{d(S)}{\varepsilon}\right).$$

І навіть більше, використовуючи співвідношення (13), одержуємо

$$\int_{\varepsilon < |z - \zeta| < d(S)} \frac{Q_\zeta(z)}{|z - \zeta|^2} dm(z) \leq 2\pi K \ln\left(\frac{d(S)}{\varepsilon}\right).$$

Остаточно, застосовуючи теорему 6 при $C = 2\pi K$, приходимо до (14).

Наступна лема стосується верхніх оцінок спотворення евклідової відстані при відображеннях з використанням середніх функції Q_ζ по колу.

Лема 4. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Тоді існує стала $L > 0$, можливо, залежна від f , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L \exp \left(- \int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \frac{dt}{tq_\zeta(t)} \right) \quad \forall \eta, \zeta \in S, \quad (15)$$

де $q_\zeta(t)$ — інтегральне середнє значення функції Q_ζ по колу $S(\zeta, t)$, $t \in (0, d(S))$.

Доведення. Справді, вибираючи функцію

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{tq_\zeta(t)}, & t \in (0, d(S)), \\ 0, & t \in [d(S), \infty), \end{cases}$$

і застосовуючи теорему Фубіні до наведеного нижче інтеграла, отримуємо

$$\int_{\varepsilon < |z-\zeta| < d(S)} Q_\zeta(z) \cdot \psi^2(|z-\zeta|) dm(z) = 2\pi \int_{\varepsilon}^{d(S)} q_\zeta(t) \psi^2(t) t dt = 2\pi \int_{\varepsilon}^{d(S)} \frac{dt}{tq_\zeta(t)}.$$

Використовуючи наслідок 5 зі сталою $C = 2\pi$, одержуємо бажану оцінку (15).

Наступна теорема містить у собі твердження щодо неперервності за Гельдером для відповідних відображень.

Теорема 8. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що існує $\alpha \in (0, 1]$ таке, що

$$\int_{\varepsilon}^{d(S)} \left(\alpha - \frac{1}{q_\zeta(t)} \right) \frac{dt}{t} \leq K < \infty \quad \forall \zeta \in S, \quad \varepsilon \in (0, d(S)). \quad (16)$$

Тоді знайдеться стала $L' > 0$, залежна, можливо, від f , α і K , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L' |\eta - \zeta|^\alpha \quad \forall \eta, \zeta \in S. \quad (17)$$

Іншими словами, відображення f є неперервним за Гельдером з показником α на S .

Доведення. Справді, за лемою 4 маємо

$$\frac{|f(\eta) - f(\zeta)|}{|\eta - \zeta|^\alpha} \leq \frac{L \exp \left(- \int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \frac{dt}{tq_\zeta(t)} \right)}{|\eta - \zeta|^\alpha} \quad \forall \eta, \zeta \in S. \quad (18)$$

І навіть більше, шляхом безпосередніх обчислень отримуємо

$$|\eta - \zeta|^\alpha = d^\alpha(S) \exp \left(- \alpha \int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \frac{dt}{t} \right).$$

Тоді з огляду на співвідношення (18) одержуємо

$$\frac{|f(\eta) - f(\zeta)|}{|\eta - \zeta|^\alpha} \leq \frac{L \exp\left(-\int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \frac{dt}{t q_\zeta(t)}\right)}{d^\alpha(S) \exp\left(-\alpha \int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \frac{dt}{t}\right)} = \frac{L}{d^\alpha(S)} \exp\left(\int_{|\eta-\zeta|}^{d(S)} \left(\alpha - \frac{1}{q_\zeta(t)}\right) \frac{dt}{t}\right).$$

Остаточно, з урахуванням (16) приходимо до оцінки (17), в якій $L' = \frac{Le^K}{d^\alpha(S)}$.

Наступне твердження стосується неперервності відображень за Ліпшицем і може бути отримано як наслідок з теореми 8 при $\alpha = 1$.

Наслідок 8. Нехай S — компактна підмножина $\mathbb{C}$, $d(S) > 0$ — евклідов діаметр S і $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — кільцевий Q_ζ -гомеоморфізм у кожній точці $\zeta \in S$, де $Q_\zeta: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ — деяка функція. Припустимо, що

$$\int_{\varepsilon}^{d(S)} \left(1 - \frac{1}{q_\zeta(t)}\right) \frac{dt}{t} \leq K < \infty \quad \forall \zeta \in S, \quad \varepsilon \in (0, d(S)).$$

Тоді існує стала $L' > 0$, залежна, можливо, від f і K , така що

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \leq L' |\eta - \zeta| \quad \forall \eta, \zeta \in S.$$

4. Доведення основних результатів. Доведення теореми 1. За теоремою 7.2 в [1] рівняння Бельтрамі (1) має $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, який є кільцевим Q_ζ -гомеоморфізмом у кожній точці $\zeta \in \mathbb{C}$ при $Q_\zeta(z) = K_\mu^T(z, \zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, де μ вважається продовженою нулем зовні області D . Отже, твердження теореми 1 безпосередньо випливає з теореми 7 при $\zeta = z_0$ і $S := \overline{D}$.

Зауваження 1 випливає з наслідку 7 шляхом міркувань, аналогічних тим, що були використані при доведенні теореми 7.4 в [1].

Доведення теореми 2. З огляду на (3)

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dt}{t q_{z_0}^T(t)} > \alpha \ln \frac{\delta}{\varepsilon} - C \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \delta). \quad (19)$$

З (19) випливає, що $\int_0^\delta \frac{dt}{t q_{z_0}^T(t)} = \infty$. Отже, за теоремою 7.5 в [1] рівняння Бельтрамі (1) має $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, який є кільцевим Q_ζ -гомеоморфізмом у кожній точці $\zeta \in \mathbb{C}$ при $Q_\zeta(z) = K_\mu^T(z, \zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, де μ вважається продовженою нулем зовні області D . Отже, твердження теореми 2 випливає з теореми 8 при $S := \overline{D}$, $\zeta = z_0$ і $Q_\zeta := K_\mu^T(z, z_0)$.

Доведення наслідку 1 безпосередньо випливає з теореми 2 за нерівністю $K_\mu^T(z, z_0) \leq K_\mu(z)$, виконаною при майже всіх $z \in D$ і всіх $z_0 \in \mathbb{C}$.

Доведення теореми 3 і наслідку 2 безпосередньо випливає з теореми 2 і наслідку 1 відповідно.

Доведення теореми 4. За лемою 7.1 в [1] з $\psi(t) = 1/t$ рівняння Бельтрамі (1) має $W_{\text{loc}}^{1,1}$ -розв'язок $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, який є кільцевим Q_ζ -гомеоморфізмом у кожній точці $\zeta \in \mathbb{C}$ при $Q_\zeta(z) =$

$K_\mu^T(z, \zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, де μ вважається продовженою нулем зовні області D . Отже, твердження теореми 1 безпосередньо випливає з теореми 6 при $\zeta = z_0$, $S := \overline{D}$ і $Q_\zeta := K_\mu^T(z, z_0)$.

Доведення наслідку 3 безпосередньо випливає з теореми 4 за нерівністю $K_\mu^T(z, z_0) \leq K_\mu(z)$, виконаною при майже всіх $z \in D$ і всіх $z_0 \in \mathbb{C}$.

Доведення теореми 5 і наслідку 4 безпосередньо випливає з теореми 4 і наслідку 3 відповідно.

Література

1. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation. A geometric approach*, Dev. Math., **26**, Springer, New York (2012).
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York (2009).
3. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On recent advances in the degenerate Beltrami equations*, Ukr. Mat. Visn., **7**, № 4, 467–515 (2010).
4. U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation*, Handb. Complex Anal. Geom. Funct. Theory, **2**, 555–597 (2005).
5. F. W. Gehring, *Extremal length definitions for the conformal capacity of rings in space*, Comment. Math. Helv., **36**, 42–46 (1961).
6. F. W. Gehring, *Extremal length definitions for the conformal capacity in space*, Michigan Math. J., **9**, 137–150 (1962).
7. F. W. Gehring, *Quasiconformal mappings*, Complex Analysis and its Applications (Lectures, Internat. Sem., Trieste, 1975), **2**, 213–268 (1976).
8. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
9. S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ. Inc., New York (1964).
10. M. Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lect. Notes Math., **1319**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1988).
11. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane*, EMS Tracts Math., **19**, Eur. Math. Soc., Zürich (2013).

Одержано 23.01.23