

О. П. Довгопятий (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка),

Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка; Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької області)

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ БЕЛЬТРАМІ З ДВОМА ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

We study Beltrami-type equations with two given complex characteristics. Under certain conditions imposed on the complex coefficients, we prove theorems on the existence of homeomorphic *ACL*-solutions of this equation. In addition, under some relatively weak conditions, we establish theorems on the existence of the corresponding continuous *ACL*-solutions of this equation that are logarithmic Hölder continuous in a given domain.

Вивчаються рівняння типу Бельтрамі з двома заданими комплексними характеристиками. За певних умов на комплексні коефіцієнти отримано теореми про існування гомеоморфних *ACL*-розв'язків цього рівняння. Крім того, за деяких відносно слабких умов доведено теореми про існування відповідних неперервних *ACL*-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області.

1. Вступ. Дану статтю присвячено вивченню теорії відображень та її застосуванню до теорем існування розв'язків рівнянь Бельтрамі (див. [1–10]). Зокрема, йдеться про квазілінійні рівняння Бельтрамі з двома комплексними характеристиками. Відносно нещодавно було отримано результати, що сприяли значному просуненню в цьому напрямку (див., наприклад, [3–5], [7], розділ 9, а також [2–6]). Зазначимо, що вказані результати переважно стосуються випадку, коли максимальна дилатація рівняння має скінченне середнє коливання в кожній точці або задовольняє певну умову розбіжності інтеграла. В даній статті ми розглянемо аналогічні квазілінійні рівняння, тобто коли відповідні коефіцієнти можуть залежати від його розв'язку. Вказаний випадок достатньо повно розглянуто в роботі [11], але лише для одного комплексного коефіцієнта. Окремо будуть розглянуті умови, які забезпечують наявність не гомеоморфних, а просто неперервних розв'язків. Слід зауважити, що ці розв'язки мають вищий степінь гладкості у порівнянні з розв'язками, про які йшлося вище, і є логарифмічно неперервними за Гельдером (див. статті [12, 13] для рівнянь з одним коефіцієнтом).

Перейдемо до означень. Скрізь далі відображення $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ області $D \subset \mathbb{C}$ вважається таким, що *зберігає орієнтацію*, тобто якщо f — відкрите дискретне відображення і $z \in D$ — будь-яка його точка диференційовності, то *якобіан* цього відображення в точці z невід'ємний (див., наприклад, лему 2.14 [14]). Для комплекснозначної функції $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, заданої в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x + iy$, покладемо $f_z = (f_x + if_y)/2$ і $f_{\bar{z}} = (f_x - if_y)/2$. Будемо говорити, що функція $\nu = \nu(z, w): D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ задовольняє *умову Каратеодорі*, якщо ν вимірна по $z \in D$ при кожному фіксованому $w \in \mathbb{C}$ і неперервна по $w \in \mathbb{C}$ при майже всіх $z \in D$. Нехай функції $\mu = \mu(z, w)$ і $\nu = \nu(z, w)$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ при всіх $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in D$. Покладемо

$$K_{\mu, \nu}(z, w) = \frac{1 + |\mu(z, w)| + |\nu(z, w)|}{1 - |\mu(z, w)| - |\nu(z, w)|}. \quad (1)$$

Зауважимо, що якобіан відображення f в точці $z \in D$ можна підрахувати за допомогою рівності

$$J(z, f) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Нехай $\mu = \mu(z, w) : D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ і $\nu = \nu(z, w) : D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ — такі функції, що при кожному фіксованому $w \in \mathbb{C}$ виконано умову $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ при майже всіх $z \in D$. Розглянемо квазілінійне рівняння Бельтрамі з двома характеристиками:

$$f_{\bar{z}} = \mu(z, f(z)) \cdot f_z + \nu(z, f(z)) \cdot \overline{f_z}. \quad (2)$$

Функція $K_{\mu, \nu}(z, w)$ в (1) називається дилатацією рівняння (2). Відображення $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ будемо називати *регулярним розв'язком рівняння (2)*, якщо $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ і $J(z, f) \neq 0$ майже скрізь у D . Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Будемо говорити, що функція $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, що є локально інтегровною в деякому околі точки $x_0 \in D$, має *скінченне середнє коливання* в точці x_0 (пишемо $\varphi \in FMO(x_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty,$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$ (див., наприклад, [15], розділ 2). Позначимо через $q_{z_0}(r)$ середнє значення функції Q над колом

$$S(z_0, r) = \{|z - z_0| = r\},$$

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta. \quad (3)$$

Правильним є таке твердження (див. також відповідний результат, встановлений для виродженого квазілінійного рівняння Бельтрамі з однією характеристикою у [11] (теореми 1, 2)).

Теорема 1. Нехай функції $\mu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ і $\nu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ при всіх $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in \mathbb{D}$. Припустимо, що існує функція $Q : \mathbb{D} \rightarrow [1, \infty]$ така, що $K_{\mu, \nu}(z, w) \leq Q(z) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{D})$ для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$, де $K_{\mu, \nu}$ визначено в (1). Припустимо, що $Q \in FMO(\mathbb{D})$ або для кожного $z_0 \in \mathbb{D}$ виконано умову

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)} = \infty, \quad (4)$$

де $\delta(z_0)$ — деяке додатне число, $\delta(z_0) < \text{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$, а $q_{z_0}(r)$ визначено в (3). Тоді рівняння (2) має регулярний гомеоморфний розв'язок f класу $W_{\text{loc}}^{1,1}$ в $\mathbb{D}$ такий, що $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(\mathbb{D}))$.

Іншого роду результати стосуються випадку, коли рівняння (2) має лише неперервний, але логарифмічно гелдеровий розв'язок (див. роботи [12, 13] щодо аналогічних лінійних рівнянь з одним коефіцієнтом μ). Нехай $J(z, f) \neq 0$ і відображення f має частинні похідні f_z і $f_{\bar{z}}$ у точці z . Тоді максимальною дилатацією відображення f у точці z будемо називати функцію

$$K_{\mu_f}(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}. \quad (5)$$

Покладемо $K_{\mu_f}(z) = 1$ в точках z , де $|f_z| + |f_{\bar{z}}| = 0$, і $K_{\mu_f}(z) = \infty$ в точках z , де $|f_z| + |f_{\bar{z}}| \neq 0$, але $J(z, f) = 0$. Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку $p \geq 1$* відображення f за допомогою співвідношення

$$K_{I,p}(z, f) = \frac{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2}{(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)^p},$$

де $J(z, f) \neq 0$. Як і у (5), покладемо $K_{I,p}(z) = 1$, якщо $|f_z| + |f_{\bar{z}}| = 0$, і $K_{I,p}(z) = \infty$ у точках, де $J(z, f) = 0$, проте $|f_z| + |f_{\bar{z}}| \neq 0$. Зауважимо, що $K_{I,2}(z) = K_{\mu}(z)$. Покладемо $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\bar{z}}|$. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ називається *квазіконформним*, якщо $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ і, крім того, існує така стала $K \geq 1$, що $\|f'(z)\|^2 \leq K|J(z, f)|$ майже скрізь.

Нехай $\mu = \mu(z, w): \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ і $\nu = \nu(z, w): \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ — функції, для яких існує вимірنا за Лебегом функція $q: \mathbb{D} \rightarrow [0, 1)$ така, що при кожному фіксованому $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in \mathbb{D}$ виконано умову $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| \leq q(z) < 1$. Зафіксуємо $n \geq 1$ і покладемо

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

де Q_0 визначено рівністю

$$Q_0(z) = \frac{1 + q(z)}{1 - q(z)}. \quad (6)$$

Нехай f_n — гомеоморфний *ACL*-розв'язок рівняння (2), в якому покладемо $\mu \mapsto \mu_n(z, w)$, $\nu \mapsto \nu_n(z, w)$, такий, що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему 8.2 [16]). Зауважимо, що відображення $g_n = f_n^{-1}$ є квазіконформним; зокрема, воно є диференційовним майже скрізь. Нехай $K_{\mu_{g_n}}(w)$ — дилатація оберненого відображення g_n , тобто

$$K_{\mu_{g_n}}(w) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\bar{w}}|^2}{(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\bar{w}}|)^2}. \quad (7)$$

Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку p* відображення g_n в точці w за допомогою рівності

$$K_{I,p}(w, g_n) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\bar{w}}|^2}{(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\bar{w}}|)^p}. \quad (8)$$

Справджується таке твердження.

Теорема 2. Нехай μ , ν , μ_n , ν_n , f_n і g_n такі, як вказано вище. Нехай $Q: \mathbb{D} \rightarrow [1, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Припустимо, що виконуються такі умови:

1) для кожних $0 < r_1 < r_2 < 1$ і $y_0 \in \mathbb{D}$ існує множина $E \subset [r_1, r_2]$ додатної лебегової міри така, що функція Q є інтегрованою по колах $S(y_0, r)$ для кожного $r \in E$;

2) знайдуться такі число $1 < p \leq 2$ і стала $M > 0$, що

$$\int_{\mathbb{D}} K_{I,p}(w, g_n) dm(w) \leq M \quad (9)$$

для всіх $n = 1, 2, \dots$, де $K_{I,p}(w, g_n)$ визначено у (8);

3) нерівність

$$K_{\mu_{g_n}}(w) \leq Q(w) \quad (10)$$

виконується для майже всіх $w \in \mathbb{D}$, де $K_{\mu_{g_n}}$ визначено в (7). Тоді рівняння (2) має неперервний $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{D})$ -розв'язок f в $\mathbb{D}$.

Наслідок 1. Теорема 2 залишається справедливою, якщо в ній відмовитись від умови 1, вимагати умову 3, а умову 2 замінити такою: $Q \in L^1(\mathbb{D})$. В цьому випадку розв'язок f рівняння (2) можна вибрати так, щоб рівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2} \left(1 + \frac{r_0}{2|x-y|} \right)} \quad (11)$$

виконувалась для довільного компакта $K \subset \mathbb{D}$ і будь-яких $x, y \in K$, де $\|Q\|_1$ позначає L^1 -норму функції Q в $\mathbb{D}$, $C > 0$ — деяка стала і $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. Якщо, додатково, $Q(z) \in FMO(\mathbb{D})$ або виконано умову (4), то відображення f можна вибрати гомеоморфізмом.

2. Існування гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння в одиничному крузі. Для зручності покладемо $\partial f = f_z$, $\bar{\partial} f = f_{\bar{z}}$. Наступне твердження доведено в [7] (лема 9.1).

Твердження 1. Нехай $D \subset \mathbb{C}$ і $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ — послідовність гомеоморфних розв'язків рівняння $\bar{\partial} f_n = \mu_n(z) \partial f_n + \nu_n(z) \bar{\partial} f_n$ класу $W_{\text{loc}}^{1,1}$ таких, що

$$\frac{1 + |\mu_n(z)| + |\nu_n(z)|}{1 - |\mu_n(z)| - |\nu_n(z)|} \leq Q(z) \in L_{\text{loc}}^1(D)$$

при всіх $n = 1, 2, \dots$. Якщо $f_n \rightarrow f$ локально рівномірно в D при $n \rightarrow \infty$ і $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — гомеоморфізм у D , то $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ і, крім того, ∂f_n і $\bar{\partial} f_n$ збігаються слабо в L_{loc}^1 до ∂f і $\bar{\partial} f$ відповідно. Якщо $\mu_n \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$ і $\nu_n \rightarrow \nu$ при $n \rightarrow \infty$ майже скрізь, то $\bar{\partial} f = \mu(z) \partial f + \nu(z) \bar{\partial} f$ майже скрізь.

Основним твердженням даного пункту є наступна лема, аналогії якої неодноразово були доведені в інших випадках (див., наприклад, лему 9.1 [7] і лему 1 [11]).

Лема 1. Нехай функції $\mu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ і $\nu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ при всіх $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in \mathbb{D}$. Нехай, крім того, існує функція $Q : \mathbb{D} \rightarrow [1, \infty]$ така, що $K_{\mu,\nu}(z, w) \leq Q(z) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{D})$ для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$, де $K_{\mu,\nu}$ визначено в (1). Припустимо, що для будь-якого $z_0 \in \mathbb{D}$ існують $0 < \varepsilon'_0 \leq \varepsilon_0 < \text{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$, $c > 0$, $0 < p \leq 2$ і вимірна за Лебегом функція $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такі, що

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, $I(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, і при цьому

$$\int_{\varepsilon < |z-z_0| < \varepsilon_0} Q(z) \psi^2(|z-z_0|) dm(z) \leq cI^p(\varepsilon, \varepsilon_0).$$

Тоді рівняння (2) має регулярний гомеоморфний розв'язок f класу $W_{\text{loc}}^{1,1}$ в $\mathbb{D}$ такий, що $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(\mathbb{D}))$.

Доведення. Переважно будемо користуватися схемою доведення леми 1 в [11] з урахуванням відмінностей між різними типами рівнянь Бельтрамі, зазначених при доведенні леми 9.1 у [7]. Розглянемо послідовності функцій

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q(z) \leq n, \\ 0, & Q(z) > n, \end{cases}$$

і

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q(z) \leq n, \\ 0, & Q(z) > n. \end{cases}$$

Зауважимо, що $K_{\mu_n, \nu_n}(z, w) \leq n$ при майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже,

$$|\mu_n(z, w)| + |\nu_n(z, w)| \leq \frac{n-1}{n+1} < 1$$

при майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і майже всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже, за теоремою 8.2 в [16] існує n -квазіконформний розв'язок f_n рівняння

$$\bar{\partial} f_n = \partial f_n \mu_n(z, f_n) + \bar{\partial} f_n \nu_n(z, f_n)$$

такий, що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. На підставі означень відображень μ_n і ν_n отримуємо, що $K_{\mu_{f_n}}(z) \leq Q(z)$ майже скрізь, де $K_{\mu_{f_n}}(z)$ визначено в (5). У такому випадку за результатами [17] (гл. V, співвідношення (6.6)) кожне f_n задовольняє оцінку

$$M\left(f_n(\Gamma(S(z_0, r_1), S(z_0, r_2), A))\right) \leq \int_{A(z_0, r_1, r_2)} Q(z) \eta^2(|z-z_0|) dm(z)$$

у будь-якому кільці $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ при довільному $z_0 \in \mathbb{D}$ і довільних $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$ для кожної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

Тоді за пропозицією 2 і зауваженням 2 в [11] послідовність f_n є одностайно неперервною щодо хордальної (сферичної) метрики h в $\mathbb{R}^n$ (див. означення 12.1 у [18]). За критерієм Арцела–Асколі (див., наприклад, теорему 20.4 [18]) існує підпослідовність f_{n_k} послідовності f_n , $k = 1, 2, \dots$, яка збігається при $k \rightarrow \infty$ до деякого відображення f локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Отже, за лемою 4.2 в [19] відображення f є або гомеоморфізмом у $\mathbb{D}$, або сталою в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Другий випадок виключено, враховуючи умови нормування $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. Зауважимо, що для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ знайдеться номер $k_0 = k_0(z)$ такий, що $\mu_{n_k}(z, w) = \mu(z, w)$, $\nu_{n_k}(z, w) = \nu(z, w)$ при $n_k \geq n_{k_0}(z)$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже, для майже всіх z

$$\begin{aligned}\mu_{n_k}(z) &= \mu_{n_k}(z, f_{n_k}(z)) \rightarrow \mu(z, f(z)), \\ \nu_{n_k}(z) &= \nu_{n_k}(z, f_{n_k}(z)) \rightarrow \nu(z, f(z))\end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$, оскільки функції μ і ν неперервні по другому аргументу за умовою. За твердженням 1 $\bar{\partial}f = \mu(z, f)\partial f + \nu(z, f)\bar{\partial}f$, тобто f — гомеоморфний розв'язок рівняння (2), до того ж $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$.

Зауважимо, що за теоремою збіжності розв'язків рівняння Бельтрамі $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}$ (див. [7], наслідок 2.4). Тоді за теоремою Малого–Мартіо f^{-1} має N -властивість Лузіна (див., наприклад, [20], наслідок В). Нарешті, за теоремою Пономарьова $J(z, f) \neq 0$ майже скрізь (див. [21], теорема 1).

Лему доведено.

Доведення теореми 1 випливає з леми 1 і леми 5.1 в [22].

3. Існування неперервного розв'язку. Аналог наступної леми доведено в [7] (теорема 9.1) (див. також лему 5.1 [13]).

Лема 2. Нехай $1 < p \leq 2$, $\mu: D \rightarrow \mathbb{D}$ — вимірна за Лебегом функція і f_k , $k = 1, 2, \dots$, — послідовність гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію, області D на себе, які належать класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ і задовольняють рівняння

$$\bar{\partial}f_n = \partial f_n \mu_n(z) + \bar{\partial}f_n \nu_n(z),$$

де μ_n, ν_n — вимірні за Лебегом функції, які задовольняють нерівність $|\nu_n(z)| + |\mu_n(z)| < 1$ майже скрізь. Припустимо, що f_n збігається локально рівномірно в D до відображення $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, а послідовності $\mu_n(z)$ і $\nu_n(z)$ збігаються до $\mu(z)$ і $\nu(z)$ відповідно при $n \rightarrow \infty$ майже скрізь. Нехай також обернені відображення $g_n := f_n^{-1}$ належать класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$, при цьому при майже всіх $w \in D$

$$\int_D K_{I,p}(w, g_n) dm(w) \leq M$$

для деякого $M > 0$ і кожного $n = 1, 2, \dots$.

Тоді $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$ і μ, ν — комплексні характеристики відображення f , тобто $\bar{\partial}f = \partial f \mu(z) + \bar{\partial}f \nu(z)$ при майже всіх $z \in D$.

Доведення. Будемо в цілому дотримуватись схеми, викладеної при доведенні теореми 9.1 [7] (див. також лему 5.1 [13]). Позначимо $\partial f = f_z$ і $\bar{\partial}f = f_{\bar{z}}$. Нехай C — довільний компакт в D . Оскільки, за умовою, відображення $g_n = f_n^{-1}$ належать класу $W_{\text{loc}}^{1,2}$, то g_n мають N -властивість Лузіна (див., наприклад, [20], наслідок В). Тоді якобіан $J(z, f_n)$ майже скрізь не дорівнює нулю (див., наприклад, [21], теорема 1), і навіть більше, має місце заміна змінних в інтегралі (див., наприклад, [23], теорема 3.2.5). У такому випадку маємо

$$\begin{aligned}\int_C \|f'_n(z)\|^p dm(z) &= \int_C \frac{\|f'_n(z)\|^p}{J(z, f_n)} J(z, f_n) dm(z) = \\ &= \int_{f_n(C)} K_{I,p}(w, g_n) dm(w) \leq M < \infty.\end{aligned}\tag{12}$$

З (12) випливає, що $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ і, крім того, ∂f_n і $\bar{\partial} f_n$ слабо збігаються в $L_{\text{loc}}^1(D)$ до ∂f і $\bar{\partial} f$ відповідно (див. [24], лема III.3.5, а також [25], лема 2.1).

Залишилось показати, що відображення f є розв'язком рівняння Бельтрамі $f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z$. Покладемо $\zeta(z) = \bar{\partial} f(z) - \mu(z) \partial f(z) - \nu \bar{\partial} f(z)$ і покажемо, що $\zeta(z) = 0$ майже скрізь. Нехай B — довільний круг, що лежить разом зі своїм замиканням в D . За нерівністю трикутника

$$\left| \int_B \zeta(z) dm(z) \right| \leq I_1(n) + I_2(n) + I_3(n),$$

де

$$I_1(n) = \left| \int_B (\bar{\partial} f(z) - \bar{\partial} f_n(z)) dm(z) \right|, \quad (13)$$

$$I_2(n) = \left| \int_B (\mu(z) \partial f(z) - \mu_n(z) \partial f_n(z)) dm(z) \right| \quad (14)$$

і

$$I_3(n) = \left| \int_B (\nu(z) \bar{\partial} f(z) - \nu_n(z) \bar{\partial} f_n(z)) dm(z) \right|. \quad (15)$$

На підставі доведеного вище $I_1(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Залишилось оцінити вирази для $I_2(n)$ і $I_3(n)$. Для цього зауважимо, що за нерівністю трикутника $I_2(n) \leq I_2'(n) + I_2''(n)$, де

$$I_2'(n) = \left| \int_B \mu(z) (\partial f(z) - \partial f_n(z)) dm(z) \right|$$

і

$$I_2''(n) = \left| \int_B (\mu(z) - \mu_n(z)) \partial f_n(z) dm(z) \right|.$$

З огляду на слабку збіжність $\partial f_n \rightarrow \partial f$ в $L_{\text{loc}}^1(D)$ при $n \rightarrow \infty$ отримаємо, що $I_2'(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, оскільки $\mu \in L^\infty(D)$. І навіть більше, оскільки за доведеним вище відображення ∂f інтегровне в степені $p > 1$, має місце абсолютна неперервність в інтегралі $\int_E |\partial f(z)| dm(z)$.

Крім того, оскільки $\partial f_n \rightarrow \partial f$ слабо в $L_{\text{loc}}^1(D)$, то для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\begin{aligned} & \int_E |\partial f_n(z)| dm(z) \leq \\ & \leq \int_E |\partial f_n(z) - \partial f(z)| dm(z) + \int_E |\partial f(z)| dm(z) < \varepsilon, \end{aligned} \quad (16)$$

як тільки $m(E) < \delta$, $E \subset B$, і номери n є достатньо великими.

Остаточно, за теоремою Єгорова (див. [26], теорема III.6.12) для кожного $\delta > 0$ знайдеться така множина $S \subset B$, що $m(B \setminus S) < \delta$ і $\mu_n(z) \rightarrow \mu(z)$ рівномірно на S . Тоді $|\mu_n(z) - \mu(z)| < \varepsilon$ при всіх $n \geq n_0$, деякому $n_0 = n_0(\varepsilon)$ і всіх $z \in S$. З огляду на (16), (12) і нерівність Гельдера отримуємо

$$\begin{aligned} I_2''(n) &\leq \varepsilon \int_S |\partial f_n(z)| dm(z) + 2 \int_{B \setminus S} |\partial f_n(z)| dm(z) < \\ &< \varepsilon \cdot \left\{ \left(\int_D K_{I,p}(w, g_n) dm(w) \right)^{1/p} (m(B))^{(p-1)/p} + 2 \right\} \leq \\ &\leq \varepsilon \left\{ M^{1/p} (m(B))^{(p-1)/p} + 2 \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

при тих же $n \geq n_0$. Отже, $I_2''(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому $I_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Те, що

$$I_3(n) \rightarrow 0 \quad (18)$$

при $n \rightarrow \infty$, можна довести аналогічно. Отже, з (13)–(15), (17) і (18) випливає, що $\int_B \zeta(z) dm(z) = 0$ для всіх кругів B , компактно вкладених у D . За теоремою Лебега про диференціювання невизначеного інтеграла (див. [26], IV(6.3)) $\zeta(z) = 0$ майже скрізь в D .

Лему доведено.

Доведення теореми 2. Розглянемо послідовність комплекснозначних функцій

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

і

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

де $Q_0(z)$ визначається співвідношенням (6). Нехай f_n — гомеоморфний ACL -розв'язок рівняння (2), в якому покладемо $\mu \mapsto \mu_n(z, w)$, $\nu \mapsto \nu_n(z, w)$, такий що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему 8.2 [16]). Зауважимо, що відображення $g_n = f_n^{-1}$ є квазіконформним; зокрема, воно є диференційовним майже скрізь і належить класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{D})$. За теоремою 6.10 [27] і з огляду на умову (10) для кожного $n \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$M(g_n(\Gamma)) \leq \int_{\mathbb{D}} K_{\mu_{g_n}}(w) \rho_*^2(w) dm(w) \leq \int_{\mathbb{D}} Q(w) \rho_*^2(w) dm(w)$$

для довільної сім'ї кривих Γ в $\mathbb{D}$ і кожної функції $\rho_* \in \text{adm } \Gamma$, де M — модуль сім'ї кривих (див., наприклад, [18], розд. 6). За теоремою 1.1 [13] сім'я відображень f_n одностайно неперервна в $\mathbb{D}$. Отже, з огляду на теорему Арцела–Асколі f_n є нормальною сім'єю (див. [18], теорема 20.4). Іншими словами, знайдеться підпослідовність f_{n_l} послідовності f_n , що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $f: \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. Зауважимо, що кожне відображення f_n

задовольняє рівняння

$$\bar{\partial} f_n = \mu_n(z, f_n(z)) \partial f_n + \nu_n(z, f_n(z)) \bar{\partial} f_n.$$

Оскільки $Q_0(z)$ скінченна майже скрізь, для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ знайдеться такий номер $l_0 = l_0(z)$, що $\mu_{n_l}(z, w) = \mu(z, w)$, $\nu_{n_l}(z, w) = \nu(z, w)$ при $l \geq l_0$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Оскільки, за припущенням, функції μ і ν задовольняють умову Каратеодорі, маємо

$$\begin{aligned}\mu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) &\rightarrow \mu(z, f(z)), \\ \nu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) &\rightarrow \nu(z, f(z))\end{aligned}$$

при $l \rightarrow \infty$. Тоді за лемою 2 відображення f належить класу $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного рівняння Бельтрамі (2).

Теорему доведено.

Доведення наслідку 1 проводиться аналогічно доведенню наслідку 5.1 в [13]. Справді, за теоремою Фубіні з умови $Q \in L^1(\mathbb{D})$ випливає вимірність інтегралів $\int_{S(x_0, r) \cap D} Q(x) d\mathcal{H}^1(x)$ як функцій від r та їх скінченність майже скрізь при $0 < r < \infty$ (див., наприклад, [26], теорема 8.1.III). В цьому випадку умова (9) виконується при $p = 2$. Отже, існування розв'язку рівняння (2) і його належність класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{D})$ безпосередньо випливають з теореми 2.

Крім того, за теоремою 1.2 [13] (див. також [28], теорема 1)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2} \left(1 + \frac{r_0}{|x - y|} \right)} \quad \forall x, y \in K$$

для довільного компакта $K \subset \mathbb{D}$, де $\|Q\|_1$ — норма Q в $L^1(\mathbb{D})$, C — деяка стала і $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. Переходячи тут до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо співвідношення (11).

Наслідок доведено.

Припустимо тепер, що $Q \in FMO(\mathbb{D})$ або виконується співвідношення (4). Тоді послідовність g_n утворює одностайно неперервну сім'ю відображень (див. [29], теореми 6.1 і 6.5). Отже, на підставі теореми Арцела–Асколі g_n є нормальною сім'єю (див. [18], теорема 20.4). Іншими словами, знайдеться підпослідовність g_{n_l} послідовності g_n , що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $g: \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. Внаслідок умови нормування $g_{n_l}(0) = 0$ і $g_{n_l}(1) = 1$ при всіх $l = 1, 2, \dots$. Тоді за теоремою 4.1 [19] відображення g є гомеоморфізмом в $\mathbb{D}$, крім того, за лемою 3.1 [19] $f_{n_l} \rightarrow f = g^{-1}$ при $l \rightarrow \infty$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Далі застосуємо схему міркувань, використану вище у випадку інтегровної функції Q . Оскільки $\mu_n(z) \rightarrow \mu(z)$ і $\nu_n(z) \rightarrow \nu(z)$ при $n \rightarrow \infty$ і при майже всіх $z \in \mathbb{D}$, за лемою 2 відображення f належить класу $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного квазілінійного рівняння Бельтрамі (2).

Наслідок доведено.

4. Приклади.

Приклад 1. Побудуємо приклад неперервного, але не гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння (2), який задовольняє умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2). Будемо розглядати випадок, коли $\nu(z, w) \equiv 0$. При цьому використовуватимемо конструкцію прикладу, наведеного в [12] (розділ 3). Нехай $p \geq 1$ — довільне число і $0 < \alpha < 2/p$. Як звичайно, пишемо $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$ і $\theta \in [0, 2\pi)$. Покладемо

$$\mu(z, w) = \begin{cases} e^{2i\theta} \frac{2r - \alpha(2r - 1)}{2r + \alpha(2r - 1)}, & 1/2 < |z| < 1, |w| \geq 1, \\ e^{2i\theta} \frac{|w|^\alpha + 1 - \alpha(2r - 1)}{|w|^\alpha + 1 + \alpha(2r - 1)}, & 1/2 < |z| < 1, |w| < 1, \\ 0, & |z| \leq 1/2. \end{cases} \quad (19)$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\bar{\partial} f}{\partial f} = e^{2i\theta} \frac{r f_r + i f_\theta}{r f_r - i f_\theta} \quad (20)$$

(див. рівність (11.129) в [30]), отримуємо, що відображення

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} (2|z| - 1)^{1/\alpha}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 0, & |z| \leq 1/2, \end{cases} \quad (21)$$

є розв'язком рівняння $f_{\bar{z}} = \mu(z, f(z)) \cdot f_z$, де функція μ задається співвідношенням (19). Зауважимо, що існування розв'язку вказаного рівняння забезпечується теоремою 2 (для цього перевіримо виконання всіх умов цієї теореми). Справді, функція $\varphi(x, c) = \frac{x - c}{x + c}$ має додатну похідну при $c := \alpha(2r - 1) > 0$, тому при $x \in [0, 1]$ ця функція досягає свого максимального значення в точці $x = 1$. Отже,

$$\left| e^{2i\theta} \frac{|w|^\alpha + 1 - \alpha(2r - 1)}{|w|^\alpha + 1 + \alpha(2r - 1)} \right| = \frac{|w|^\alpha + 1 - \alpha(2r - 1)}{|w|^\alpha + 1 + \alpha(2r - 1)} \leq \frac{2 - \alpha(2r - 1)}{2 + \alpha(2r - 1)}. \quad (22)$$

Взявши до уваги дріб у правій частині (22), покладемо

$$q(z) := e^{2i\theta} \frac{2 - \alpha(2r - 1)}{2 + \alpha(2r - 1)}. \quad (23)$$

Для заданої співвідношенням (23) функції q відповідною до неї функцією $Q_0(z)$ буде функція

$$Q_0(z) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha(2|z| - 1)}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 1, & |z| \leq 1/2. \end{cases}$$

Нехай $k > 1/\alpha$. Зауважимо, що $Q_0(z) \leq k$ при $|z| \geq \frac{2 + k\alpha}{2k\alpha}$ і $Q_0(z) > k$ в іншому випадку. Нехай, як і раніше,

$$\mu_k(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & K_\mu(z) \leq k, \\ 0, & K_\mu(z) > k. \end{cases}$$

Зазначимо, що розв'язками рівняння $f_{\bar{z}} = \mu_k(z, f(z)) f_z$ є відображення

$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} (2|z| - 1)^{1/\alpha}, & \frac{2 + k\alpha}{2k\alpha} < |z| < 1, \\ \frac{z}{\left(\frac{2 + k\alpha}{2k\alpha}\right)} \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}, & |z| \leq \frac{2 + k\alpha}{2k\alpha}, \end{cases}$$

при цьому обернені відображення $g_k(y) = f_k^{-1}(y)$ обчислюються за формулою

$$g_k(y) = \begin{cases} \frac{y(|y|^\alpha + 1)}{2|y|}, & \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ \frac{y \frac{2+k\alpha}{2k\alpha}}{\left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}}, & |y| \leq \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}. \end{cases} \quad (24)$$

Безпосередніми обчисленнями, використовуючи формулу (20), можна показати, що

$$\frac{(f_k)_{\bar{z}}}{(f_k)_z} = e^{2i\theta} \frac{2r - \alpha(2r - 1)}{2r + \alpha(2r - 1)}.$$

Тоді

$$K_{\mu_{f_k}}(z) = \begin{cases} \frac{4|z|}{2\alpha(2|z| - 1)}, & \frac{2+k\alpha}{2k\alpha} < |z| < 1, \\ 1, & |z| \leq \frac{2+k\alpha}{2k\alpha}. \end{cases} \quad (25)$$

Нам потрібно перевірити, чи виконується (10) для деякої інтегрованої в $\mathbb{D}$ функції Q . Для цього підставимо відображення g_k з (24) у максимальну дилатацію K_{μ_k} , визначену рівністю (25) (див. формулу (4), гл. I, в [1]). Тоді

$$K_{\mu_{g_k}}(y) := K_{\mu_k}(g_k(y)) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha + 1}{\alpha|y|^\alpha}, & \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ 1, & |y| \leq \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}. \end{cases}$$

Зауважимо, що $K_{\mu_{g_k}}(y) \leq Q(y) := \frac{|y|^\alpha + 1}{\alpha|y|^\alpha}$ при всіх $y \in \mathbb{D}$. При цьому функція Q інтегровна в $\mathbb{D}$ навіть у степені p , а не лише в степені 1 (див. міркування, використані при розгляді пропозиції 6.3 у [30]). За побудовою $f_k(0) = 0$ і $f_k(1) = 1$. Тому всі умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2) виконуються, а в якості бажаного розв'язку рівняння $\bar{f}_z = \mu(z)f_z$ можна розглянути відображення $f = f(z)$, визначене рівністю (21). І навіть більше, з доведення цієї теореми випливає, що відображення f є вказаним там розв'язком, оскільки f є локально рівномірною границею послідовності f_k . Зауважимо, що відображення f не є гомеоморфним розв'язком, а також воно не є ані відкритим, ані дискретним.

Приклад 2. Нехай f — відображення, визначене співвідношенням (21). Використовуючи формулу $f_z = f_r r_z + f_\theta \theta_z$, отримуємо $f_z = (2r - 1)^{(1/\alpha)-1} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2r - 1}{2r} \right)$. Звідси випливає, що f_z є дійсним числом при всіх $z \in \mathbb{D}$, отже, $f_z = \overline{f_z}$. Таким чином, можемо записати

$$\bar{f}_z = \mu(z, f)f_z = \frac{1}{2}\mu(z, f)f_z + \frac{1}{2}\nu(z, f)\overline{f_z},$$

де $\mu(z, w) = \nu(z, w)$ і $\mu(z, w)$ визначено співвідношенням (19). За доведеним вище в прикладі 1 рівняння $\bar{f}_z = \mu(z, f)f_z + \nu(z, f)\overline{f_z}$ має розв'язок f , визначений співвідношенням (21), причому коефіцієнти цього рівняння задовольняють умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2).

Література

1. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, Москва (1969).
2. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Univ. Press, Princeton, NY (2009).
3. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *General Beltrami equations with two characteristics*, Ukr. Math. Bull., **5**, № 3, 305–326 (2008).
4. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On the Beltrami equations with two characteristics*, Complex Var. and Elliptic Equat., **54**, № 10, 935–950 (2009).
5. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 1, 67–75 (2013).
6. A. Golberg, R. Salimov, *Nonlinear Beltrami equation*, Complex Var. and Elliptic Equat., **65**, № 1, 6–21 (2020).
7. V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation: a geometric approach*, Springer, New York etc. (2012).
8. T. Lomako, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations*, Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser., **59**, № 2, 263–274 (2010).
9. R. Salimov, M. Stefanchuk, *On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation*, J. Math. Sci., **248**, 203–216 (2020).
10. R. Salimov, M. Stefanchuk, *Logarithmic asymptotics of the nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami equation*, Ukr. Math. J., **73**, № 4, 463–478 (2021).
11. Е. А. Севостьянов, *О квазилинейных уравнениях типа Бельтрами с вырождением*, Мат. заметки, **90**, вып. 3, 445–453 (2011).
12. С. О. Севостьянов, *Про існування розв'язків рівнянь Бельтрамі з умовами на обернені дилатації*, Укр. мат. вісн., **18**, № 2, 243–254 (2021).
13. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation*, Anal. and Math. Phys., Article 138 (2021).
14. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448**, 1–40 (1969).
15. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Finite mean oscillation and the Beltrami equation*, Israel J. Math., **153**, 247–266 (2006).
16. B. Bojarski, *Generalized solutions of a system of differential equations of the first order of the elliptic type with discontinuous coefficients*, Mat. Sb., **43(85)**, 451–503 (1957).
17. O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer, New York etc. (1973).
18. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
19. V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *On convergence analysis of space homeomorphisms*, Siberian Adv. Math., **23**, № 4, 263–293 (2013).
20. J. Maly, O. Martio, *Lusin's condition N and mappings of the class $W_{loc}^{1,n}$* , J. reine und angew. Math., **458**, 19–36 (1995).
21. С. П. Пономарев, *N^{-1} -свойство отображений и условие (N) Лузина*, Мат. заметки, **58**, 411–418 (1995).
22. E. A. Sevost'yanov, *Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic*, Siberian Adv. Math., **23**, № 2, 106–122 (2013).
23. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва (1987).
24. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск (1982).
25. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On convergence theory for Beltrami equations*, Ukr. Mat. Visn., **5**, № 4, 524–535 (2008).
26. С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949).
27. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion*, J. Anal. Math., **93**, 215–236 (2004).
28. С. О. Севостьянов, С. О. Скворцов, О. П. Довгопятий, *Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 414–436 (2020).
29. V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, *Toward the theory of ring Q -homeomorphisms*, Israel J. Math., **168**, 101–118 (2008).
30. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).

Одержано 04.01.22