

**Євген Севостьянов**<sup>1</sup> (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.),

**Марія Баронова, Олександр Довгопятий, Наталія Ількевич** (Житомирський державний університет імені Івана Франка)

## ПРО МЕЖОВІ ОЦІНКИ СПОТВОРЕННЯ ВІДОБРАЖЕНЬ В ОБЛАСТЯХ З НЕРІВНОСТЯМИ ПУАНКАРЕ

We study the mappings that distort the modulus of the families of paths according to the Poletsky-inequality type. At the boundary points of a domain, we obtain estimates for the distortion of distances to these mappings provided that their characteristic either has a finite mean oscillation at every point or satisfies the Lehto-type integral conditions, while the mapped domain is Ahlfors regular and satisfies the Poincaré inequality. The cases of homeomorphisms and mappings with branching are analyzed, as well as the domains with good boundaries and domains with prime ends.

Статтю присвячено дослідженню відображень, які спотворюють модуль сімей кривих по типу нерівності Полецкого. У межах точках області отримано оцінку спотворення відстані для таких відображень за умови, що їхня характеристика має скінченне середнє коливання у кожній точці або задовольняє інтегральні умови типу Лехто, а область відображення є регулярною за Альфорсом з нерівністю Пуанкаре. Розглянуто випадки гомеоморфізмів і відображень з розгалуженням, області визначення з гарними межами та області з простими кінцями.

**1. Вступ.** У цій статті отримано оцінки спотворення відображень більш загальних, ніж квазіконформні, в околі межевої точки. Окремі результати на цю тему можна знайти в [1–11] (див. також [12–15]). Зокрема, в деяких класах відображень виконуються нерівності Гельдера і Ліпшиця за відповідних обмежень на їхню характеристику (див. [1, 2, 6]). Для відображень з необмеженою характеристикою спотворення відстані, як правило, є більш складним у порівнянні з неперервністю за Гельдером (див., наприклад, [4, теорема 7.3]). Відносно вивченим є питання про спотворення відстані при квазіконформних (квазірегулярних) відображеннях, а також більш широких класів відображень спеціальних областей (скажімо, одиничної кулі, див. [6–8]). Загальний випадок не є вивченим, адже навіть квазіконформні відображення, взагалі кажучи, не мають неперервного межевого продовження. Тому слід розглядати різні умови на області, за яких отримання спотворення відстані є принципово можливим. У цій статті ми розглянемо кілька подібних умов. Зокрема, області в прообразі при відображенні припускаються як локально зв'язними на межі, так і ні, до того ж ці випадки розглядаються окремо. Області в образі при відображенні припускаються регулярними за Альфорсом з  $(1; p)$ -нерівністю Пуанкаре. Перші два співавтори отримали результати про межеве спотворення відстані відображень, характеристика яких має скінченне середнє по кулях, у вказаних областях [11]. Нижче будуть розглянуті більш загальні умови, зокрема умова інтегральної розбіжності типу Лехто та умова ФМО (скінченного середнього коливання в точці), яка є узагальненням ВМО умови за Джоном – Ніренбергом.

Наведемо деякі означення, позначення і формулювання основних результатів. Тут і далі  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ ,  $\mathbb{B}^n = B(0, 1)$ ,  $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$ ,  $\mathbb{S}^{n-1} = S(0, 1)$ ,  $\Omega_n = m(\mathbb{B}^n)$ ,  $\omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ ,  $m$  – міра Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}$  –  $(n-1)$ -вимірний

<sup>1</sup> Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

міра Гаусдорфа,  $A(x_0, r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$ , а  $M_p(\Gamma)$  позначає  $p$ -модуль сім'ї кривих  $\Gamma$  (див. [16]). Покладемо  $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$ . Нехай  $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  і  $D \subset \mathbb{R}^n$  — область. Запис  $\Gamma(E, F, D)$  позначає сім'ю всіх кривих  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  таких, що  $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$  і  $\gamma(t) \in D$  при  $t \in (a, b)$ .

Нехай  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  — вимірна за Лебегом функція, яка перетворюється в нуль зовні  $D$ . З огляду на [4, розд. 7.6] будемо говорити, що відображення  $f : w \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  є кільцевим  $Q$ -відображенням у точці  $x_0 \in \overline{D}$  щодо  $p$ -модуля,  $x_0 \neq \infty, p \geq 1$ , якщо знайдеться  $r_0 = r(x_0) > 0$  таке, що для довільних  $0 < r_1 < r_2 < r_0$  виконується нерівність

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2), D))) \leq \int_A Q(x) \eta^p(|x - x_0|) dm(x), \quad (1)$$

де  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  — довільна невід'ємна вимірна за Лебегом функція, така що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (2)$$

З огляду на [17, розд. 7.22] будемо говорити, що борелева функція  $\rho : D \rightarrow [0, \infty]$  є *верхнім градієнтом* для  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо нерівність  $|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma \rho |dx|$  виконується для всіх спрямованих кривих  $\gamma$ , які з'єднують точки  $x$  і  $y \in D$ . Кажемо, що в області  $D$  виконується  $(1; p)$ -*нерівність Пуанкаре*,  $p \geq 1$ , якщо знайдуться сталі  $C \geq 1$  і  $\tau > 0$  такі, що для кожної кулі  $B \subset D$ , довільної обмеженої неперервної функції  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  і кожного її верхнього градієнта  $\rho$  виконується

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |u(x) - u_B| dm(x) \leq C(\text{diam } B) \left( \frac{1}{m(\tau B)} \int_{\tau B} \rho^p(x) dm(x) \right)^{1/p},$$

де  $u_B := \frac{1}{m(B)} \int_B u(x) dm(x)$ . Область  $D$  називається *регулярною за Альфорсом*, якщо існує стала  $C \geq 1$  така, що для кожного  $x_0 \in D$  і будь-якого  $R < \text{diam } D$  виконуються нерівності  $\frac{1}{C} R^n \leq m(B(x_0, R) \cap D) \leq C R^n$ . Нехай  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ . Покладемо  $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} |x - y|$ ,  $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$ .

Для  $\delta > 0$  і  $p \geq 1$ , областей  $D, D' \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, x_0 \in \partial D$ , континуума  $A \subset D$  і вимірної за Лебегом функції  $Q : w \rightarrow [0, \infty]$  позначимо через  $\mathfrak{F}_{Q, A, \delta}^{p, x_0}(D, D')$  сім'ю всіх кільцевих  $Q$ -гомеоморфізмів  $f$  області  $D$  на  $D'$  у точці  $x_0$  щодо  $p$ -модуля, які задовольняють умову  $\text{diam}(f(A)) \geq \delta$ .

Справджується така теорема.

**Теорема 1.** Нехай  $x_0 \in \partial D, x_0 \neq \infty, n - 1 < p \leq n$ . Припустимо, що  $D'$  є регулярною за Альфорсом обмеженою областю з  $(1; p)$ -нерівністю Пуанкаре, а також виконано такі умови:  
1) існує таке  $r'_0 = r'_0(x_0) > 0$ , що множина  $B(x_0, r) \cap D$  зв'язна при всіх  $0 < r < r'_0$ ;  
2) знайдеться таке  $\delta_0 = \delta_0(x_0) > 0$ , що

$$\int_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta_0), \quad \int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty. \quad (3)$$

Тоді кожне  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, знайдуться такі  $\varepsilon_0 > 0$  і  $\tilde{C} > 0$ , що для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  справедливою є оцінка

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}. \quad (4)$$

**Наслідок 1.** В умовах теореми 1 кожне відображення  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$  і

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}. \quad (5)$$

**Зауваження 1.** Зокрема, умова 1 теореми 1 виконується, якщо  $D$  — опукла область.

Будемо говорити, що функція  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  має скінченне середнє коливання в точці  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (пишемо  $\varphi \in FMO(x_0)$ ), якщо  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$ , де  $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$ .

Справджується така теорема.

**Теорема 2.** Припустимо, що в умовах теореми 1 замість умови (3) виконується умова  $Q \in FMO(x_0)$ . Тоді кожне  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, знайдуться такі  $\varepsilon_0 > 0$  і число  $\tilde{C} > 0$ , що для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, x_0)$  виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}.$$

**Наслідок 2.** В умовах теореми 2 кожне відображення  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$  і  $|f(x) - f(x_0)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}$ .

У випадку відображень з розгалуженням також виконується деякий аналог теорем 1 і 3 (див. нижче). Нагадаємо, що відображення  $f: w \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  області  $D \subset \mathbb{R}^n$  на область  $D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  називається зберігаючим межу, якщо  $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ , де, звичайно,  $C(f, \partial D)$  — гранична множина відображення  $f$  на  $\partial D$ . Зауважимо, що відкрите дискретне відображення зберігає межу тоді й лише тоді, коли воно замкнене, тобто  $f(A)$  замкнена множина щодо  $f(D)$ , як тільки  $A \subset D$  — замкнена множина щодо  $D$  (див., наприклад, [18, теорема 3.3]).

Для  $\delta > 0$ , областей  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , точки  $x_0 \in \partial D$  і вимірної за Лебегом функції  $Q: w \rightarrow [0, \infty]$  позначимо через  $\mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  сім'ю всіх відкритих, дискретних і замкнених

кільцевих  $Q$ -відображень  $f: w \rightarrow D'$  щодо  $p$ -модуля у точці  $x_0$ , таких що знайдеться континуум  $K_f \subset D'$  такий, що  $\text{diam}(K_f) \geq \delta$  і  $\text{dist}(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$ .

Справджується така теорема.

**Теорема 3.** Нехай  $x_0 \in \partial D$ ,  $x_0 \neq \infty$ ,  $n-1 < p \leq n$ . Припустимо, що  $D$  — обмежена область,  $D'$  є регулярною за Альфорсом обмеженою областю з  $(1; p)$ -нерівністю Пуанкаре, а також виконано такі умови: 1) існує таке  $r'_0 = r'_0(x_0) > 0$ , що множина  $B(x_0, r) \cap D$  є зв'язною при всіх  $0 < r < r'_0$ ; 2) знайдеться таке  $\delta_0 = \delta_0(x_0) > 0$ , що

$$\int_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta_0), \quad \int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty. \quad (6)$$

Тоді кожне  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, знайдуться  $\varepsilon_0 > 0$  і  $\tilde{C} > 0$  такі, що для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}. \quad (7)$$

**Наслідок 3.** В умовах теореми 3 відображення  $f$  має неперервне продовження в точку  $x_0$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}.$$

**Теорема 4.** Припустимо, що в умовах теореми 3 замість умови (7) виконується умова  $Q \in FMO(x_0)$ . Тоді кожне  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, знайдуться такі  $\varepsilon_0 > 0$  і число  $\tilde{C} > 0$ , що для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}.$$

**Наслідок 4.** В умовах теореми 4 кожне відображення  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$  і  $|f(x) - f(x_0)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}$ .

Наведені результати мають відповідні аналоги для областей з поганими межами, що пов'язано із застосуванням апарату простих кінців (див. нижче). Відповідні означення можна знайти в [19]. Зокрема, нагадаємо, що кінець  $K$  називається *простим*, якщо  $K$  містить такий ланцюг розрізів  $\{\sigma_m\}$ , що для довільного континуума  $C$  в  $D$  виконано умову

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0, \quad (8)$$

де  $M$  — (конформний) модуль сім'ї  $\Gamma(C, \sigma_m, D)$ . Далі  $\overline{D}_P$  позначає поповнення області  $D$  її простими кінцями, а  $E_D = \overline{D}_P \setminus D$  — множина всіх простих кінців у  $D$ , відмінних від

внутрішніх точок області  $D$ . Кажемо, що обмежена область  $D$  у просторі  $\mathbb{R}^n$  є *регулярною* (у квазіконформному сенсі), якщо існує квазіконформне відображення області  $D$  на обмежену область з локально квазіконформною межею, до того ж кожен простий кінець  $P \subset E_D$  є регулярним. Простір  $\overline{D}_P$  стає метричним за допомогою наступного введення метрики. Якщо  $g: w_0 \rightarrow D$  — квазіконформне відображення області  $D_0$ , яка має локально квазіконформну межу, на область  $D$ , то для  $x, y \in \overline{D}_P$  покладемо

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|,$$

де для  $x \in E_D$  елемент  $g^{-1}(x)$  розуміється як деяка (єдина) точка  $\partial D_0$ , що визначена коректно з огляду на [20, теорема 4.1].

Для  $P_0 \in E_D$  визначимо *тіло простого кінця*  $P_0$  за допомогою співвідношення  $I(P_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ , де  $d_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — відповідна  $P_0$  спадна послідовність областей розрізів. Зауважимо, що  $I(P_0) \subset \partial D$  (див., наприклад, [19, твердження 1]).

Для  $\delta > 0$  і  $p \geq 1$ , областей  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , і елемента  $P_0 \in E_D$ , континуума  $A \subset D$  і вимірної за Лебегом функції  $Q: w \rightarrow [0, \infty]$  позначимо через  $\mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  сім'ю всіх гомеоморфізмів  $f$  області  $D$  на  $D'$ , які задовольняють співвідношення (1), (2) для кожного  $x_0 \in I(P_0)$  (де  $I(P_0)$  позначає тіло простого кінця  $P_0$ ), таких що  $\text{diam}(f(A)) \geq \delta$ .

Справджується така теорема.

**Теорема 5.** Нехай  $P_0 \in E_D := \overline{D}_P \setminus D$ ,  $n - 1 < p \leq n$ , область  $D$  є регулярною (у квазіконформному сенсі), а область  $D'$  — регулярною за Альфорсом обмеженою областю з  $(1; p)$ -нерівністю Пуанкаре. Припустимо, що виконано такі умови: 1) для кожного  $y_0 \in \partial D$  існує таке  $r'_0 = r'_0(y_0) > 0$ , що множина  $B(y_0, r) \cap D$  є скінченно зв'язною при всіх  $0 < r < r'_0$ , до того ж для кожної компоненти  $K$  зв'язності множини  $B(y_0, r) \cap D$  виконано таку умову: будь-які  $x, y \in K$  можна з'єднати такою кривою  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , що  $|\gamma| \in K \cap \overline{B(y_0, \max\{|x - y_0|, |y - y_0|\})}$ ,

$$|\gamma| = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = y\};$$

2) для кожного  $y_0 \in I(P_0)$  знайдеться таке  $\delta_0 = \delta_0(y_0) > 0$ , що

$$\int_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta_0), \quad \int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty. \quad (9)$$

Тоді для кожного  $P \in E_D = \overline{D}_P \setminus D$  існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ , де  $I(P)$  позначає тіло простого кінця  $P$ . Крім того, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і числа  $\varepsilon_0 > 0$  і  $\tilde{C} > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}, \quad (10)$$

де  $\{x_0\} := I(P_0)$ .

**Наслідок 5.** В умовах і позначеннях теореми 5 відображення  $f$  має неперервне продовження в точку  $P_0 \in E_D$ , до того ж

$$|f(x) - f(P_0)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}. \quad (11)$$

**Теорема 6.** Припустимо, що в умовах теореми 5 замість співвідношень (9) виконується така умова:  $Q \in FMO(y_0)$  для кожного  $y_0 \in I(P_0)$ . Тоді кожне  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  має неперервне продовження в  $P_0$ , і навіть більше, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і число  $\tilde{C} > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність  $|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}$ , де  $I(P_0) = \{x_0\}$ .

**Зауваження 2.** Зокрема, умова 1 теореми 5 виконується, якщо для кожного  $x_0 \in \partial D$  існує таке  $r'_0 = r'_0(x_0) > 0$ , що множина  $B(x_0, r) \cap D$  є скінченно зв'язною при всіх  $0 < r < r'_0$ , до того ж кожна компонента  $K$  зв'язності множини  $\overline{B(x_0, r)} \cap D$  є опуклою. Справді, нехай  $x, y \in K$ . З'єднаємо  $x$  та  $y$  відрізком  $\gamma$  всередині  $K$ . Внаслідок того, що куля  $\overline{B(x, |x - x_0|)}$  є опуклою, весь відрізок  $\gamma$  належить  $\overline{B(x, |x - x_0|)}$ . Тоді  $\gamma$  і є бажаною кривою.

Для заданих  $p \geq 1$  і  $\delta > 0$ , областей  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , точки  $P_0 \in E_D$  і заданої вимірної за Лебегом функції  $Q: w \rightarrow [0, \infty]$  позначимо через  $\mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  сім'ю всіх відкритих, дискретних і замкнених відображень  $f$  області  $D$  на  $D'$ , які задовольняють умови (1), (2) у кожній точці  $x_0 \in I(P_0)$  (де  $I(P_0)$  позначає тіло простого кінця  $P_0$ ), таких що знайдеться континуум  $K_f \subset D'_f$  для якого  $\text{diam}(K_f) \geq \delta$  і  $\text{dist}(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$ .

Справджується така теорема.

**Теорема 7.** Нехай  $P_0 \in E_D := \overline{D}_P \setminus D$ ,  $n - 1 < p \leq n$ , область  $D$  є регулярною (у квазіконформному сенсі), а область  $D'$  — регулярною за Альфорсом обмеженою областю з  $(1; p)$ -нерівністю Пуанкаре. Припустимо, що виконано такі умови: 1) для кожного  $x_0 \in \partial D$  існує таке  $r'_0 = r'_0(x_0) > 0$ , що множина  $B(x_0, r) \cap D$  є скінченно зв'язною при всіх  $0 < r < r'_0$ , до того ж для кожної компоненти  $K$  зв'язності множини  $B(x_0, r) \cap D$  виконано таку умову: будь-які  $x, y \in K$  можна з'єднати кривою  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  такою, що  $|\gamma| \in K \cap \overline{B(x_0, \max\{|x - x_0|, |y - x_0|\})}$ , 2) для кожного  $y_0 \in I(P_0)$  знайдеться таке  $\delta_0 = \delta_0(y_0) > 0$ , що

$$\int_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta_0), \quad \int_0^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{y_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty. \quad (12)$$

Тоді для кожного  $P \in E_D = \overline{D}_P \setminus D$  існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ , де  $I(P)$  позначає тіло простого кінця  $P$ . Крім того, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і числа  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\tilde{C} > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p},$$

де  $\{x_0\} := I(P_0)$ .

**Наслідок 6.** В умовах і позначеннях теореми 7 відображення  $f$  має неперервне продовження в точку  $P_0 \in E_D$ , до того ж  $|f(x) - f(P_0)| \leq \tilde{C} \left( \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{1-p}$ , де  $\{x_0\} = I(P_0)$ .

**Теорема 8.** Припустимо, що в умовах теореми 7 замість умови (12) виконується така умова:  $Q \in FMO(y_0)$  для кожного  $y_0 \in I(P_0)$ . Тоді кожне  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  має неперервне продовження в  $P_0$ , і навіть більше, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і число  $\tilde{C} = \tilde{C}(p, n, C, D') > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність  $|f(x) - f(P_0)| \leq \tilde{C} \left( \log \log \frac{1}{|x - x_0|} \right)^{1-p}$ , де  $I(P_0) = \{x_0\}$ .

**2. Основні леми.** Справедливою є така лема (див. також [9, теорема 1], [10, теорема 1.1] і [11, теорема 1.1]).

**Лема 1.** Припустимо, що в умовах теореми 1 замість співвідношень (3) виконується така умова: існують  $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) < \min\{1, d(x_0, A), r'_0\}$ ,  $1 \leq q < p$ ,  $K_0 > 0$ , і вимірна за Лебегом функція  $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що при  $\varepsilon \rightarrow +0$  виконується співвідношення

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty, \quad (13)$$

до того ж

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^p(|x - x_0|) dm(x) \leq K_0 \cdot I^q(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad (14)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді кожне  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, існують такі  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  і стала  $\tilde{C} > 0$ , що оцінка

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0) \quad (15)$$

виконується для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_1) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$ .

**Доведення.** Скористаємося схемою, викладеною при доведенні теореми 1.1 [10] і теореми 1.1 [11]. За означенням числа  $\varepsilon_0$  маємо

$$A \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0). \quad (16)$$

З умови леми випливає існування такого  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ , що  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$  при всіх  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Нехай  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_1) \cap D$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  і  $\varepsilon_2 > 0$  — числа, щодо яких замкнені кулі  $\overline{B(x, \varepsilon_1)}$  і  $\overline{B(y, \varepsilon_2)}$  лежать у  $D$ . Нехай  $x_* \in B(x, \varepsilon_1) \cap B(x_0, |x - x_0|)$  і  $y_* \in B(y, \varepsilon_2) \cap B(x_0, |x - x_0|)$ . З огляду на припущення леми  $B(x_0, r) \cap D$  є зв'язною множиною для  $0 < r < r'_0$ . Отже, точки  $x_*$  і  $y_*$  можна з'єднати кривою  $\gamma_*$  всередині  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap D$ . Зауважимо, що множини  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap B(x, \varepsilon_1)$  і  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap B(y, \varepsilon_2)$  є опуклими як перетин двох опуклих множин. Тоді точки  $x$  і  $x_*$  можна з'єднати відрізком  $\gamma_1$  в  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap B(x, \varepsilon_1) \subset \overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap D$ , а точки  $y$  і  $y_*$  — відрізком  $\gamma_2$  в  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap B(y, \varepsilon_2) \subset \overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap D$ . Нехай  $K$  — крива, що поєднує  $\gamma_1$ ,  $\gamma_*$  і  $\gamma_2$ . Тоді  $K$  поєднує точки  $x$  і  $y$  у  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)} \cap D$ .

Нехай  $z, w \in f(A) \subset D'$  і  $u, v \in A$  є такими, що

$$\text{diam } f(A) = |z - w| = |f(u) - f(v)| \geq \delta. \quad (17)$$

Зауважимо, що  $f(K)$  і  $f(A)$  — континууми, як неперервний образ континуумів при відображенні  $f$ . Зафіксуємо  $y_0 \in D'$ . Оскільки область  $D'$  обмежена, існує таке  $R_0 > 0$ , що  $D' \subset B(y_0, R_0) := B_{R_0}$ . Отже, з огляду на [21, твердження 4.7]

$$M_p(\Gamma(f(K), f(A), D')) \geq \frac{1}{M} \frac{\min\{\text{diam } f(K), \text{diam } f(A)\}}{R_0^{1+p-n}}. \quad (18)$$

Покажемо, що

$$\Gamma(|K|, A, D) > \Gamma(S(x_0, |x - x_0|), S(x_0, \varepsilon_0), D). \quad (19)$$

Нехай  $\gamma \in \Gamma(|K|, A, D)$ ,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ ,  $\gamma(0) \in |K|$  і  $\gamma(1) \in A$ . Оскільки  $|K| \subset B(x_0, |x - x_0|)$ , з огляду на (16)  $A \subset D \setminus B(x_0, |x - x_0|)$ . Тоді  $|\gamma| \cap B(x_0, |x - x_0|) \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap (D \setminus B(x_0, |x - x_0|))$ . На підставі теореми 1.1.5.46 [22] існує таке  $t_1 \in (0, 1)$ , що  $\gamma(t_1) \in S(x_0, |x - x_0|)$ . Покладемо  $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$ . Оскільки  $|K| \subset B(x_0, \varepsilon_0)$ , крім того, з огляду на (16)  $A \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ , то  $\gamma_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap (D \setminus B(x_0, \varepsilon_0))$ . За теоремою 1.1.5.46 [22] існує таке  $t_2 \in (t_1, 1)$ , що  $\gamma_1(t_2) = \gamma(t_2) \in S(x_0, \varepsilon_0)$ . Покладемо  $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ . Тоді  $\gamma_2$  — підкрива  $\gamma$  і  $\gamma_2 \in \Gamma(S(x_0, |x - x_0|), S(x_0, \varepsilon_0), D)$ . Співвідношення (19) доведено. З (19) з огляду на мінорування модуля (див., наприклад, [16, теорема 6.4]), а також на (1) і (19) отримуємо

$$\begin{aligned} M_p(\Gamma(f(|K|), f(A), D')) &= M_p(f(\Gamma(|K|, A, D))) \\ &\leq M_p(f(\Gamma(S(x_0, |x - x_0|), S(x_0, \varepsilon_0), D))) \\ &\leq \int_A Q(z) \eta^p(|z - x_0|) dm(z), \end{aligned} \quad (20)$$

де  $\eta$  може бути вибраною довільною вимірною за Лебегом функцією, яка задовольняє умову (2) при  $r_1 = |x - x_0|$  і  $r_2 = \varepsilon_0$ . Покладемо

$$\eta(t) := \begin{cases} \frac{\psi(t)}{I(|x - x_0|, \varepsilon_0)}, & t \in (|x - x_0|, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (|x - x_0|, \varepsilon_0). \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$\int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{\psi(t) dt}{I(|x-x_0|, \varepsilon_0)} = \frac{1}{I(|x-x_0|, \varepsilon_0)} \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt = 1. \quad (21)$$

З урахуванням (21) функція  $\eta$  задовольняє умову (2) при  $r_1 = |x - x_0|$  і  $r_2 = \varepsilon_0$ . Отже, враховуючи (20), (13) і (14) одержуємо

$$\begin{aligned} &M_p(\Gamma(f(|K|), f(A), D')) \\ &\leq \frac{1}{I^p(|x - x_0|, \varepsilon_0)} \int_{A(x_0, |x-x_0|, \varepsilon_0)} Q(z) \psi^p(|z - x_0|) dm(z) \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (22)$$



Зі співвідношення (22) маємо

$$M_p(\Gamma(f(|K|), f(A), D')) \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \quad (23)$$

З (18) і (23) випливає, що

$$\frac{1}{M} \frac{\min\{\text{diam } f(|K|), \text{diam } f(A)\}}{R_0^{1+p-n}} \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \quad (24)$$

За означенням класу  $\mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,x_0}(D, D')$

$$\min\{\text{diam } f(|K|), \text{diam } f(A)\} \geq \min\{\text{diam } f(|K|), \delta/2\}.$$

Тоді з нерівності (24) випливає, що

$$\min\{\text{diam } f(|K|), \delta/2\} \leq M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \quad (25)$$

Зауважимо, що  $M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , оскільки  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  за умовою теореми, а  $q < p$  за припущенням. Тоді існує таке  $0 < \sigma = \sigma(x_0, M, R_0, n, p, \delta)$ , що

$$M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0) < \delta/2 \quad \forall x \in B(x_0, \sigma). \quad (26)$$

Нехай  $|x - x_0| < \sigma$ , тоді з огляду на (25) і (26) отримуємо

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{diam } f(|K|) \leq M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0).$$

Зазначимо, що за нерівністю трикутника  $|f(x) - f(y)| \leq 2R_0$ , тому при  $|x - x_0| \geq \sigma$  маємо

$$I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0) \geq I^{q-p}(\sigma, \varepsilon_0) := P_0. \quad (27)$$

Отже,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2R_0 \leq \frac{2R_0}{P_0} I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0).$$

Покладемо  $\tilde{C} := \max\left\{M R_0^{1+p-n} K_0, \frac{2R_0}{P_0}\right\}$ . Стала  $\tilde{C}$  залежить лише від  $K_0$ ,  $x_0$ ,  $p$ ,  $n$  і  $D'$ , бо  $M$  і  $R_0$  цілком визначаються по області  $D'$ , а число  $\varepsilon_0 > 0$  за умовою залежить лише від  $x_0$ .

Доведемо, що відображення  $f$  має границю в точці  $x_0$ . Припустимо супротивне. Тоді існують щонайменше дві послідовності  $x_m \rightarrow x_0$  і  $y_m \rightarrow x_0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , такі що  $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \delta > 0$  для деякого додатного  $\delta > 0$  і всіх  $m = 1, 2, \dots$ . Але це суперечить нерівності (15), бо її права частина прямує до нуля при  $x \rightarrow x_0$  з огляду на припущення у (13).

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** Припустимо, що в умовах теореми 3 замість співвідношень (6) виконується така умова: існують  $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) < \min\{1, \delta, r'_0\}$ ,  $1 \leq q < p$ ,  $K_0 > 0$ , і вимірні за Лебегом функція  $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що при  $\varepsilon \rightarrow +0$  виконуються співвідношення (13), (14). Тоді кожне  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , крім того, існують такі  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  і стала  $\tilde{C} = \tilde{C}(x_0, p, n, K_0, D') > 0$ , що оцінка

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0)$$

виконується для всіх  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_1) \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - x_0|$ , і всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta}^{p,x_0}(D, D')$ .

**Доведення.** З умови леми випливає існування такого  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ , що  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$  при всіх  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Нехай  $x, y \in B(x_0, \varepsilon_1) \cap D$  і  $f \in \mathfrak{R}_{Q, \delta}^{p, x_0}(D, D')$ . Нехай  $K_f \subset D'$  — такий континуум, що  $\text{diam}(K_f) \geq \delta$  і  $\text{dist}(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$  (він існує за означенням класу  $\mathfrak{R}_{Q, \delta}^{p, x_0}(D, D')$ ). За означенням  $\varepsilon_0$

$$f^{-1}(K_f) \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0).$$

Оскільки точки  $S(x_0, r) \cap D$ ,  $0 < r < r'_0$ , є досяжними з області  $D$  за допомогою деякої кривої  $\gamma$  і множина  $B(x_0, r) \cap D$  є зв'язною при  $0 < r < r'_0$ , точки  $x$  і  $y$  можна з'єднати кривою  $K$ , яка повністю належить кулі  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)}$  і також належить  $D$ . Нехай  $z, w \in K_f \subset D'$  є такими, що  $\text{diam } K_f = |z - w| \geq \delta$ . Зауважимо, що  $|f(K)|$  є континуумом як неперервний образ континуума  $|K|$  при відображенні  $f$ . Зафіксуємо довільним чином  $y_0 \in D'$ . Тоді, оскільки область  $D'$  обмежена, існує таке  $R_0 > 0$ , що  $D' \subset B(y_0, R_0) := B_{R_0}$ . У такому випадку, з огляду на [21, твердження 4.7]

$$M_p(\Gamma(f(K), K_f, D')) \geq \frac{1}{M} \frac{\min\{\text{diam } f(K), \text{diam } K_f\}}{R_0^{1+p-n}}. \quad (28)$$

Нехай  $\Gamma^*$  — сім'я  $\gamma: [0, 1) \rightarrow D$  усіх максимальних піднять кривих  $\gamma': [0, 1] \rightarrow D'$  сім'ї  $\Gamma = \Gamma(|f(K)|, K_f, D')$ , при відображенні  $f$  з початком у  $|K|$ . Такі підняття існують з огляду на лему 3.12 [23] (див. також лему 3.7 [18]). За цим же твердженням, завдяки замкненості відображення  $f$ , кожна крива  $\gamma \in \Gamma^*$  має неперервне продовження  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$  у точку  $b = 1$ . Тоді  $\gamma(1) \in f^{-1}(K_f)$ , тобто  $\Gamma^* \subset \Gamma(|K|, f^{-1}(K_f), D)$ .

Міркуючи, як і при встановленні співвідношення (19), можна довести, що

$$\Gamma(|K|, f^{-1}(K_f), D) > \Gamma(S(x_0, |x - x_0|), S(x_0, \varepsilon_0), D). \quad (29)$$

Зауважимо, що  $f(\Gamma^*) = \Gamma = \Gamma(|f(K)|, K_f, D')$ . У такому випадку, за принципом мінорування модуля (див., наприклад, [16, теорема 6.4]), з огляду на (1), (29) отримуємо

$$\begin{aligned} M_p(f(\Gamma^*)) &= M_p(\Gamma(|f(K)|, K_f, D')) \\ &\leq M_p(\Gamma(S(x_0, |x - x_0|), S(x_0, \varepsilon_0), D)) \\ &\leq \int_A Q(x) \eta^p(|z - x_0|) dm(z), \end{aligned} \quad (30)$$

де  $\eta$  — довільна вимірنا за Лебегом функція, яка задовольняє співвідношення (2) при  $r_1 = |x - x_0|$ ,  $r_2 = \varepsilon_0$ . Покладемо

$$\eta(t) := \begin{cases} \frac{\psi(t)}{I(|x - x_0|, \varepsilon_0)}, & t \in (|x - x_0|, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (|x - x_0|, \varepsilon_0). \end{cases}$$

З огляду на (21) доводимо, що функція  $\eta$  задовольняє умову (2) при  $r_1 = |x - x_0|$  і  $r_2 = \varepsilon_0$ . Враховуючи (13), (14) і (30), одержуємо

$$\begin{aligned} M_p(\Gamma(f(|K|), K_f, D')) \\ \leq \frac{1}{I^p(|x - x_0|, \varepsilon_0)} \int_{A(x_0, |x - x_0|, \varepsilon_0)} Q(z) \psi^p(|z - x_0|) dm(z) \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Зі співвідношення (31) маємо

$$M_p(\Gamma(f(|K|), K_f, D')) \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \quad (32)$$

Поєднуючи (28) і (32), отримуємо

$$\frac{1}{M} \frac{\min\{\text{diam } f(|K|), \text{diam } K_f\}}{R_0^{1+p-n}} \leq K_0 I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0).$$

Повторюючи далі доведення леми 1, переконуємося, що

$$|f(x) - f(y)| \leq 2R_0 \leq \frac{2R_0}{P_0} I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0).$$

Покладемо  $\tilde{C} := \max\left\{MR_0^{1+p-n}K_0, \frac{2R_0}{P_0}\right\}$ . Стала  $\tilde{C}$  залежить лише від  $K_0$ ,  $x_0$ ,  $p$ ,  $n$  і  $D'$ , бо  $M$  і  $R_0$  цілком визначаються по області  $D'$ , а число  $\varepsilon_0 > 0$  за умовою залежить лише від  $x_0$ . Наявність границі у відображення  $f$  в точці  $x_0$  може бути доведена так само, як в лемі 1.

Лему 2 доведено.

**Лема 3.** Припустимо, що в умовах теореми 5 замість співвідношень (9) виконується така умова: для кожного  $y_0 \in I(P_0)$  існують  $0 < \varepsilon_0 < \min\{\text{dist}(x_0, A), 1, r'_0\}$ ,  $1 \leq q < p$ ,  $K_0 > 0$ , і вимірна за Лебегом функція  $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що при  $\varepsilon \rightarrow +0$  виконуються співвідношення (13), (14). Тоді для кожного  $P \in E_D = \overline{D}_P \setminus D$  існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ , де  $I(P)$  позначає тіло простого кінця  $P$ . Крім того, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і число  $\tilde{C} > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C} I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0),$$

де  $\{x_0\} := I(P_0)$ .

**Доведення.** Для зручності розіб'ємо доведення на окремі пункти.

1. Нехай  $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,\delta}^{p,P_0}(D, D')$ . Оскільки за умовою  $B(y_0, r) \cap D$  скінченно зв'язна при всіх  $y_0 \in \partial D$  і  $0 < r < r'_0(y_0)$ , область  $D$  скінченно зв'язна на своїй межі. Тому  $D$  є рівномірною областю за Няккі (див. [24, теорема 3.2]). За означенням рівномірної області для кожного  $r > 0$  існує таке число  $\delta > 0$ , що співвідношення

$$M(\Gamma(F^*, F, D)) \geq \delta$$

виконується для всіх континуумів  $F, F^* \subset D$ , для яких  $\text{diam } F \geq r$  і  $\text{diam } F^* \geq r$ .

2. Покажемо, що для кожного  $P \in E_D$  знайдеться таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ . Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що існує елемент  $P \in E_D$ , тіло якого містить у собі принаймні дві точки  $x, y \in \partial D$ ,  $x \neq y$ . Тоді існують відповідні послідовності  $x_m, y_m \in d_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , збіжні до  $x$  і  $y$  при  $m \rightarrow \infty$  (символом  $d_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , позначається спадна послідовність областей, утворена деякою послідовністю розрізів  $\sigma_m$  у простому кінці  $P$ ). З'єднаємо точки  $x_m$  і  $y_m$  кривою  $\gamma_m$  в  $d_m$ . Оскільки  $x \neq y$ , то знайдеться таке  $m_0 \in \mathbb{N}$ , що  $\text{diam}(\gamma_m) \geq |x - y|/2$ ,  $m > m_0$ . Зафіксуємо деякий невироджений континуум  $C \subset D \setminus d_1$ . Внаслідок рівномірності області  $D$  знайдеться таке  $\delta_0 > 0$ , що

$$M(\Gamma(|\gamma_m|, C, D)) \geq \delta_0 > 0 \quad (33)$$

для всіх  $m > m_0$ . Нерівність (33) суперечить означенню простого кінця  $P$ . Справді, за означенням розрізу  $\sigma_m$  маємо  $\Gamma(|\gamma_m|, C, D) > \Gamma(\sigma_m, C, D)$ . Тоді зі співвідношення (8) випливає, що  $M(\Gamma(|\gamma_m|, C, D)) \leq M(\Gamma(\sigma_m, C, D)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Останнє суперечить (33). Отже, існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ .

3. Доведемо співвідношення (10). Нехай  $\{x_0\} := I(P_0)$ . Тоді знайдеться такий окіл  $U$  елемента  $P_0$ , що  $U \cap D \subset B(x_0, \varepsilon_0)$ . З огляду на означення регулярної області множину  $U \cap D$  можна вважати зв'язною. Нехай  $x, y \in U \cap D$  і  $f \in \mathfrak{F}_{Q, A, \delta}^{p, P_0}(D, D')$ . За означенням  $\varepsilon_0$  точки  $x$  і  $y$  можна з'єднати кривою  $K$  в області  $D$ , яка міститься у кулі  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)}$ . Нехай  $z, w \in f(A) \subset D'$  і  $u, v \in A$  є такими, що

$$\text{diam } f(A) = |z - w| = |f(u) - f(v)| \geq \delta. \quad (34)$$

Міркуючи, як і при доведенні теореми 1 після формули (17), приходимо до нерівності

$$|f(x) - f(y)| \leq 2R_0 \leq \tilde{C}I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0),$$

де  $\tilde{C} := \max \left\{ MR_0^{1+p-n} K_0, \frac{2R_0}{P_0} \right\}$ ,  $M$  — стала, що відповідає коефіцієнту  $C$  у [21, твердження 4.7],  $R_0 > 0$  — таке число, що  $D' \subset B(y_0, R_0)$ , а  $P_0$  визначається за формулою (27).

Лему 3 доведено.

**Доведення наслідку 5.** За теоремою 5  $I(P_0) = \{x_0\}$ . Тоді при  $x \rightarrow P_0$  і  $y \rightarrow P_0$  виконується також  $x \rightarrow x_0$  і  $y \rightarrow x_0$ . Якщо б відображення  $f$  не мало границі при  $x \rightarrow P_0$ , то ми побудували б не менше двох послідовностей  $x_m \rightarrow P_0$  і  $y_m \rightarrow P_0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , таких, що  $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \delta > 0$  для деякого додатного  $\delta > 0$  і всіх  $m = 1, 2, \dots$ . Але це суперечить нерівності (10). Отже, існує границя  $f$  при  $x \rightarrow P_0$ . Для доведення (11) залишилося перейти у (10) до границі при  $y \rightarrow P_0$ .

**Лема 4.** Припустимо, що в умовах теореми 7 замість співвідношень (12) виконується така умова: існують  $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) < \min\{1, \delta, r'_0\}$ ,  $1 \leq q < p$ ,  $K_0 > 0$ , і вимірна за Лебегом функція  $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що при  $\varepsilon \rightarrow +0$  виконуються співвідношення (13), (14). Тоді для кожного  $P \in E_D = \overline{D}_P \setminus D$  існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ , де  $I(P)$  позначає тіло простого кінця  $P$ . Крім того, існують окіл  $U$  простого кінця  $P_0$  у просторі  $\overline{D}_P$  і  $\tilde{C} = \tilde{C}(p, n, C, D') > 0$  такі, що для всіх  $f \in \mathfrak{R}_{Q, \delta}^{p, P_0}(D, D')$  і  $x, y \in U \cap D$ ,  $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ , виконується нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{C}I^{q-p}(|x - x_0|, \varepsilon_0), \quad (35)$$

де  $\{x_0\} := I(P_0)$ .

**Доведення.** Обмежимося лише схемою доведення. Те, що для кожного  $P \in E_D$  існує таке  $y_0 \in \partial D$ , що  $I(P) = \{y_0\}$ , може бути встановлено так само, як і при доведенні леми 3.

Встановимо співвідношення (35). За доведенням вище знайдеться таке  $x_0 \in \partial D$ , що  $I(P_0) = \{x_0\}$ . Звідси випливає, що знайдеться такий окіл  $U$  точки  $P_0$  у  $\overline{D}_P$ , що  $U \cap D \subset B(x_0, \varepsilon_0)$ . За означенням регулярної області множина  $U \cap D$  є зв'язною для достатньо малих  $\rho$ . Нехай  $x, y \in U \cap D$  і  $f \in \mathfrak{R}_{Q, \delta}^{p, P_0}(D, D')$ . За означенням  $\varepsilon_0$  точки  $x$  і  $y$  можна з'єднати кривою  $K$ , яка міститься у кулі  $\overline{B(x_0, |x - x_0|)}$ .

Нехай  $K_f \subset D'$  — такий континуум, що  $\text{diam}(K_f) \geq \delta$  і  $\text{dist}(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$  (він існує за означенням класу  $\mathfrak{R}_{Q, \delta}^{p, P_0}(D, D')$ ). Нехай також  $z, w \in K_f \subset D'$  є такими, що  $\text{diam } K_f =$

$|z-w| \geq \delta$ . Проводячи міркування, аналогічні доведенню леми 3 після формули (34), приходимо до співвідношення (35).

Лему 4 доведено.

**3. Доведення основних результатів. Доведення теореми 1.** Покладемо  $\varepsilon_0 = \delta_0$ , де  $\delta_0$  — число зі співвідношення (3). Співвідношення (3) тягне за собою, що  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$  при всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  і деякому  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ . Нехай  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Розглянемо функцію  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$ , де

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 / \left[ t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t) \right], & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0) \end{cases}$$

(як звичайно, ми дотримуємося стандартних домовленостей  $a/\infty = 0$  при  $a \neq \infty$ ,  $a/0 = \infty$  при  $a > 0$  і  $0 \cdot \infty = 0$ , див. [25, глава I]). Оскільки  $f$  — гомеоморфізм,  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$  (див. [4, зауваження 7.2]). Покажемо, що функція  $\psi$  задовольняє умову (14). Справді, застосовуючи теорему Фубіні (див., наприклад, [25, теорема 8.1.III]), отримуємо

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^p(|x-x_0|) dm(x) = \omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \omega_{n-1} I(\varepsilon, \varepsilon_0).$$

Отже, співвідношення (3) тягне за собою умову (14) при  $q = 1$  і  $K_0 = \omega_{n-1}$ . Тому бажана нерівність (15), як і можливість неперервного продовження відображення  $f$  у точку  $x_0$ , випливає з леми 1.

**Доведення наслідку 1.** Нерівність (5) одержуємо з (4) граничним переходом при  $y \rightarrow x_0$ .

**Доведення теореми 2.** З огляду на [4, гл. 6, наслідок 6.3] умова  $Q \in FMO(x_0)$  тягне за собою, що для достатньо малих  $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_0 < 1$

$$\int_{\varepsilon < |x-x_0| < \tilde{\varepsilon}_0} Q(x) \psi^p(|x-x_0|) dm(x) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (36)$$

де  $\psi(t) = \left(\frac{1}{t \log(1/t)}\right)^{n/p} > 0$ . Зауважимо, що величина  $I(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}_0)$ , визначена у (13), оцінюється так:

$$I(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}_0) = \int_{\varepsilon}^{\tilde{\varepsilon}_0} \psi(t) dt \geq \int_{\varepsilon}^{\tilde{\varepsilon}_0} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t}} = \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0}}.$$

У такому випадку з (36) випливає, що

$$\frac{1}{I^p(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}_0)} \int_{\varepsilon < |x-x_0| < \tilde{\varepsilon}_0} Q(x) \psi^p(|x-x_0|) dm(x) \leq C_1 \left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-p}.$$

Бажане твердження випливає з леми 1.

**Доведення наслідку 2** випливає з теореми 2 аналогічно доведенню наслідку 1.

**Доведення теореми 3** випливає з леми 2 аналогічно доведенню теореми 1.

**Доведення наслідку 3** впливає з леми 2 аналогічно доведенню наслідку 1.  
**Доведення теореми 4** впливає з леми 2 аналогічно доведенню теореми 2.  
**Доведення наслідку 4** впливає з теореми 4 аналогічно доведенню наслідку 2.  
**Доведення теореми 5** впливає з леми 3 аналогічно доведенню теореми 1.  
**Доведення наслідку 5** впливає з теореми 5 аналогічно доведенню наслідку 1.  
**Доведення теореми 6** впливає з леми 3 аналогічно доведенню теореми 2.  
**Доведення теореми 7** впливає з леми 4 аналогічно доведенню теореми 1.  
**Доведення наслідку 6** впливає з теореми 7 аналогічно доведенню наслідку 1.  
**Доведення теореми 8** впливає з леми 4 аналогічно доведенню теореми 2.

**Конфлікт інтересів.** Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

**Фінансування.** Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

**Авторські внески.** Усі автори зробили рівний внесок у роботу.

## Література

1. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Distortion and singularities of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **465**, 1–13 (1970).
2. O. Martio, R. Näkki, *Boundary Hölder continuity and quasiconformal mappings*, J. London Math. Soc. (2), **44**, 339–350 (1991).
3. V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov, *Toward the theory of ring  $Q$ -homeomorphisms*, Israel J. Math., **68**, 101–118 (2008).
4. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).
5. M. Arsenović, M. Mateljević, *On the Hölder continuity of ring  $Q$ -homeomorphisms*, Georgian Math. J., **29**, № 6, 805–811 (2022).
6. V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *On the Hölder property of mappings in domains and on boundaries*, J. Math. Sci., **246**, № 1, 60–74 (2020).
7. M. Mateljević, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Hölder and Lipschitz continuity in Orlicz–Sobolev classes, distortion and harmonic mappings*, Filomat, **36**, № 16, 5359–5390 (2022).
8. M. Mateljević, E. Sevost'yanov, *On the behavior of Orlicz–Sobolev mappings with branching on the unit sphere*, J. Math. Sci., **270**, № 3, 467–499 (2023).
9. О. А. Сарана, *Про гомеоморфізми з інтегральними обмеженнями, які діють в області з нерівностями Пуанкаре*, Праці Інституту прикл. математики і механіки НАН України, **37**, № 2, 95–103 (2023).
10. E. Sevost'yanov, *The boundary Hölder continuity of mappings with the Poletsky condition*, J. Math. Sci., **281**, № 5, 818–835 (2024).
11. О. П. Довгопятий, Є. О. Севостьянов, *Про гомеоморфізми з фіксованою точкою на області з нерівностями Пуанкаре*, Укр. мат. вісн., **21**, № 4, 35–55 (2024).
12. R. Salimov, *Ine property of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -module*, Ukr. Math. J., **65**, № 5, 728–733 (2013).
13. R. Salimov, *To a theory of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -modulus*, J. Math. Sci., **196**, № 5, 679–692 (2014).
14. R. Salimov, B. Klishchuk, *On the behavior of one class of homeomorphisms at innity*, Ukr. Math. J., **74**, 1617–1628 (2023).
15. R. Salimov, L. Vyhivska, B. Klishchuk, *On distortions of the transnite diameter of disk image*, Ukr. Math. J., **75**, № 2, 235–243 (2023).
16. J. Väisälä, *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).

17. J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer Sci.+Business Media, New York (2001).
18. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in  $n$ -space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., **11**, 1–44 (1976).
19. D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *On the theory of prime ends for space mappings*, Ukr. Math. J., **67**, № 4, 528–541 (2015).
20. R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **35**, 13–40 (1979).
21. T. Adamowicz, N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35**, 609–626 (2010).
22. K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press, New York, London (1968).
23. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **488**, 1–31 (1971).
24. R. Näkki, *Continuous boundary extension of quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **511**, 1–10 (1972).
25. S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ. Inc., New York (1964).

Одержано 26.08.24