

Євген Севостьянов¹ (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.),

Валерій Таргонський (Житомирський державний університет імені Івана Франка)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ З ОБЕРНЕНОЮ МОДУЛЬНОЮ УМОВОЮ ДО ДИСКРЕТНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

We consider mappings satisfying the Poletsky-type inverse inequality in a domain of the Euclidean space. It is shown that the uniform limit of the family of these mappings is a discrete mapping. We separately consider domains that are locally connected on their boundaries and regular domains in the quasiconformal sense.

Досліджено відображення, які задовольняють обернену нерівність типу Полецького в області евклідового простору. Доведено, що рівномірна границя сім'ї таких відображень є дискретним відображенням. Окремо розглянуто області, локально зв'язні на своїй межі, та регулярні області в квазіконформному сенсі.

1. Вступ. У цій статті будемо досліджувати відображення з обмеженим і скінченним спотворенням (див., наприклад, [1–8]). У нещодавній публікації [9] ми довели дискретність відображення в замиканні області, яке задовольняє обернену умову спотворення модуля сімей кривих та припускається відкритим, дискретним і замкненим. Отримання цього результату передбачає можливість неперервного продовження на межу, що за вказаних умов також виконується (див. там же, а також [10]). Тут ми отримаємо більш загальний результат, а саме, покажемо, що аналогічну властивість задовольняють не лише самі відображення, а й їхні рівномірні границі. Зауважимо, що результати, близькі до наведених у цій роботі, отримано для квазірегулярних відображень у [7]. Проте в ній не були встановлені результати щодо границі послідовності відображень, а доведено лише дискретність одного (фіксованого) відображення у замиканні області.

Наведемо необхідні означення. Скрізь далі $M(\Gamma)$ позначає модуль сім'ї Γ (див. [8]). Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$,

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}, \quad (1)$$

$B(y_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = B(0, 1)$ і $S(y_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| = r\}$. Для заданих множин $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D \subset \mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in [a, b]$. Якщо $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{y \in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція, $Q(y) \equiv 0$ при $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(D)$. Будемо говорити, що f задовольняє обернену нерівність Полецького в точці $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, якщо співвідношення

¹ Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \eta^n(|y - y_0|) dm(y) \quad (2)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. За допомогою інверсії $\psi(y) = \frac{y}{|y|^2}$ можна також визначити співвідношення (2) у точці $y_0 = \infty$. Відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається лише з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., наприклад, [7, розд. 3]). У подальшому в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π — стереографічна проєкція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ (див., наприклад, [8, означення 12.1]).

Скрізь далі межу ∂A множини A і замикання $\bar{A}$ слід розуміти в сенсі розширеного евклідового простору $\overline{\mathbb{R}^n}$. Неперервне продовження відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ також слід розуміти з точки зору відображення зі значеннями в $\overline{\mathbb{R}^n}$ і відносно метрики h . Нагадаємо, що область $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *локально зв'язною в точці* $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться такий окіл $V \subset U$ точки x_0 , що $V \cap D$ є зв'язним. Область D локально зв'язна на ∂D , якщо D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Ми кажемо, що область D є *скінченно зв'язною* у точці $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 існує такий окіл $V \subset U$ цієї точки, що $V \cap D$ складається зі скінченної кількості компонент зв'язності. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *нульвимірним*, якщо для кожної точки $y \in Y$ множина $f^{-1}(y)$ не містить в собі континуум $K \subset X$, відмінний від точки. Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться такий окіл $V \subset U$ цієї ж точки, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для будь-яких континуумів $E, F \subset D$, які перетинають ∂U і ∂V . Межа області D називається *слабко плоскою*, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D .

Для відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, множини $E \subset D$ та $y \in \mathbb{R}^n$ визначимо *функцію кратності* $N(y, f, E)$ як кількість прообразів точки y у множині E , тобто $N(y, f, E) = \text{card} \{x \in E : f(x) = y\}$, $N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E)$. Будемо говорити, що функція $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ має *скінченне середнє коливання* у точці $x_0 \in D$ (пишемо $\varphi \in FMO(x_0)$), якщо $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$, де $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$. Покладемо $q_{y_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(y_0, r)} Q(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$, де ω_{n-1} позначає площу одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Справджуються такі твердження.

Теорема 1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабко плоску межу, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ є скінченно зв'язною на своїй межі. Припустимо, що f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого (не тотожно сталого) відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \overline{D'}$. Нехай також виконано одну з двох умов:

1) $Q \in FMO(\overline{D}')$;
 2) для будь-якого $y_0 \in \overline{D}'$ знайдеться таке $\delta(y_0) > 0$, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконуються умови $\int_{\varepsilon}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$, $\int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty$.
 Тоді відображення f є нульвимірним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$, $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D}'$ і $\bar{f}$ є нульвимірним відносно $\overline{D}$.

У випадку, коли відображена область є не лише скінченно зв'язною, а й локально зв'язною на своїй межі, крім того, f зберігає орієнтацію, маємо більш посилений варіант теореми 1.

Теорема 2. Нехай в умовах теореми 1 D' є локально зв'язною на своїй межі, а відображення f зберігає орієнтацію. Тоді відображення f є відкритим, дискретним і замкненим у D та має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D}'$ таке, що $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D}'$ і $N(f, D) = N(\bar{f}, \overline{D}) < \infty$. Зокрема, $\bar{f}$ є дискретним у $\overline{D}$.

2. Основні леми. Випадок областей, локально зв'язних на межі. Наступне твердження доведено в [9, лема 3.1] для окремого відображення (див. також відповідний класичний варіант для квазірегулярних відображень у [7, лема 4.4]). Версія, яку наведено нижче, стосується збіжної послідовності відображень.

Лема 1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабо плоску межу, і f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих дискретних відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого (не тотожно сталого) відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \overline{D}'$. Припустимо, що для кожного $y_0 \in \overline{D}'$ знайдуться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такі, що

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

і, крім того, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (4)$$

де $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ визначено в (1). Нехай C_j , $j = 1, 2, \dots$, — довільна послідовність континуумів така, що $h(C_j) \geq \delta > 0$ для деякого $\delta > 0$ і всіх $j \in \mathbb{N}$. Тоді існує таке $\delta_1 > 0$, що $h(f(C_j)) \geq \delta_1 > 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Зауваження 1. У точці $y_0 = \infty$ співвідношення (4) слід розуміти за допомогою інверсії $\psi(y) = \frac{y}{|y|^2}$ в нулі. Тобто замість $\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \psi^n(|y - y_0|) dm(y) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$ будемо розглядати умову $\int_{A(0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \psi^n(|y|) dm(y) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$.

Доведення леми 1. Припустимо супротивне: нехай існує зростаюча послідовність номерів j_k , $k = 1, 2, \dots$, така, що $h(f(C_{j_k})) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. З огляду на компактність простору $\mathbb{R}^n$ можна вважати, що $h(f(C_{j_k}), y_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, де $y_0 \in \mathbb{R}^n$ — деяка точка. З огляду на лему 1 в [11] f або нульвимірне, або стале відображення. Оскільки за припущенням f не є сталим, то f нульвимірне. Отже, існує така точка $z_0 \in D$, що $f(z_0) \neq y_0$. Оскільки f неперервне відображення, можна знайти таке $r_0 > 0$, що

$$\overline{B(z_0, r_0)} \subset D, \quad f(\overline{B(z_0, r_0)}) \cap \overline{B(y_0, \varepsilon_1)} = \emptyset, \quad (5)$$

де $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ і ε_0 — число зі співвідношень (3), (4). Покладемо $F := \overline{B(z_0, r_0)}$, $\Gamma_k := \Gamma(F, C_{j_k}, D)$.

З огляду на (5) покажемо, що існує такий окіл V елемента y_0 , що

$$f_j(F) \cap V = \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Припустимо протилежне. Тоді існують такі послідовності $i_m \in \mathbb{N}$ і $x_m \in F$, $m = 1, 2, \dots$, що $f_{i_m}(x_m) \rightarrow y_0$ при $m \rightarrow \infty$. За нерівністю трикутника

$$h(f(x_m), y_0) \leq h(f(x_m), f_{i_m}(x_m)) + h(f_{i_m}(x_m), y_0) \rightarrow 0 \quad (7)$$

при $m \rightarrow \infty$, оскільки $h(f(x_m), f_{i_m}(x_m)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ за рівномірною збіжністю f_m до f у D по метриці h . Співвідношення (7) суперечить (5), що доводить (6).

Зауважимо, що область зі слабко плоскою межею є рівномірною (див. [9, наслідок 4.3]), тобто, якщо континууми C_{j_k} задовольняють умову $h(C_{j_k}) \geq \delta > 0$ і $h(F) > \delta_* > 0$, знайдеться таке $\delta_2 > 0$, що

$$M(\Gamma_k) \geq \delta_2 > 0 \quad (8)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує такий номер $k = k_l$, що

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, 1/l), \quad k \geq k_l. \quad (9)$$

Припустимо протилежне. Тоді існує таке $l_0 \in \mathbb{N}$, що

$$f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, 1/l_0)) \neq \emptyset \quad (10)$$

для деякої зростаючої послідовності номерів k_m , $m = 1, 2, \dots$. У такому разі знайдеться послідовність $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, 1/l_0))$, $m \in \mathbb{N}$. Нехай $z_m = f_{j_{k_m}}(x_m)$, $x_m \in C_{j_{k_m}}$, $m = 1, 2, \dots$. Оскільки $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) \rightarrow 0$ для деякої зростаючої послідовності номерів j_k , $k = 1, 2, \dots$, то, зокрема,

$$h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Оскільки $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) = \inf_{y \in f(C_{j_{k_m}})} h(y, y_0)$ і $f(C_{j_{k_m}})$ є компактом як неперервний образ компакта $C_{j_{k_m}}$ при відображенні f , звідси випливає, що $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) = h(y_m, y_0)$, де $y_m \in f(C_{j_{k_m}})$. Тоді зі співвідношення (11) отримаємо, що $y_m \rightarrow y_0$ при $m \rightarrow \infty$. Оскільки за припущенням $h(f(C_j)) = \sup_{y, z \in f(C_j)} h(y, z) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то $h(y_m, f(x_m)) \leq h(f(C_{j_{k_m}})) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тоді за нерівністю трикутника і за доведеним вище одержимо

$$\begin{aligned} h(z_m, y_0) &= h(f_{j_{k_m}}(x_m), y_0) \\ &\leq h(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) + h(f(x_m), y_m) + h(y_m, y_0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

оскільки $h(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) \leq \sup_{x \in D} h(f_{j_{k_m}}(x), f(x)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ за рівномірною збіжністю f_j до f при $j \rightarrow \infty$. Останні два члени в (12) також прямують до нуля за побудовою та доведеним вище. Зі співвідношення (12) випливає, що $z_m \rightarrow y_0$ при $m \rightarrow \infty$, що суперечить визначенню z_m . Тоді припущення в (10) є хибним, що доводить (9).

З (9) випливає, що

$$f_{j_{k_l}}(C_{j_{k_l}}) \subset B(y_0, 1/l), \quad (13)$$

причому можна вважати послідовність номерів k_l , $l = 1, 2, \dots$, зростаючою. Переходячи у (13) до перенумерації, можна вважати, що сама послідовність j_k , $k = 1, 2, \dots$, задовольняє цю умову, тобто

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, 1/k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Зменшуючи за потреби число $\varepsilon_0 > 0$ з умови леми, можна вважати, що окіл V точки y_0 у (6) є таким, що $\overline{B(y_0, \varepsilon_0)} \subset V$. Крім того, нехай $k_0 \in \mathbb{N}$ є таким, що $B(y_0, 1/k) \subset B(y_0, \varepsilon_0)$ при всіх $k \geq k_0$. У такому разі зауважимо, що

$$f_{j_k}(\Gamma_{j_k}) > \Gamma(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0)). \quad (15)$$

Справді, нехай $\tilde{\gamma} \in f_{j_k}(\Gamma_{j_k})$. Тоді $\tilde{\gamma}(t) = f_{j_k}(\gamma(t))$, де $\gamma \in \Gamma_{j_k}$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(0) \in F$, $\gamma(1) \in C_{j_k}$. З огляду на співвідношення (6) маємо, що $f_{j_k}(\gamma(0)) \in f(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$, крім того, за співвідношенням (14) отримуємо, що $f_{j_k}(\gamma(1)) \in f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, \varepsilon_0)$. Отже, $|f(\gamma(t))| \cap B(y_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset \neq |f(\gamma(t))| \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(y_0, \varepsilon_0)})$. Тоді з огляду на теорему 1.1.5.46 у [12] переконуємося, що існує таке $0 < t_1 < 1$, що $f_{j_k}(\gamma(t_1)) \in S(y_0, \varepsilon_0)$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$. Можна вважати, що $f_{j_k}(\gamma(t)) \in B(y_0, \varepsilon_0)$ і $f_{j_k}(\gamma(t)) \in B(y_0, \varepsilon_0)$ при всіх $t \geq t_1$. Міркуючи аналогічно, отримуємо таку точку $t_2 \in (t_1, 1]$, що $f_{j_k}(\gamma(t_2)) \in S(y_0, 1/k)$. Покладемо $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Можна вважати, що $f_{j_k}(\gamma(t)) \notin B(y_0, 1/k)$ при всіх $t \in [t_1, t_2]$. Тоді крива $f_{j_k}(\gamma_2)$ є підкривою кривої $f_{j_k}(\gamma) = \tilde{\gamma}$, яка належить до сім'ї $\Gamma(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0))$. Співвідношення (15) встановлено.

З (15) випливає, що

$$\Gamma_{j_k} > \Gamma_{f_{j_k}}(y_0, 1/k, \varepsilon_0). \quad (16)$$

Покладемо $\eta_k(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(1/k, \varepsilon_0), & t \in (1/k, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (1/k, \varepsilon_0), \end{cases}$ де $I(1/k, \varepsilon_0) = \int_{1/k}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$. Зауважимо, що $\int_{1/k}^{\varepsilon_0} \eta_k(t) dt = 1$. Тоді за співвідношеннями (4), (16), а також з огляду на означення відображення f_{j_k} у (2) будемо мати

$$\begin{aligned} M(\Gamma_{j_k}) &\leq M(\Gamma_{f_{j_k}}(y_0, 1/k, \varepsilon_0)) \\ &\leq \frac{1}{I^n(1/k, \varepsilon_0)} \int_{A(y_0, 1/k, \varepsilon_0)} Q(y) \psi^n(|y - y_0|) dm(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Останнє співвідношення суперечить (8). Отримана суперечність доводить лему.

Наступна лема узагальнює наслідок 4.5 у [7] на випадок відображень з необмеженою характеристикою (див. також лему 3.2 в [9]).

Лема 2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабо плоску межу, область $D' \subset \mathbb{R}^n$ є скінченно зв'язною на своїй межі і f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого

відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \overline{D'}$. Нехай для будь-якого $y_0 \in \overline{D'}$ знайдуться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такі, що виконуються співвідношення (3), (4), де $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ визначено в (1). Тоді відображення f є нульвимірним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$, $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і $\bar{f}$ є нульвимірним відносно $\overline{D}$.

Доведення. Можна вважати, що $y_0 \neq \infty$. З огляду на [11] відображення f є нульвимірним у D . За лемою 5.1 у [9] кожне f_m , $m = 1, 2, \dots$, має неперервне продовження $\bar{f}_m: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$ на $\overline{D}$ таке, що $f_m(\overline{D}) = \overline{D'}$.

I. Покажемо, що існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для кожного $x_0 \in \partial D$. Справді, за нерівністю трикутника $h(f(x), f(x_0)) \leq h(f(x), f_m(x)) + h(f_m(x), f_m(x_0)) + h(f_m(x_0), f(x_0))$. У цій нерівності перший і третій доданки прямують до нуля внаслідок рівномірної збіжності f_m у D . Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $M = M(\varepsilon)$, що при $m \geq M(\varepsilon)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + h(f_m(x), f_m(x_0)). \quad (17)$$

При $m = M(\varepsilon)$ відображення f_m неперервно продовжується в точку x_0 , так що знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, що $h(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon/3$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Тоді з огляду на (17) $h(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ при тих же δ .

II. Покажемо, що f — замкнене відображення в D . Нехай E — замкнена в D множина. Треба показати, що $f(E)$ замкнена в D' . Нехай z_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність у $f(E)$ така, що $z_m \rightarrow z_0 \in D'$ при $m \rightarrow \infty$. Покажемо, що $z_0 \in f(E)$. Оскільки $z_m \in f(E)$, знайдуться такі $x_m \in E$, що $f(x_m) = z_m$, $m = 1, 2, \dots$. З огляду на компактність $\mathbb{R}^n$ можна вважати, що послідовність x_m збігається до деякого $x_0 \in \overline{D}$ при $m \rightarrow \infty$. Якщо $x_0 \in D$, то $x_0 \in E$, отже, $f(x_0) = z_0 \in f(E)$ з огляду на неперервність відображення f у D . Покажемо, що випадок $x_0 \in \partial D$ неможливий. Справді, оскільки f_m має неперервне продовження в точку x_0 , знайдеться така послідовність $w_m \in D$, $w_m \rightarrow x_0$ при $m \rightarrow \infty$, що $h(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$. Тоді за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} h(f_m(x_0), f(x_0)) &\leq h(f_m(x_0), f_m(w_m)) + h(f_m(w_m), f(w_m)) + h(f(w_m), f(x_0)) \\ &< \frac{1}{m} + h(f_m(w_m), f(w_m)) + h(f(w_m), f(x_0)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

оскільки f_m збігається до f рівномірно у D , а f неперервна в точці x_0 за доведеним вище. Зауважимо, що $f_m(x_0) \in \partial D'$ при $m \in \mathbb{N}$ (див. теорему 3.3 в [7]). Оскільки $\partial D'$ — замкнена множина, то $f(x_0) \in \partial D'$. Тоді із неперервності f у $\overline{D}$ випливає, що $f(x_m) = z_m \rightarrow z_0$ і $f(x_0) = z_0 \in \partial D'$. Це суперечить вибору $z_0 \in D'$. Остаточно, $f(E)$ є замкнутою в D' , бо у випадку $x_0 \in D$ це встановлено, а випадок $x_0 \in \partial D$ неможливий.

III. Покажемо, що $f(\partial D) \subset \partial D'$. Нехай $x_0 \in \partial D$. Потрібно довести, що $f(x_0) \in \partial D'$. Оскільки f_m має неперервне продовження в точку x_0 , знайдеться така послідовність $w_m \in D$, $w_m \rightarrow x_0$ при $m \rightarrow \infty$, що $h(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$. Повторюючи міркування у (18), приходимо до висновку, що $f(x_0) \in \partial D'$.

IV. Покажемо, що $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$. Очевидно, що $\bar{f}(\overline{D}) \subset \overline{D'}$. Покажемо, що $\overline{D'} \subset \bar{f}(\overline{D})$. Справді, нехай $y_0 \in \overline{D'}$, тоді або $y_0 \in D'$, або $y_0 \in \partial D'$. 1. Якщо $y_0 \in D'$, то $y_0 = f_j(x_j)$, $x_j \in D$. Можна вважати, що $x_j \rightarrow x_0$, $j \rightarrow \infty$, $x_0 \in \overline{D}$. За неперервністю f у $\overline{D}$ маємо $f(x_0) =$

$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j)$. Проте за рівномірною збіжністю f_j до f $f_j(x_j) - f(x_j) = y_0 - f(x_j) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Тоді $y_0 = f(x_0)$. Оскільки за доведеним $f(\partial D) \subset \partial D'$, то $x_0 \in D$. Отже, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in D$.
2. Нарешті, нехай $y_0 \in \partial D'$. Тоді знайдеться так послідовність $y_k \in D'$, що $y_k = f(x_k) \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$ і $x_k \in D$. Через компактність простору $\mathbb{R}^n$ можемо вважати, що $x_k \rightarrow x_0$, де $x_0 \in \overline{D}$. Тоді $\bar{f}(x_0) = y_0 \in \bar{f}(\overline{D})$. Отже, $\overline{D'} \subset \bar{f}(\overline{D})$.

V. Залишилося показати нульвимірність $\bar{f}$ на $\partial D'$. Припустимо супротивне, а саме, нехай існує така точка $y_0 \in \partial D'$, що $f^{-1}(y_0) \supset K_0$, де $K_0 \subset \overline{D}$ — деякий невідроджений континуум. Оскільки f нульвимірне в D , можна вважати, що $K_0 \subset \partial D$.

Оскільки $\overline{D}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, і крім того, відображення $\bar{f}$ є неперервним в $\overline{D}$, воно є рівномірно неперервним в $\overline{D}$. У цьому випадку для кожного $j \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $\delta_j < 1/j$, що

$$h(\bar{f}(x), \bar{f}(x_0)) = h(\bar{f}(x), y_0) < 1/j \quad \forall x, x_0 \in \overline{D}, \quad h(x, x_0) < \delta_j, \quad \delta_j < 1/j. \quad (19)$$

Позначимо $B_h(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, x_0) < r\}$. Тоді для заданого $j \in \mathbb{N}$, покладемо $B_j := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Оскільки множина B_j є околom континуума K_0 , з огляду на лему 2.2 в [13] існує такий окіл U_j множини K_0 , що $U_j \subset B_j$ і множина $U_j \cap D$ є зв'язною. Без обмеження загальності можна вважати, що U_j — відкрита множина. Тоді множина $U_j \cap D$ також лінійно зв'язна (див. твердження 13.1 в [5]). Оскільки K_0 — компакт, то знайдуться такі $z_0, w_0 \in K_0$, що $h(K_0) = h(z_0, w_0)$. Звідси випливає, що знайдуться такі елементи $z_j \in U_j \cap D$ і $w_j \in U_j \cap D$, що $z_j \rightarrow z_0$ і $w_j \rightarrow w_0$ при $j \rightarrow \infty$. Можемо припускати, що

$$h(z_j, w_j) > h(K_0)/2 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Оскільки множина $U_j \cap D$ лінійно зв'язна, точки z_j і w_j з'єднаємо деякою кривою $\gamma_j \in U_j \cap D$. Покладемо $C_j := |\gamma_j|$.

Зауважимо, що $h(f(C_j)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Справді, оскільки $f(C_j)$ — континуум в $\mathbb{R}^n$, існують такі точки $y_j, y'_j \in f(C_j)$, що $h(f(C_j)) = h(y_j, y'_j)$. Тоді існують такі $x_j, x'_j \in C_j$, що $y_j = f(x_j)$ і $y'_j = f(x'_j)$. Отже, точки x_j і x'_j належать до $U_j \subset B_j$. Це означає, що існують такі x_1^j і $x_2^j \in K_0$, що $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$ і $x'_j \in B(x_2^j, \delta_j)$. У такому разі за співвідношенням (19) і з огляду на нерівність трикутника отримуємо, що

$$\begin{aligned} h(f(C_j)) &= h(y_j, y'_j) = h(f(x_j), f(x'_j)) \\ &\leq h(f(x_j), f(x_1^j)) + h(f(x_1^j), f(x_2^j)) + h(f(x_2^j), f(x'_j)) < 2/j \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Зі співвідношення (20) випливає, що континууми C_j , $j = 1, 2, \dots$, задовольняють умови леми 1. За цією лемою $h(f(C_j)) \geq \delta_1 > 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і деякого $\delta_1 > 0$, що суперечить (21). Отримана суперечність вказує на хибність припущення, що відображення $\bar{f}$ не є нульвимірним у $\overline{D}$.

Лему доведено.

Нарешті сформулюємо і доведемо ключове твердження про дискретність відображення (див. [7, теорема 4.7] для випадку квазірегулярних відображень).

Лема 3. Нехай за умов леми 2 область D' є локально зв'язною на своїй межі, а відображення f зберігає орієнтацію. Тоді відображення $\bar{f}$ є відкритим, дискретним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$, $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ таке, що $N(f, D) = N(\bar{f}, \overline{D}) < \infty$. Зокрема, $\bar{f}$ є дискретним у $\overline{D}$.

Доведення. Будемо використовувати підходи, застосовані при доведенні теореми 4.7 у [7] (див. також теорему 6.1 у [9]). Передусім можливість продовження f до неперервного відображення $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$, нульвимірність, замкненість f і рівність $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'$ випливають з леми 2. Оскільки f зберігає орієнтацію і є нульвимірним, воно також відкрите і дискретне у D за теоремою Тітуса – Янга (див. [20, с. 333]). Зауважимо також, що $N(f, D) < \infty$ з огляду на теорему 2.8 у [14]. Залишилося довести рівність $N(f, D) = N(\bar{f}, \bar{D})$. Далі будемо міркувати методом від супротивного. Припустимо, що вказана рівність не виконується. Тоді знайдуться такі точки $y_0 \in \partial D'$ і $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \partial D$, що $f(x_i) = y_0$, $i = 1, 2, \dots, k+1$ і $k := N(f, D)$. Будемо вважати, що $y_0 \neq \infty$. Оскільки область D' є локально зв'язною в усіх точках своєї межі за припущенням, то для кожного $p \in \mathbb{N}$ знайдеться такий окіл $\widetilde{U}'_p \subset B(y_0, 1/p)$, що множина $\widetilde{U}'_p \cap D' = U'_p$ є зв'язною.

Доведемо, що для кожного $i = 1, 2, \dots, k+1$ знайдеться така компонента V_p^i множини $f^{-1}(U'_p)$, що $x_i \in \overline{V_p^i}$. Зафіксуємо $i = 1, 2, \dots, k+1$. За неперервністю $\bar{f}$ у $\bar{D}$ знайдеться таке $r_i = r_i(x_i) > 0$, що $f(B(x_i, r_i) \cap D) \subset U'_p$. Оскільки область, яка є слабо плоскою, локально зв'язна в кожній точці своїй межі (див. лему 3.15 у [5]), то знайдеться такий окіл $W_i \subset B(x_i, r_i)$ точки x_i , що $W_i \cap D$ є зв'язною множиною. Тоді $W_i \cap D$ належить одній і лише одній компоненті зв'язності V_p^i множини $f^{-1}(U'_p)$, до того ж $x_i \in \overline{W_i \cap D} \subset \overline{V_p^i}$, що і потрібно було довести.

Далі покажемо, що множини $\overline{V_p^i}$ є неперетинними при всіх $i = 1, 2, \dots, k+1$ і достатньо великих $p \in \mathbb{N}$. У свою чергу доведемо для цього, що $h(\overline{V_p^i}) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ для кожного фіксованого $i = 1, 2, \dots, k+1$. Проведемо доведення від супротивного. Тоді існують такі $1 \leq i_0 \leq k+1$, число $r_0 > 0$, $r_0 < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i, j \leq k+1, i \neq j} h(x_i, x_j)$ і зростаюча послідовність номерів p_m , $m = 1, 2, \dots$, що $S_h(x_{i_0}, r_0) \cap \overline{V_{p_m}^{i_0}} \neq \emptyset$, де $S_h(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, x_0) = r\}$. У такому разі існують такі $a_m, b_m \in V_{p_m}^{i_0}$, що $a_m \rightarrow x_{i_0}$ при $m \rightarrow \infty$ і $h(a_m, b_m) \geq r_0/2$. З'єднаємо точки a_m і b_m кривою C_m , яка цілком належить $V_{p_m}^{i_0}$. Тоді $h(|C_m|) \geq r_0/2$ при $m = 1, 2, \dots$. З іншого боку, оскільки $f(|C_m|) \subset f(V_{p_m}^{i_0}) \subset B(y_0, 1/p_m)$, то одночасно $h(f(|C_m|)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ і $h(|C_m|) \geq \frac{r_0}{2}$, $m = 1, 2, \dots$, що суперечить лемі 1. Отримана суперечність вказує на хибність зробленого вище припущення.

За лемою 3.6 у [7] f є відображенням кожного $\overline{V_p^i}$, $i = 1, 2, \dots, k, k+1$, на все U'_p , тобто $N(f, D) \geq k+1$, що суперечить означенню числа k . Отримана суперечність спростовує припущення, що $N(\bar{f}, \bar{D}) > N(f, D)$.

Лему доведено.

Доведення теорем 1 і 2 впливає з лем 2 і 3 за рахунок спеціально підібраної функції ψ (див. [15, лема 1.3]).

3. Випадок простих кінців. Результати, доведені в попередніх пунктах, залишаються справедливими для областей, які не є локально зв'язними на своїй межі, але мають визначену геометрію. Означення простого кінця, ланцюга розрізів та інші означення, які використовуються нижче, можна знайти в [17, 18]. Для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ покладемо $d(E) := \sup_{x, y \in E} |x - y|$. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D можна квазіконформно відобразити на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$, крім того, кожен простий кінець $P \subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що замикання $\bar{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому якщо $g: D_0 \rightarrow D$ — квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D , то для $x, y \in \bar{D}_P$ покладемо

$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|$, де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміємо як деяку (єдину) точку межі D_0 , коректно визначену з огляду на теорему 2.1 у [17] (див. також теорему 4.1 у [16]).

Справедливою є така лема.

Лема 4. Нехай $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — області в $\mathbb{R}^n$, причому D має слабо плоску межу, а D' є регулярною, і f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих дискретних відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого (не тотожно сталого) відображення $f: D \rightarrow \overline{D'}_P$ за метрикою ρ у $\overline{D'}_P$, тобто $\sup_{x \in D} \rho(f_j(x), f(x)) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \overline{D'}$. Припустимо, що для кожного $y_0 \in \overline{D'}$ знайдуться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такі, що виконано умови (3), (4), де $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ визначено в (1). Нехай C_j , $j = 1, 2, \dots$, — довільна послідовність континуумів така, що $h(C_j) \geq \delta > 0$ для деякого $\delta > 0$ і всіх $j \in \mathbb{N}$. Тоді існує таке $\delta_1 > 0$, що $\rho(f(C_j)) > \delta_1 > 0$ при $j = 1, 2, \dots$. Тут, як звичайно, $\rho(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$.

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді знайдеться зростаюча послідовність номерів j_k , $k = 1, 2, \dots$, для якої виконано умову $\rho(f(C_{j_k})) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Оскільки за припущенням D' регулярна, існує відображення g деякої області D_0 з локально квазіконформною межею на D' . Крім того, оскільки $\overline{D'}_P$ є компактним метричним простором, можна вважати, що $\rho(f(C_{j_k}), P_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, де $P_0 \in \overline{D'}_P$ і $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$.

Доведемо, що зі збіжності послідовності f_j до відображення f рівномірно по метриці ρ при $j \rightarrow \infty$ випливає локально рівномірна збіжність цієї ж послідовності у D відносно звичайної евклідової метрики. Припустимо протилежне. Тоді знайдеться компакт C у D , на якому збіжність f_j до f не рівномірна. Звідси випливає існування числа $\varepsilon_0 > 0$, точок $x_k \in C$, $k = 1, 2, \dots$, зростаючої послідовності номерів j_k , $k = 1, 2, \dots$, і відображень f_{j_k} , $k = 1, 2, \dots$, таких, що

$$|f_{j_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0. \quad (22)$$

Оскільки f_j збігається до f рівномірно в метриці ρ , це означає, що

$$g^{-1}(f_{j_k}(x_k)) - g^{-1}(f(x_k)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Оскільки C — компакт, то $g^{-1}(f(C))$ також компакт у D_0 як неперервний образ компакта. Тоді існує збіжна підпослідовність послідовності $g^{-1}(f(x_k))$, $k = 1, 2, \dots$. Без обмеження загальності можна вважати, що сама ця послідовність збігається до деякої точки $\omega_0 \in D_0$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді зі співвідношення (23) випливає, що

$$g^{-1}(f_{j_k}(x_k)) - \omega_0 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Оскільки g — гомеоморфізм у D_0 , з (24) випливає, що $f_{j_k}(x_k) \rightarrow g(\omega_0)$. З іншого боку, співвідношення $g^{-1}(f(x_k)) \rightarrow \omega_0$ при $k \rightarrow \infty$ тягне за собою, що $f(x_k) \rightarrow g(\omega_0)$. За нерівністю трикутника $|f_{j_k}(x_k) - f(x_k)| \leq |f_{j_k}(x_k) - g(\omega_0)| + |g(\omega_0) - f(x_k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Останнє співвідношення суперечить (22), що і доводить локально рівномірну збіжність сім'ї f_j , $j = 1, 2, \dots$, у D .

Тоді з огляду на лему 1 в [11] f або нульвимірне, або стале відображення. Оскільки за умовою f не є сталим, то f нульвимірне. Тоді існують точка $z_0 \in D$, число $r_0 > 0$ і окіл U елемента P_0 такі, що

$$\overline{B(z_0, r_0)} \subset D, \quad f(\overline{B(z_0, r_0)}) \cap \overline{U} = \emptyset. \quad (25)$$

Покладемо $F := \overline{B(z_0, r_0)}$. З огляду на (25) покажемо, що існує такий окіл V елемента P_0 , що

$$f_j(F) \cap V = \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Припустимо протилежне. Тоді існують зростаюча послідовність номерів $i_m \in \mathbb{N}$ і послідовність елементів $x_m \in F$, $m = 1, 2, \dots$, такі, що $f_{i_m}(x_m) \rightarrow P_0$ при $m \rightarrow \infty$. За нерівністю трикутника

$$\rho(f(x_m), P_0) \leq \rho(f(x_m), f_{i_m}(x_m)) + \rho(f_{i_m}(x_m), P_0) \rightarrow 0 \quad (27)$$

при $m \rightarrow \infty$, оскільки $\rho(f(x_m), f_{i_m}(x_m)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ з огляду на рівномірну збіжність f_m до f у D по метриці ρ . Співвідношення (27) суперечить (25), що доводить (26).

Позначимо $\Gamma_k := \Gamma(F, C_{j_k}, D)$. Зауважимо, що область зі слабо плоскою межею є рівномірною (див. [9, наслідок 4.3]), тобто якщо континууми C_{j_k} задовольняють умову $h(C_{j_k}) \geq \delta > 0$ і $h(F) > \delta_* > 0$, то знайдеться таке $\delta_2 > 0$, що

$$M(\Gamma_k) \geq \delta_2 > 0 \quad (28)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$. Нехай d_l , $l = 1, 2, \dots$, — послідовність областей, яка відповідає простому кінцю P_0 , і σ_l — розріз, що відповідає d_l . Можна вважати, що всі σ_l , $l = 1, 2, \dots$, лежать на сферах $S(y_0, r_l)$ з центром у деякій точці $y_0 \in \partial D'$, де $r_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ (див. [17, лема 3.1], а також [18, лема 1]).

Доведемо, що для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує такий номер $k = k_l$, що

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_l, \quad k \geq k_l. \quad (29)$$

Припустимо протилежне. Тоді існує таке $l_0 \in \mathbb{N}$, що

$$f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0}) \neq \emptyset \quad (30)$$

для деякої зростаючої послідовності номерів k_m , $m = 1, 2, \dots$. У такому разі знайдеться послідовність $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0})$, $m \in \mathbb{N}$. Нехай $z_m = f_{j_{k_m}}(x_m)$, $x_m \in C_{j_{k_m}}$.

Оскільки за встановленим вище $\rho(f(C_{j_k}), P_0) \rightarrow 0$ для деякої зростаючої послідовності номерів j_k , $k = 1, 2, \dots$, то, зокрема,

$$\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Оскільки $\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) = \inf_{y \in f(C_{j_{k_m}})} \rho(y, P_0)$ і $f(C_{j_{k_m}})$ є компактом як неперервний образ компакта $C_{j_{k_m}}$ при відображенні f , звідси випливає, що $\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) = \rho(y_m, P_0)$, де $y_m \in f(C_{j_{k_m}})$. Тоді зі співвідношення (31) отримуємо, що $y_m \rightarrow P_0$ при $m \rightarrow \infty$. Нехай $y_m = f(\xi_m)$, де $\xi_m \in C_{j_{k_m}}$. Отже, за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} \rho(z_m, P_0) &= \rho(f_{j_{k_m}}(x_m), P_0) \\ &\leq \rho(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) + \rho(f(x_m), f(\xi_m)) + \rho(f(\xi_m), P_0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (32)$$

оскільки $\rho(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ з огляду на рівномірну збіжність f_m у D у термінах метрики ρ . Крім того, $\rho(f(x_m), f(\xi_m)) \leq \rho(f(C_{j_{k_m}})) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ за умови леми. Нарешті $\rho(f(\xi_m), P_0) = \rho(y_m, P_0) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ за доведеним вище. Отже, з огляду

на (32) $z_m \rightarrow P_0$ при $m \rightarrow \infty$, але це суперечить умові $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0})$. Ця умова, в свою чергу, спростовує (30) і доводить (29).

З (29) випливає, що $f_{j_{k_l}}(C_{j_{k_l}}) \subset d_l$, причому можна вважати послідовність номерів k_l , $l = 1, 2, \dots$, зростаючою. Переходячи до перенумерації в разі потреби, не обмежуючи загальності можна вважати, що сама послідовність k задовольняє ці умови, тобто

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

З огляду на (26) можна вважати, що

$$f_{j_k}(F) \subset D' \setminus d_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (34)$$

У такому разі зауважимо, що

$$f_{j_k}(\Gamma_{j_k}) > \Gamma(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1)). \quad (35)$$

Справді, нехай $\tilde{\gamma} \in f_{j_k}(\Gamma_{j_k})$. Тоді $\tilde{\gamma}(t) = f_{j_k}(\gamma(t))$, де $\gamma \in \Gamma_{j_k}$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(0) \in F$, $\gamma(1) \in C_{j_k}$. За співвідношенням (34) маємо, що $f_{j_k}(\gamma(0)) \in f_{j_k}(F) \subset D' \setminus d_1$, крім того, за співвідношенням (33) отримуємо, що $f_{j_k}(\gamma(1)) \in f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_k$. Отже, $|f(\gamma(t))| \cap d_1 \neq \emptyset \neq |f(\gamma(t))| \cap (D' \setminus d_1)$. Тоді за теоремою 1.1.5.46 в [12] та означенням розрізу області існує таке $0 < t_1 < 1$, що $f_{j_k}(\gamma(t_1)) \in \partial d_1 \cap D' \subset S(y_0, r_1)$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$. Можна вважати, що $f_{j_k}(\gamma(t)) \in d_1$ при всіх $t \geq t_1$. Міркуючи аналогічно, одержуємо таку точку $t_2 \in (t_1, 1]$, що $f_{j_k}(\gamma(t_2)) \in S(y_0, r_k)$. Покладемо $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Можна вважати, що $f_{j_k}(\gamma(t)) \in d_k$ при всіх $t \in [t_1, t_2]$. Тоді крива $f_{j_k}(\gamma_2)$ є підкривою кривої $f_{j_k}(\gamma) = \tilde{\gamma}$, яка належить сім'ї $\Gamma(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1))$. Співвідношення (35) встановлено.

З (35) випливає, що

$$\Gamma_{j_k} > \Gamma_{f_{j_k}}(y_0, r_k, r_1). \quad (36)$$

Покладемо $\eta_k(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_k, r_1), & t \in (r_k, r_1), \\ 0, & t \notin (r_k, r_1), \end{cases}$ де $I(r_k, r_1) = \int_{r_k}^{r_1} \psi(t) dt$. Зауважимо, що $\int_{r_k}^{r_1} \eta_k(t) dt = 1$. Тоді за співвідношеннями (4) і (36) з огляду на означення відображення f_{j_k}

у (2) маємо $M(\Gamma_{j_k}) \leq M(\Gamma_{f_{j_k}}(y_0, r_k, r_1)) \leq \frac{1}{I^n(r_k, r_1)} \int_{A(y_0, r_k, r_1)} Q(y) \psi^n(|y - y_0|) dm(y) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Останнє співвідношення суперечить (28). Отримана суперечність доводить лему.

Лема 5. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабо плоску межу, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ є регулярною. Припустимо, що f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \overline{D'}$. Нехай для будь-якого $y_0 \in \overline{D'}$ знайдуться $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$ і вимірна за Лебегом функція $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такі, що виконуються співвідношення (3), (4), де $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ визначено в (1). Тоді відображення f є нульвимірним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$, $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$ і $\bar{f}$ є нульвимірним відносно $\bar{D}$.

Доведення. Як було встановлено при доведенні леми 4, послідовність f_j збігається до f локально рівномірно в D . Тоді з огляду на [11] відображення f є нульвимірним у D . За теоремою 1.1 і зауваженням 2.2 в [19] кожне f_m , $m = 1, 2, \dots$, має неперервне продовження

$\overline{f_m}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}_P$ на $\overline{D}$ таке, що $f_m(\overline{D}) = \overline{D'}_P$. Покажемо, що існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для кожного $x_0 \in \partial D$, де наявність границі слід розуміти в сенсі метрики ρ у $\overline{D'}_P$.

Справді, за нерівністю трикутника $\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_m(x_0)) + \rho(f_m(x_0), f(x_0))$. У цій нерівності перший і третій доданки прямують до нуля внаслідок рівномірної збіжності f_m у D . Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $M = M(\varepsilon)$, що при $m \geq M(\varepsilon)$

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \rho(f_m(x), f_m(x_0)). \quad (37)$$

При $m = M(\varepsilon)$ відображення f_m неперервно продовжується в точку x_0 , так що знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, що $\rho(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon/3$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Тоді з огляду на (37) $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ при тих же δ .

Покажемо, що відображення f замкнене у D . Нехай E — замкнена в D множина. Потрібно показати, що множина $f(E)$ замкнена в D' . Нехай z_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність у $f(E)$ така, що $z_m \rightarrow z_0 \in D'$ при $m \rightarrow \infty$. Покажемо, що $z_0 \in f(E)$. Оскільки z_m , знайдуться такі $x_m \in E$, що $f(x_m) = z_m$, $m = 1, 2, \dots$. З огляду на компактність $\overline{\mathbb{R}^n}$ можна вважати, що послідовність x_m збігається до деякого $x_0 \in \overline{D}$ при $m \rightarrow \infty$. Якщо $x_0 \in D$, то $x_0 \in E$. Отже, $f(x_0) = z_0 \in f(E)$ з огляду на неперервність відображення f у D . Покажемо, що випадок $x_0 \in \partial D$ неможливий. Оскільки f_m має неперервне продовження в точку x_0 , знайдеться така послідовність $w_m \in D$, $w_m \rightarrow x_0$ при $m \rightarrow \infty$, що $\rho(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$. Тоді за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} \rho(f_m(x_0), f(x_0)) &\leq \rho(f_m(x_0), f_m(w_m)) + \rho(f_m(w_m), f(w_m)) + \rho(f(w_m), f(x_0)) \\ &< \frac{1}{m} + \rho(f_m(w_m), f(w_m)) + \rho(f(w_m), f(x_0)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

оскільки f_m збігається до f рівномірно у D , а f неперервна в точці x_0 за доведеним вище. З огляду на те, що $f_m(x_0) \in E_{D'}$ при $m \in \mathbb{N}$ за умовою відкритості, дискретності і замкненості f_m (див. теорему 3.3 у [7]), а також із замкненості межі ∂D випливає, що $f(x_0) \in E_{D'}$. Тоді із неперервності f у $\overline{D}$ маємо, що $f(x_m) = z_m \rightarrow z_0$ і $f(x_0) = z_0 \in E_{D'}$. Це суперечить вибору $z_0 \in D'$. Остаточо, множина $f(E)$ є замкненою в D' , бо у випадку $x_0 \in D$ це встановлено, а випадок $x_0 \in \partial D$ неможливий.

З міркувань, наведених вище, випливає включення $f(\partial D) \subset E_{D'}$. Покажемо, що $\overline{f(\overline{D})} = \overline{D'}_P$. Очевидно, що $\overline{f(\overline{D})} \subset \overline{D'}_P$. Покажемо, що $\overline{D'}_P \subset \overline{f(\overline{D})}$. Справді, нехай $y_0 \in \overline{D'}_P$, тоді або $y_0 \in D'$, або $y_0 \in E_{D'}$. 1. Якщо $y_0 \in D'$, то $y_0 = f_j(x_j)$, $x_j \in D$. Можна вважати, що $x_j \rightarrow x_0$, $j \rightarrow \infty$, $x_0 \in \overline{D}$. За неперервністю f у $\overline{D}$ маємо $f(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j)$. Проте із рівномірної збіжності f_j до f випливає, що $f_j(x_j) - f(x_j) = y_0 - f(x_j) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Тоді $y_0 = f(x_0)$. Оскільки $f(\partial D) \subset E_{D'}$, то $x_0 \in D$. Отже, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in D$. 2. Нарешті, нехай $y_0 \in E_{D'}$. Тоді знайдеться така послідовність $y_k \in D'$, що $y_k = f(x_k) \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$ і $x_k \in D$. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ можемо вважати, що $x_k \rightarrow x_0$, де $x_0 \in \overline{D}$. Тоді $\overline{f(x_0)} = y_0 \in \overline{f(\overline{D})}$. Отже, $\overline{D'}_P \subset \overline{f(\overline{D})}$.

Залишилося показати нульвимірність $\overline{f}$ на $\partial D'$. Припустимо супротивне, а саме, нехай існує така точка $y_0 \in \partial D'$, що $f^{-1}(y_0) \supset K_0$, де $K_0 \subset \overline{D}$ — деякий невідроджений континуум. Тоді, зокрема, $\overline{f(K_0)} = y_0$. Оскільки за доведеним f є нульвимірним у D , можна вважати, що $K_0 \subset \partial D$. Зауважимо, що $f \neq \text{const}$ з огляду на рівність $\overline{f(\overline{D})} \subset \overline{D'}_P$. Оскільки $\overline{D}$ — компакт

в $\overline{\mathbb{R}^n}$ і, крім того, відображення $\bar{f}$ є неперервним у $\overline{D}$, воно є рівномірно неперервним у $\overline{D}$. У цьому випадку для кожного $j \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $\delta_j < 1/j$, що

$$\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(x_0)) = \rho(\bar{f}(x), y_0) < 1/j \quad \forall x, x_0 \in \overline{D}, \quad \rho(x, x_0) < \delta_j, \quad \delta_j < 1/j. \quad (38)$$

Позначимо $B_h(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\}$. Тоді для заданого $j \in \mathbb{N}$ покладемо $B_j := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Оскільки множина B_j є околom континуума K_0 , за лемою 2.2 в [13] існує окіл U_j множини K_0 такий, що $U_j \subset B_j$ і множина $U_j \cap D$ є зв'язною. Без обмеження загальності можна вважати, що U_j — відкрита множина. Тоді множина $U_j \cap D$ також лінійно зв'язна (див. твердження 13.1 у [5]). Оскільки K_0 — компакт, то знайдуться такі $z_0, w_0 \in K_0$, що $h(K_0) = h(z_0, w_0)$. Звідси випливає, що знайдуться елементи $z_j \in U_j \cap D$ і $w_j \in U_j \cap D$ такі, що $z_j \rightarrow z_0$ і $w_j \rightarrow w_0$ при $j \rightarrow \infty$. Можемо припускати, що

$$h(z_j, w_j) > h(K_0)/2 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (39)$$

Оскільки множина $U_j \cap D$ лінійно зв'язна, точки z_j і w_j можна з'єднати деякою кривою $\gamma_j \in U_j \cap D$. Покладемо $C_j := |\gamma_j|$.

Зауважимо, що $\rho(f(C_j)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Справді, оскільки $f(C_j)$ — континуум в $\overline{D}'_P$, існують точки $y_j, y'_j \in f(C_j)$, для яких $\rho(f(C_j)) = \rho(y_j, y'_j)$. Тоді існують такі $x_j, x'_j \in C_j$, що $y_j = f(x_j)$ і $y'_j = f(x'_j)$. Отже, точки x_j і x'_j належать до $U_j \subset B_j$. Це означає, що існують такі x_1^j і $x_2^j \in K_0$, що $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$ і $x'_j \in B(x_2^j, \delta_j)$. У такому разі за співвідношенням (38) і з огляду на нерівність трикутника отримуємо, що

$$\begin{aligned} \rho(f(C_j)) &= \rho(y_j, y'_j) = \rho(f(x_j), f(x'_j)) \\ &\leq \rho(f(x_j), f(x_1^j)) + \rho(f(x_1^j), f(x_2^j)) + \rho(f(x_2^j), f(x'_j)) < 2/j \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (40)$$

Зі співвідношення (39) випливає, що континууми C_j , $j = 1, 2, \dots$, задовольняють умови леми 4. За цією лемою $\rho(f(C_j)) \geq \delta_1 > 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, що суперечить (40). Отримана суперечність вказує на хибність припущення, що відображення $\bar{f}$ не є нульвимірним у $\overline{D}$.

Лему доведено.

Лема 6. Нехай за умов леми 5 відображення f зберігає орієнтацію. Тоді відображення f є відкритим, дискретним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D}'_P$, $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D}'_P$ таке, що $N(f, D) = N(\bar{f}, \overline{D}) < \infty$. Зокрема, $\bar{f}$ є дискретним у $\overline{D}$.

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f до відображення $\bar{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D}'_P$, його нульвимірність і замкненість, так само як і рівність $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D}'_P$, є твердженнями леми 5. Оскільки f зберігає орієнтацію і нульвимірне, воно також відкрите і дискретне за теоремою Тітуса–Янга (див. [20, с. 333]). Зауважимо, що $N(f, D) < \infty$ (див. теорему 2.8 в [14]). Доведемо, що $N(f, D) = N(\bar{f}, \overline{D})$. (Далі ми будемо міркувати, використовуючи схему доведення теореми 4.7 у [7].) Припустимо протилежне. Тоді знайдуться такі точки $P_0 \in E_{D'}$ і $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \partial D$, що $f(x_i) = P_0$, $i = 1, 2, \dots, k+1$ і $k := N(f, D)$. Оскільки за припущенням D' є регулярною областю, існує відображення g області D_0 з локально квазіконформною межею на D' . Розглянемо відображення $F := f \circ g^{-1}$. Зауважимо, що за визначенням області з локально квазіконформною межею D_0 є локально зв'язною на ∂D_0 . У такому разі відображення F має неперервне продовження $\bar{F}: \overline{D} \rightarrow \overline{D}_0$ таке, що $\bar{F}(\overline{D}) = \overline{D}_0$ (це випливає з того, що кожне з відображень f і g^{-1} має неперервне продовження на $\overline{D}$ і $\overline{D}'_P$ відповідно).

Покладемо $y_0 := \bar{F}(P_0) \in \partial D_0$. Тоді для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ існує окіл $\widetilde{U}_p' \subset B(y_0, 1/p)$ точки y_0 такий, що множина $\widetilde{U}_p' \cap D_0 = U_p'$ є зв'язною.

Повторюючи доведення леми 3, можна показати, що для будь-якого $i = 1, 2, \dots, k+1$ існує така компонента V_p^i множини $F^{-1}(U_p')$, що $x_i \in \bar{V}_p^i$. На підставі леми 3.6 у [7] F є відображенням $\bar{V}_p^i$ на U_p' для будь-яких $i = 1, 2, \dots, k, k+1$. Отже, $N(f, D) = N(F, D) \geq k+1$, що суперечить визначенню числа k . Отримана суперечність спростовує припущення, що $N(\bar{f}, \bar{D}) > N(f, D)$.

Лему доведено.

Справджуються такі твердження.

Теорема 3. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область, яка має слабо плоску межу, а область $D' \subset \mathbb{R}^n$ є регулярною. Припустимо, що f_m , $m = 1, 2, \dots$, — послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' , які збігаються рівномірно у D до деякого відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці $y_0 \in \bar{D}'$. Нехай також виконано одну з двох умов:

1) $Q \in FMO(\bar{D}')$;

2) для будь-якого $y_0 \in \bar{D}'$ знайдеться таке $\delta(y_0) > 0$, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконуються умови $\int_{\varepsilon}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$, $\int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty$.

Тоді відображення f є нульвимірним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$, $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$ і $\bar{f}$ є нульвимірним відносно $\bar{D}$.

Теорема 4. Нехай за умов теореми 3 відображення f зберігає орієнтацію. Тоді відображення f є відкритим, дискретним і замкненим у D , крім того, f має неперервне продовження $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$, $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$ таке, що $N(f, D) = N(\bar{f}, \bar{D}) < \infty$. Зокрема, $\bar{f}$ є дискретним у $\bar{D}$.

Доведення теорем 3 і 4 впливає з лем 5 і 6 за рахунок спеціально підібраної функції ψ (див. лему 1.3 у [15]).

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Авторські внески. Усі автори зробили рівний внесок у роботу.

Література

1. M. Cristea, *Open discrete mappings having local ACL^n inverses*, Complex Var. and Elliptic Equat., **55**, № 1–3, 61–90 (2010).
2. B. Klishchuk, R. Salimov, M. Stefanchuk, *On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class*, Proc. Int. Geom. Center, **16**, № 1, 50–58 (2023).
3. D. Kovtonyuk, I. Petkov, V. Ryazanov, *Prime ends in theory of mappings with finite distortion in the plane*, Filomat, **31**, № 5, 1349–1366 (2017).
4. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **448**, 1–40 (1969).
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Science + Business Media, LLC, New York (2009).
6. V. Ryazanov, S. Volkov, *On the boundary behavior of mappings in the class $W_{loc}^{1,1}$ on Riemann surfaces*, Complex Anal. and Oper. Theory, **11**, 1503–1520 (2017).

7. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n -space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., **11**, 1–44 (1976).
8. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
9. E. Sevost'yanov, *On boundary discreteness of mappings with a modulus conditions*, Acta Math. Hung., **171**, № 1, 67–87 (2023).
10. Є. О. Севостьянов, С. О. Скворцов, О. П. Довгопятий, *Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 414–436 (2020); **English translation**: J. Math. Sci., **252**, № 4, 541–557 (2021).
11. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On the convergence of mappings in metric spaces with direct and inverse modulus conditions*, Ukr. Math. J., **70**, № 7, 1097–1114 (2018).
12. К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, Москва (1969).
13. J. Herron, P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains*, Complex Var. and Theor. Appl., **15**, 167–179 (1990).
14. O. Martio, U. Srebro, *Automorphic quasimeromorphic mappings in $\mathbb{R}^n$* , Acta Math., **135**, 221–247 (1975).
15. E. A. Sevost'yanov, *Mappings with direct and inverse Poletsky inequalities*, Developments in Mathematics (DEVM, vol. 78), Springer Nature Switzerland AG, Cham (2023).
16. R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **35**, 13–40 (1979).
17. D. P. Ilyutko, E. A. Sevost'yanov, *On prime ends on Riemannian manifolds*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 47–63 (2019).
18. D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, *On the theory of prime ends for space mappings*, Ukr. Math. J., **67**, № 4, 528–541 (2015).
19. E. A. Sevost'yanov, *On discrete boundary extension of mappings in terms of prime ends*, Укр. мат. вісн., **21**, № 4, 231–254 (2024); **English translation**: J. Math. Sci., **284**, 365–382 (2024).
20. C. J. Titus, G. S. Young, *The extension of interiorty with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **103**, 329–340 (1962).

Одержано 04.01.25, доопрацьовано 03.04.25,
прийнято 04.04.25