

Методи розв’язування екстремальних задач в геометричній теорії функцій

А.Л. ТАРГОНСЬКИЙ, Є.А. ТАРГОНСЬКА

(Представлена В. І. Рязановим)

Анотація. У роботі пропонується огляд сучасних методів геометричної теорії функцій комплексного змінного для знаходження екстремальних значень функціоналів складених із добутків внутрішніх радіусів областей.

2010 MSC. 30C75.

Ключові слова та фрази. inner radius of domain, quadratic differential, piecewise-separating transformation, the Green function, radial systems of points, logarithmic capacity, variational formula, non-overlapping domains, open set, partially non-overlapping domains.

1. Вступ

Робота присвячена одному з класичних напрямків геометричної теорії функцій, а саме, екстремальним задачам на класах попарно-неперетинних областей.

Початок розвитку цієї тематики пов’язують з роботою 1934 року М.А. Лаврентьева [1]. Він знайшов максимум і визначив розміщення екстремальних областей функціоналу, що складається з добутку конформних радіусів двох однозв’язних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. При цьому, були описані тільки екстремалі для випадку, коли відповідні функції регулярні. В 1947 році Г.М. Голузин розв’язав аналогічну задачу для трьох фіксованих точок комплексної площини [2]. Задача про добуток внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей була розв’язана Г.В. Кузьміною в 1980 році [3], а для довільного $n \geq 5$ оцінку вказаного добутку було отримано О.К. Бахтінім та Я.В. Заболотним в 2021 році [4].

Стаття надійшла в редакцію 04.09.2025

В.М. Дубиніним був розроблений метод кусочно-поділяючого перетворення, що детально описаний у роботах [5–7] та метод асимптотики модуля виродженого конденсатора, який описано у [5, 8, 9]. З допомогою цього методу В.М. Дубинін почав розв'язувати екстремальні задачі для довільної кількості багатозв'язних областей, які взаємно не перетинаються, в основному, з точками на одиничному колі.

У роботах О.К. Бахтіна розроблений метод “керуючих функціоналів”; за допомогою якого вдалося розв'язати низку екстремальних задач, коли вільні полюси зміщені з одиничного кола [10–27].

Слід також зауважити, що існують і інші методи, які не розглянуті у цій роботі. Зокрема, методи варіації сталої [2], площ [28] та екстремальної метрики [29].

2. Метод кусочно-поділяючого перетворення

Метод кусочно-поділяючого перетворення був розроблений В.М. Дубиніним та описаний у роботах [5–7].

Розглянемо систему $n + 2$ різних точок розширеної комплексної площини $0, b_1, b_2, \dots, b_n, \infty$ таких, що

$$0 = \arg b_1 < \arg b_2 < \dots < \arg b_n < 2\pi.$$

Введемо позначення

$$b_{n+1} := b_1, \quad b_0 := b_n, \quad \sigma_k := \frac{1}{\pi} (\arg b_{k+1} - \arg b_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\sigma_n := \sigma_0 := \frac{1}{\pi} (2\pi - \arg b_n), \quad \sigma_{n+1} := \sigma_1.$$

Легко бачити, що $\sum_{k=1}^n \sigma_k = 2$. Нехай

$$M_k := \{z : \arg b_k < \arg z < \arg b_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_0 := M_n, \quad M_{n+1} := M_1.$$

Тоді сімейство функцій

$$\zeta_k(z) = -i \left(e^{-i \arg b_k w} \right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \zeta_0 := \zeta_n, \quad \zeta_{n+1} := \zeta_1$$

конформно і однолисто відображає області M_k , $k = 1, 2, \dots, n$ на праву півплощину $\operatorname{Re} \zeta > 0$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|\zeta_k(z) - \zeta_k(b_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k} |b_m|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} |z - b_m|, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \rightarrow b_m,$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad m = k, k + 1;$$

$$|\zeta_k(z)| = |z|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad z \in \overline{M_k} \quad z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

Нехай $\{D_k\}_{k=0}^{n+1}$ — сімейство таких областей, що

$$0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad b_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \infty \in D_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

$$D_k \cap D_m = \emptyset, \quad k \neq m, \quad k, m = 0, 1, \dots, n, n + 1$$

Тоді позначимо через $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_k(D_k \cap M_k)$, яка містить точку $\zeta_k(b_k)$, $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $G_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $G_0^{(2)} := G_n^{(2)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_{k-1}(D_k \cap M_{k-1})$, яка містить точку $\zeta_{k-1}(b_k)$, $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\{G_k^{(1)}, G_{k-1}^{(2)}\}$ назовемо результатом поділяючого перетворення області D_k відносно сімейства двох функцій $\{\zeta_k, \zeta_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$.

Аналогічно назовемо результатом поділяючого перетворення області D_0 відносно сімейства функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно уявної осі областей $G_k^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k(D_0 \cap M_k)$, яка містить точку 0 , $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі; а результатом поділяючого перетворення області D_{n+1} відносно сімейства функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно уявної осі областей $G_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k(D_{n+1} \cap M_k)$, яка містить точку ∞ , $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі.

Очевидно, що система областей $\{G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(\infty)}\}$ є системою попарно неперетинних областей.

Позначимо через $r(B; a)$ внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [5–8, 29]) та нагадаємо його визначення.

Нехай

$$g_B(z, a) = h_{B,a}(z) + \log \frac{1}{|z - a|}$$

узагальнена функція Гріна області B відносно точки $a \in B$. Якщо ж $a = \infty$, то

$$g_B(z, \infty) = h_{B,\infty}(z) + \log \frac{1}{|z|}.$$

Величина

$$r(B, a) := \exp(h_{B,a}(z))$$

позначає внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$.

В цьому випадку, справедлива наступна теорема.

Теорема 2.1. ([5-7]). *Мають місце наступні нерівності*

$$r(D_k, b_k) \leq \left[\frac{r(G_k^{(1)}, \zeta_k(b_k))}{\frac{1}{\sigma_k} \cdot |b_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} \cdot \frac{r(G_{k-1}^{(2)}, \zeta_{k-1}(b_k))}{\frac{1}{\sigma_{k-1}} \cdot |b_k|^{\frac{1}{\sigma_{k-1}}-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$r(D_0, 0) \leq \prod_{k=1}^n \left[r(G_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}, \quad (2.2)$$

$$r(D_{n+1}, \infty) \leq \prod_{k=1}^n \left[r(G_k^{(\infty)}, \infty) \right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}. \quad (2.3)$$

Причому, якщо для областей D_k , $k = \overline{0, n+1}$ існують класичні функції Гріна, то в нерівностях (2.1) досягається знак рівності тоді і тільки тоді, коли області D_k , $k = \overline{1, n}$ відповідно симетричні відносно прямих $z = \rho \cdot \exp\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$; а в нерівностях (2.2) і (2.3) відповідно тоді і тільки тоді, коли області D_0 і D_{n+1} симетричні відносно сімейства прямих $z = \rho \cdot \exp\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$.

В деяких випадках, замість півплощини $\operatorname{Re} \zeta > 0$ ми будемо розглядати круг одиничного радіуса. Тому зараз розглянемо метод кусочно-поділяючого перетворення В. М. Дубиніна для цього випадку.

В зв'язку з вищесказаним, розглянемо сімейство функцій

$$\xi_k(z), \quad k = \overline{1, n}, \quad \xi_0(z) := \xi_n(z),$$

яке конформно і однолисто відображає області M_k , $k = 1, 2, \dots, n$ на внутрішню частину одиничного круга $U := \{\xi : |\xi| < 1\}$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|\xi_k(z) - \xi_k(b_m)| \sim \beta_m \cdot |z - b_m|, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \rightarrow b_m,$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad m = k, k+1;$$

$$|\xi_k(z) - \xi_k(0)| \sim \beta_0 \cdot |z|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \rightarrow 0,$$

$$|\xi_k(z) - \xi_k(\infty)| \sim \beta_\infty \cdot |z|^{-\frac{1}{\sigma_k}}, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \rightarrow \infty,$$

де β_m , $k = \overline{1, n}$, β_0 , β_∞ - деякі додатні числа і $\beta_{n+1} := \beta_1$.

Нехай сімейство попарно неперетинних областей $\{D_k\}_{k=0}^{n+1}$ таке ж як і раніше.

Тоді позначимо через $G_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\xi_k(D_k \cap M_k)$, яка містить точку $\xi_k(b_k)$, $k = \overline{1, n}$ з її

інверсією відносно кола $|\xi| = 1$, а через $G_{k-1}^{(4)}$, $k = \overline{1, n}$, $G_0^{(4)} := G_n^{(4)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\xi_{k-1}(D_k \cap M_{k-1})$, яка містить точку $\xi_{k-1}(b_k)$, $k = \overline{1, n}$ з її інверсією відносно кола $|\xi| = 1$. Сімейство двох симетричних відносно кола $|\xi| = 1$ областей $\{G_k^{(2)}, G_{k-1}^{(4)}\}$ назвемо результатом поділяючого перетворення області D_k відносно сімейства двох функцій $\{\zeta_k, \zeta_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$.

Аналогічно, назвемо результатом поділяючого перетворення області D_0 відносно сімейства функцій $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно кола $|\xi| = 1$ областей $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\xi_k(D_0 \cap M_k)$, яка містить точку $\xi_k(0)$, $k = \overline{1, n}$ з її інверсією відносно одиничного кола $|\xi| = 1$; а результатом поділяючого перетворення області D_{n+1} відносно сімейства функцій $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно одиничного кола $|\xi| = 1$ областей $G_k^{(3)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\xi_k(D_{n+1} \cap M_k)$, яка містить точку $\xi_k(\infty)$, $k = \overline{1, n}$ з її інверсією відносно кола $|\xi| = 1$.

Ясно, що система областей $\{G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(3)}, G_k^{(4)}\}$ є системою попарно неперетинних областей. В цьому випадку є справедливим наступний результат.

Теорема 2.2. [5–7] *Справедлива нерівність*

$$r(D_k, b_k) \leq \frac{\left[r(G_k^{(2)}, \xi_k(b_k)) \cdot r(G_{k-1}^{(4)}, \xi_{k-1}(b_k)) \right]^{\frac{1}{2}}}{\beta_k} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$r(D_0, 0) \leq \prod_{k=1}^n \left[\frac{r(G_k^{(1)}, \xi_k(0))}{\beta_0} \right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}, \quad (2.5)$$

$$r(D_{n+1}, \infty) \leq \prod_{k=1}^n \left[\frac{r(G_k^{(3)}, \xi_k(\infty))}{\beta_\infty} \right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}. \quad (2.6)$$

Причому, якщо для областей D_k , $k = \overline{1, n}$ існують класичні функції Гріна, то в нерівностях (2.4) досягається знак рівності тоді і тільки тоді, коли області D_k , $k = \overline{1, n}$ відповідно симетричні відносно прямих $z = \rho \cdot \exp\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$; а в нерівностях (2.5) і (2.6) відповідно тоді і тільки тоді, коли області D_0 і D_{n+1} симетричні відносно сімейства прямих $z = \rho \cdot \exp\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$.

3. Асимптотика модуля виродженого конденсатора

Цей метод також був розроблений В.М. Дубиніним та детально описаний у роботах [5, 8, 9].

Замкнуту множину $E(z_0, r)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}_z}$, яка залежить від параметру $r > 0$, будемо називати майже кругом в точці z_0 радіусу r , якщо для достатньо малого $\varepsilon > 0$ існують неперервні додатні функції $r_j(r)$, $0 < r < \varepsilon$, $j = 1, 2$, такі, що

$$\overline{U(z_0, r_1(r))} \subset E(z_0, r) \subset \overline{U(z_0, r_2(r))},$$

де $U(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}_z$ и $U(\infty, r) = \{z : |z| > r^{-1}\}$, крім того, $r_j(r) \sim r$ при $r \rightarrow 0$, $j = 1, 2$. Надалі будемо вважати B – відкриту множину на $\overline{\mathbb{C}}$, доповнення якої $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ має додатну гармонійну міру. Нехай z_l , $l = \overline{1, m}$, – різні точки множини B ; δ_l , $l = \overline{1, m}$, – довільні дійсні числа, не всі одночасно дорівнюють нулю, та нехай μ_l , ν_l , $l = \overline{1, m}$ – довільні дійсні числа.

Введемо узагальнення: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) \equiv \mu_l r^{\nu_l}$, $l = \overline{1, m}$.

При достатньо малих $r > 0$ розглянемо узагальнений конденсатор як впорядковану сукупність

$$C(r; B, Z, \Delta, \Psi) := \{E_0, E(z_1, \psi_1(r)), \dots, E(z_m, \psi_m(r))\}$$

з визначеними значеннями відповідно $0, \delta_1, \dots, \delta_m$. Модуль цього конденсатора $|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)|$ є величина, обернена його ємності, яка, у свою чергу, визначається як точна нижня межа інтегралів Діріхле $I(v, B)$ по всім допустимим функціям v , тобто функціям v класу Ліп рівним нулю в деякому околі множини E_0 та рівним δ_l на $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = \overline{1, m}$ (причому $\frac{1}{0} = +\infty$). Зведеним модулем множини B відносно сукупності Z, Δ и Ψ будемо називати границю

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right),$$

де $\nu = (\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1})^{-1}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. [5, 8, 9] *Нехай множина B та сукупності Z, Δ и Ψ – задовольняють умовам описаним вище. Тоді справедлива асимптотична формула*

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = -\frac{\nu}{2\pi} \log r + M(B, Z, \Delta, \Psi) + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

де

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \frac{\nu^2}{2\pi} \left\{ \sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \frac{r(B, z_l)}{\mu_l} + \sum \frac{\delta_l}{\nu_l} \frac{\delta_j}{\nu_j} g_B(z_j, z_l) \right\},$$

$$r(B, a) = r(B(a), a),$$

$$g_B(z, a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z, a), \\ 0, \quad a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a)}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow z} g_{B(a)}(\zeta, a), \quad \zeta \in B(a), z \in \partial B(a), \end{cases}$$

узагальнена функція Гріна області B відносно точки $a \in B(a)$, $B(a)$ – зв'язна компонента відкритої множини B , яка містить точку a .

4. Метод керуючих функціоналів

Метод керуючих функціоналів був розроблений О.К. Бахтінім ([5]). Основна ідея цього методу полягає у накладанні додаткових умов на розміщення точок за допомогою деякого функціоналу, залежного від розміщення точок на розширеній комплексній площині. Далі, застосовують або метод кусочно-поділяючого перетворення, або асимптотику модуля вироджуваного конденсатора.

Наведемо приклад результату, який використовує цей метод [11–13].

Нехай $l, m, d \in \mathbb{N}$, причому $m = ld$. Розглянемо набір натуральних чисел $\{m_k\}_{k=1}^l$ таких, що

$$\sum_{k=1}^l m_k = m. \quad (4.1)$$

Системи точок

$$A_{l,d} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, l}, p = \overline{1, m_k}\},$$

будемо називати узагальненими (l, d) -рівномірно променевими системами точок, якщо $A_{l,d}$ задовольняє умові (4.1), та для всіх $k = \overline{1, l}$, $p = \overline{1, m_k}$ справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} 0 &< |a_{k,1}| < \dots < |a_{k,m_k}| < \infty; \\ \arg a_{k,1} &= \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,m_k} = \frac{2\pi}{l}(k-1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для довільної узагальненої (l, d) -рівномірно променевої системи точок $A_{l,d}$ розглянемо набір областей $\{P_k\}_{k=1}^l$, де

$$P_k := \left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{2\pi}{l}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{l}k \right\}, \quad k = \overline{1, l}.$$

Також, для довільної узагальненої (l, d) -рівномірно променевої системи точок $A_{l,d}$, введемо у розгляд наступний “керуючий” функціонал:

$$\mu(A_{l,d}) := \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} \left[\chi \left(\left| a_{k,p} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right],$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2} \cdot (t + t^{-1})$.

Систему областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, будемо називати системою попарно-неперетинних областей, якщо

$$B_k \cap B_v = \emptyset, \quad k \neq v, \quad k, v = \overline{1, n}.$$

Зараз ми будемо використовувати основні поняття та результати теорії квадратичних диференціалів [30].

Для довільних чисел $l, d \in \mathbb{N}$ нехай $A_{l,d}^{(1)}$ позначає узагальнену (l, d) -рівномірну променеву систему точок, які є полюсами квадратичного диференціалу $Q_1(w)dw^2$, де

$$Q_1(w)dw^2 = - \frac{w^{l-2} (1+w^l)^{2d-1}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} - \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} \right]^2} dw^2.$$

Нехай $A_{l,d}^{(2)}$ позначає узагальнену (l, d) -рівномірну променеву систему точок, які є полюсами квадратичного диференціалу $Q_2(w)dw^2$, де

$$Q_2(w)dw^2 = \frac{w^{l-2} (1+w^l)^{2d-1}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} + \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} \right]^2} dw^2.$$

Нехай, також, $A_{l,d}^{(3)}$ позначає узагальнену (l, d) -рівномірну променеву систему точок, які є полюсами квадратичного диференціалу $Q_3(w)dw^2$, де

$$Q_3(w)dw^2 = - \frac{w^{l-2} (1+w^l)^{2d}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+2} - \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+2} \right]^2} dw^2.$$

Аналогічно, $A_{l,d}^{(4)}$ позначає узагальнену (l, d) -рівномірну променеву систему точок, які є полюсами квадратичного диференціалу $Q_4(w)dw^2$, де

$$Q_4(w)dw^2 = - \frac{w^{l-2} (1+w^l)^{2d-2}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d} + \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d} \right]^2} dw^2.$$

Для систем точок $A_{l,d}^{(1)}, A_{l,d}^{(2)}, A_{l,d}^{(3)}, A_{l,d}^{(4)}$ у випадку справедливості співвідношень (4.2), маємо $m_k = d, k = \overline{1, l}$.

Розглянемо наступні задачі.

Нехай, $l, m, d \in \mathbb{N}$, причому $m = ld$. Визначити максимум функціоналів

$$(r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^{\frac{l^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

$$r^{\frac{l^2}{4}}(B_\infty, \infty) \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

$$r^{\frac{l^2}{4}}(B_0, 0) \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

$$\prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

для довільної узагальненої (l, d) -рівномірної променевої системи точок, $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ – довільна система попарно-неперетинних областей, $0 \in B_0, \infty \in B_\infty, a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, та визначити екстремалі.

Теорема 4.1. [12] Нехай $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld, l \geq 2$. Тоді для довільної узагальненої (l, d) -рівномірної променевої системи точок $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, яка задовольняє умові (4.2),

$$\mu(A_{l,d}) = \mu(A_{l,d}^{(3)}),$$

з множиною чисел $\{m_k\}_{k=1}^l$ таких, що задовольняють (4.1), та довільної системи попарно-неперетинних областей $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$, $0 \in B_0, \infty \in B_\infty, a_{k,p} \in B_{k,p}, B_0, B_{k,p}, B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність:

$$(r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^{\frac{l^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{l+m}\right)^m \cdot \left(\frac{l}{l+m}\right)^l \cdot \mu(A_{l,d}^{(3)}).$$

Знак рівності в даній нерівності досягається на кругових областях та полюсах другого порядку квадратичного диференціалу $Q_1(w)dw^2$.

Теорема 4.2. [13] Нехай $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. Тоді для довільної узагальненої (l, d) -рівномірно променевої системи точок $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, яка задовольняє умові (4.2),

$$\mu(A_{l,d}) = \mu\left(A_{l,d}^{(2)}\right),$$

з множиною чисел $\{m_k\}_{k=1}^l$ таких, що задовольняють (4.1), та довільної системи попарно-неперетинних областей $\{B_{k,p}, B_\infty\}$, $\infty \in B_\infty$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_{k,p}, B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність:

$$r^{\frac{l^2}{4}}(B_\infty, \infty) \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{8}{2m+l}\right)^m \cdot \left(\frac{2l}{2m+l}\right)^{\frac{l}{2}} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(2)}\right).$$

Знак рівності в даній нерівності досягається на кругових областях та полюсах другого порядку квадратичного диференціалу $Q_2(w)dw^2$.

Теорема 4.3. [13] Нехай $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. Тоді для довільної узагальненої (l, d) -рівномірно променевої системи точок $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, яка задовольняє умові (4.2),

$$\mu(A_{l,d}) = \mu\left(A_{l,d}^{(1)}\right),$$

з множиною чисел $\{m_k\}_{k=1}^l$ таких, що задовольняють (4.1), та довільної системи попарно-неперетинних областей $\{B_0, B_{k,p}\}$, $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_0, B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність:

$$r^{\frac{l^2}{4}}(B_0, 0) \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{8}{2m+l}\right)^m \cdot \left(\frac{2l}{2m+l}\right)^{\frac{l}{2}} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(1)}\right).$$

Знак рівності в даній нерівності досягається на кругових областях та полюсах другого порядку квадратичного диференціалу $Q_3(w)dw^2$.

Теорема 4.4. [11] Нехай $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. Тоді для довільної узагальненої (l, d) -рівномірно променевої системи точок $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, яка задовольняє умові (4.2),

$$\mu(A_{l,d}) = \mu\left(A_{l,d}^{(4)}\right),$$

з множиною чисел $\{m_k\}_{k=1}^l$ таких, що задовольняють (4.1), та довільної системи попарно-неперетинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність:

$$\prod_{k=1}^l \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4}{ld}\right)^{ld} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(4)}\right).$$

Знак рівності в даній нерівності досягається на кругових областях та полюсах другого порядку квадратичного диференціалу $Q_4(w)dw^2$.

Declarations

Declaration of competing interest

The authors declare no potential conflict of interest with respect to the research, authorship and publication of this article.

Data availability

All necessary data are included into the paper.

Acknowledgement

The work was supported by the National Research Foundation of Ukraine, Project Number 2025.07/0014, Project Name: “Modern problems of Mathematical Analysis and Geometric Function Theory”.

Література

- [1] Lavrent'ev, M. A. (1934). On the theory of conformal mappings. *Tr. Fiz.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 5, 159–245.
- [2] Goluzin, G. M. (1966). *Geometric theory of functions of a complex variable*, Nauka, Moscow.
- [3] Kuz'mina, G.V. (1982). On the problem of the maximum of the conform radien's product of non-overlapping domains. *J. Soviet Math.*, 19 (6), 1715–1726.
- [4] Bakhtin, A. K., Zabolotnii, Y. V. (2021). Estimates of the products of inner radii for multiconnected domains. *Ukr. Mat. Zhurnal*, 73 (1), 9–22.
- [5] Bakhtin, A. K., Bakhtina, G. P., Zelinskii, Yu. B. (2008). *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis*, Inst. Math. NAS Ukraine, Kiev.
- [6] Dubinin, V. N. (1988). Separating transformation of domains and problems of extremal division. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Ros. Akad. Nauk.*, 168, 48–66.
- [7] Dubinin, V. N. (1994). Method of symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Usp. Mat. Nauk*, 49 (1), 3–76.
- [8] Dubinin, V. N. (1997). Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications. *Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst.*, 237, 56–73.
- [9] Dubinin, V. N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables* Dal'nayka, Vladivostok.
- [10] Bakhtin, A. K. (2009). Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J.*, 61 (5), 716–733.
- [11] Bakhtin, A. K., Targonskii, A. L. (2011). Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J.*, 63 (7), 999–1012.
- [12] Ochrimenko, S.A., Targonskii, A. L. (2012). Extreme problems for generalized ray systems of points. *Zb. praz. Ins-tu matemat. NANU*, 9 (2), 270–284.
- [13] Targonskii, A. (2014). Extremal problems on the generalized (n; d)-equiangular system of points. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 22 (2), 239–251.

-
- [14] Targonskii, A. (2016). Extremal problem $(2n; 2m-1)$ -system points on the rays. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 24 (2), 283–299.
 - [15] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2016). On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 4, 1–7.
 - [16] Bakhtin, A. K., Targonskii, A. L. (2006). Some extremal problems in the theory of nonoverlapping domains with free poles on rays. *Ukr. Math. J.*, 58 (12), 1950–1954.
 - [17] Targonskii, A. (2017). An extremal problem for the nonoverlapping domains. *Journal of Mathematical Sciences*, 227 (1), 98–104.
 - [18] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2018). Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Journal of Mathematical Sciences*, 235 (1), 74–80.
 - [19] Targonskii, A. L. (2018). About one extremal problem for projections of the points on unit circle. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 15 (3), 418–430.
 - [20] Targonskii, A. (2016). On the One Extremal Problem with the Free Poles on the Unit circle. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 6, 26–31.
 - [21] Denega, I. V., Zabolotnyi, Y. V. (2023). Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. *Matematychni Studii*, 60 (2), 138–144.
 - [22] Denega, I. V., Zabolotnii, Ya. V. (2017). Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equation*, 62 (11), 1611–1618.
 - [23] Targonskii, A. L. (2018). About one extremal problem for projections of the points on unit circle. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 15 (3), 418–430.
 - [24] Targonskii, A., Bondar, S. (2024). An extremal problem for a mosaic system of points in the case of an additional set of points on a circle. *Journal of Mathematical Sciences*, 284 (3), 400–409.
 - [25] Targonskii, A. (2023). Extreme problem for a mosaic system of points on the open sets and non-overlapping domains. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16 (1), 91–104.
 - [26] Targonskii, A. L. (2021). Extreme problem for a mosaic system of points. *Journal of Mathematical Sciences*, 252 (4), 558–565.
 - [27] Targonskii, A. (2020). About one extremal problem for open sets and partially non-overlapping domains. *Journal of Mathematical Sciences*, 244 (1), 56–64.
 - [28] Lebedev, N. A. (1975). *The area principle in the theory of univalent functions*. Moscow: Nauka.
 - [29] Hayman, W. K. (1958). *Multivalent functions*. Cambridge University, Cambridge.
 - [30] Jenkins, J. A. (1958). *Univalent functions and conformal mapping*. Springer, Berlin.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

- Andrey Targonskii** Zhitomir State University,
Zhitomir, Ukraine
E-Mail: `targonsk@zu.edu.ua`
- Ya. A. Tarhonska** Taras Shevchenko National University of
Kyiv,
Kyiv, Ukraine
E-Mail: `elizavetatarganska@gmail.com`