

УДК 512

DOI: 10.37069/3154-8229-2026-40-4

©2026. Т.Ю. Коломієць, Р.О. Коломієць, А.Л. Таргонський

ВПОРЯДКУВАННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЇ ВИБІРКИ

У статті проаналізовано метод впорядкування вибірки (підмножини) комплексних чисел відносно положення комплексних точок на площині. Наведено всі можливі способи розташування двох комплексних чисел. Для кожного випадку введено означення відношення порядку і доведено, що між будь-якими двома комплексними числами можна встановити тільки одне із запропонованих відношень. Обґрунтовано можливість часткового (нестрогого) та повного (строного) впорядкування комплекснозначної вибірки, сформульовано аналог закону трихотомії для даного підходу.

MSC: 30A10.

Ключові слова: комплексна площина, комплекснозначна вибірка, відношення порядку, закон трихотомії.

1. Вступ.

Питання про впорядкування множини комплексних чисел виникало давно, разом із побудовою теорії комплексних чисел та комплексного аналізу [1-2]. В роботі [3] сформульовано та обґрунтовано властивості дійсних чисел як впорядкованого поля і показано, що комплексні числа не утворюють впорядкованого поля. Цей результат не означає, що не можна встановити деякий порядок на комплексній площині. В теорії множин [4] розглядаються ідеї впорядкування, за якими кожна множина може бути впорядкована. Цей результат еквівалентний аксіомі вибору. Наприклад, у статтях [5, 6] вивчено відношення порядку на підмножинах в алгебрі гіперболічних чисел, а в роботах [7, 8] – в алгебрі бігіперболічних чисел. Отже, множину комплексних чисел можна впорядкувати певним способом, але не таким чином, що узагальнює впорядкування множини дійсних чисел. Лексикографічне впорядкування множини комплексних чисел є прикладом повного впорядкування. Однак, як показано в [4], жодне впорядкування множини комплексних чисел не може задовольняти закон трихотомії. У статті [9] автор вивчає питання «Чи можна впорядкувати комплексні числа?». Він обґрунтовує, що існують різні правдоподібні способи, за допомогою яких можна це зробити. У статті [10] визначено відношення впорядкування комплексних чисел спеціального вигляду, досліджено властивості та теореми цього впорядкування, розв'язано прості комплексні нерівності. У роботі [11] було висунуто гіпотезу, що лексикографічне впорядкування може бути застосоване до комплексних фізичних величин, які розташовані на відповідних неархімедових комплексних числових осях. Геометричні аспекти відношення, що впорядковує поле комплексних чисел методами аналітичної геометрії, наведено у статті [12]. В роботі [13] вивчається новий метод впорядкування ком-

плесних чисел із застосуванням понять впорядкування дійсних чисел на числовій прямій. Показано, що прихована властивість впорядкування комплексних чисел полягає у розширенні комплексної площини та в її стереографічній проекції. Автором введено властивість, названу D-законом трихотомії. В роботі [14] обґрунтовано деякі спроби впорядкування комплексних чисел та причини їх невдачі. У статті [15] введено категоріальне визначення комплексного поля, використовуючи ідею n -впорядкованої множини. У [16] проаналізовано орієнтовані часткові порядки комплексних чисел та кватерніонів над неархімедовими лінійно впорядкованими полями. Робота [17] містить короткий огляд та нові результати щодо деяких питань частково впорядкованих кілець та алгебр, а в статті [18] авторами досліджено клас частково впорядкованих кілець з від'ємними квадратами.

У даній роботі запропоновано метод впорядкування випадкової вибірки з множини комплексних чисел з погляду взаємного розміщення комплексних точок на комплексній площині та досліджено кожен випадок.

2. Взаємне розміщення комплексних точок.

Впорядкування множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ відбувається відносно їх розташування на числовій прямій: положення ліворуч ($<$), положення праворуч ($>$) і те ж саме місце ($=$). Оскільки дві точки на дійсній прямій можуть мати три положення одна відносно одної, то вони можуть мати дев'ять відносних положень на площині дійсних чисел $\mathbb{R}^2$ [13].

Оскільки геометрично комплексна площина $\mathbb{C}$ ізоморфна двовимірному дійсному простору $\mathbb{R}^2$, то аналогічним чином можна визначити взаємне розташування комплексних точок.

Розглянемо комплекснозначну вибірку (підмножину) $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$:

$$\mathbb{S} = \{\omega_k = a_k + b_k i, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Позначимо через $\langle \triangleleft, \triangleright \rangle$ – впорядковану пару знаків порівняння ($<, =, >$) дійсних $Re \omega_k$ та уявних $Im \omega_k$ частин комплексних чисел.

Тоді дві комплексні точки $\omega_1 = a_1 + b_1 i$ та $\omega_2 = a_2 + b_2 i$ мають дев'ять розміщень (положень) одна відносно іншої, що відповідають дев'яти ситуаціям (рис. 1).

1) Те саме місце (центр):

$$\omega_1 \langle =, = \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

2) Прямо вгору (над):

$$\omega_1 \langle =, < \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 < b_2. \end{cases}$$

3) Прямо вниз (під):

$$\omega_1 \langle =, > \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 > b_2. \end{cases}$$

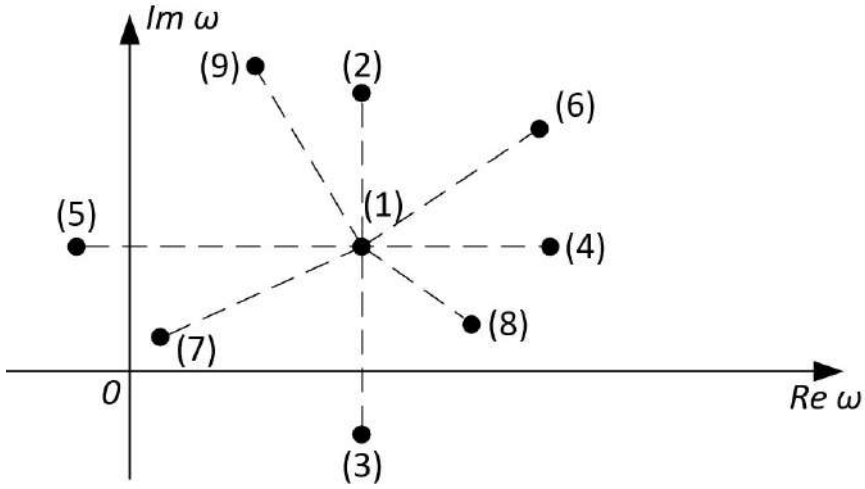


Рис. 1. Взаємне розміщення комплексних точок на площині.

4) Прямо праворуч (вправо):

$$\omega_1 \langle \cdot, = \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

5) Прямо ліворуч (вліво):

$$\omega_1 \langle \cdot, = \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

6) Праворуч і вище (вправо-над):

$$\omega_1 \langle \cdot, < \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2, \\ b_1 < b_2. \end{cases}$$

7) Ліворуч і нижче (вліво-під):

$$\omega_1 \langle \cdot, > \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > a_2, \\ b_1 > b_2. \end{cases}$$

8) Праворуч і нижче (вправо-під):

$$\omega_1 \langle \cdot, > \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2, \\ b_1 > b_2. \end{cases}$$

9) Ліворуч і вище (вліво-над):

$$\omega_1 \langle \cdot, < \rangle \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > a_2, \\ b_1 < b_2. \end{cases}$$

Ці дев'ять варіантів положень точок є очевидними, але кожен з них детально не досліджувався, зокрема для вирішення питання щодо впорядкування комплексних чисел.

3. Відношення порядку в множині комплексних чисел.

Для кожного з випадків 1) - 9) введемо означення відношень порядку.

1) Позначимо через “=” відношення $(\omega_k = \omega_l) := (\omega_k \langle =, = \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 1. Відношення “=” називається відношенням еквівалентності.

Доведемо виконання відповідних умов.

Рефлексивність:

$$\omega_1 \langle =, = \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_1, \\ Im \omega_1 = Im \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_1, \\ b_1 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_1.$$

Симетричність:

$$\begin{aligned} \omega_1 \langle =, = \rangle \omega_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_1, \\ b_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_2 = Re \omega_1, \\ Im \omega_2 = Im \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow (\omega_2 = \omega_1). \end{aligned}$$

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \omega_1 = \omega_2, \\ \omega_2 = \omega_3 \end{cases} &:= \begin{cases} \omega_1 \langle =, = \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle =, = \rangle \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_2 = Re \omega_3, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2 = Im \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3, \\ b_1 = b_2 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_3, \\ b_1 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_3, \\ Im \omega_1 = Im \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 1) для відношення “=” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності.

Отже, відношення “=” є відношенням еквівалентності в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

2) Позначимо через “ $\preceq$ ” відношення $(\omega_k \preceq \omega_l) := (\omega_k \langle =, < \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 2. Відношення “ $\preceq$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Рефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \preceq \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle =, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \begin{cases} Re \omega_1 = Re \omega_1, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\preceq$ ” не порівнюється саме з собою.

Антисиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \preccurlyeq \omega_2, \\ \omega_2 \preccurlyeq \omega_1 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle =, < \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle =, < \rangle \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2; \\ Re \omega_2 = Re \omega_1, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Re \omega_2 = Re \omega_1; \\ Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \neq \omega_2, \\ \omega_1 \preccurlyeq \omega_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго менше за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \preccurlyeq \omega_2, \\ \omega_2 \preccurlyeq \omega_3 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle =, < \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle =, < \rangle \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2; \\ Re \omega_2 = Re \omega_3, \\ Im \omega_2 < Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Re \omega_2 = Re \omega_3; \\ Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_2 < Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_3, \\ Im \omega_1 < Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_3, \\ b_1 < b_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \langle =, < \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \preccurlyeq \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 2) для відношення “ $\preccurlyeq$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\preccurlyeq$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

3) Позначимо через “ $\succcurlyeq$ ” відношення $(\omega_k \succcurlyeq \omega_l) := (\omega_k \langle =, > \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 3. Відношення “ $\succcurlyeq$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Рефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \succcurlyeq \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle =, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_1, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\succcurlyeq$ ” не порівнюється саме з собою.

Антисиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succcurlyeq \omega_2, \\ \omega_2 \succcurlyeq \omega_1 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle =, > \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle =, > \rangle \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2; \\ Re \omega_2 = Re \omega_1, \\ Im \omega_2 > Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Re \omega_2 = Re \omega_1; \\ Im \omega_1 > Im \omega_2, \\ Im \omega_2 > Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \neq \omega_2, \\ \omega_1 \succcurlyeq \omega_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго більше за друге.
Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_3 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle =, > \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle =, > \rangle \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 = Re \omega_3, \\ Im \omega_2 > Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_2, \\ Re \omega_2 = Re \omega_3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 > Im \omega_2, \\ Im \omega_2 > Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 = Re \omega_3, \\ Im \omega_1 > Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_3, \\ b_1 > b_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \langle =, > \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \succ \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 3) для відношення “ $\succ$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\succ$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

4) Позначимо через “ $\preccurlyeq$ ” відношення $(\omega_k \preccurlyeq \omega_l) := (\omega_k \langle <, = \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 4. Відношення “ $\preccurlyeq$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та рефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \preccurlyeq \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, = \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 \neq Re \omega_1, \\ Im \omega_1 = Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \neq a_1, \\ b_1 = b_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\preccurlyeq$ ” не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та антисиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \preccurlyeq \omega_2, \\ \omega_2 \preccurlyeq \omega_1 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle <, = \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle <, = \rangle \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 < Re \omega_1, \\ Im \omega_2 = Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_2 < Re \omega_1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 = Im \omega_2, \\ Im \omega_2 = Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 \neq Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \neq a_2, \\ b_1 = b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \preccurlyeq \omega_2, \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго менше за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \preccurlyeq \omega_2, \\ \omega_2 \preccurlyeq \omega_3 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle <, = \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle <, = \rangle \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 = Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 < Re \omega_3, \\ Im \omega_2 = Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_2 < Re \omega_3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 = Im \omega_2, \\ Im \omega_2 = Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_3, \\ Im \omega_1 = Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_3, \\ b_1 = b_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \langle <, = \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \preccurlyeq \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 4) для відношення “ $\preceq$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\preceq$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

5) Позначимо через “ $\succ$ ” відношення $(\omega_k \succ \omega_l) := (\omega_k \langle >, = \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 5. Відношення “ $\succ$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та рефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \succ \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, = \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 \neq \operatorname{Re} \omega_1, \\ \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_1, \\ b_1 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\succ$ ” не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та антисиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_1 \end{cases} &:= \begin{cases} \omega_1 \langle >, = \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle >, = \rangle \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_1, \\ \operatorname{Im} \omega_2 = \operatorname{Im} \omega_1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_1; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_2 = \operatorname{Im} \omega_1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 \neq \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго більше за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_3 \end{cases} &:= \begin{cases} \omega_1 \langle >, = \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle >, = \rangle \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_3, \\ \operatorname{Im} \omega_2 = \operatorname{Im} \omega_3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_3; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_2 = \operatorname{Im} \omega_3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_3, \\ \operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > a_3, \\ b_1 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 \langle >, = \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \succ \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 5) для відношення “ $\succ$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\succ$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

6) Позначимо через “ $\prec$ ” відношення $(\omega_k \prec \omega_l) := (\omega_k \langle <, < \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 6. Відношення “ $\prec$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \prec \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \omega_1 \neq \operatorname{Re} \omega_1, \\ \operatorname{Im} \omega_1 \neq \operatorname{Im} \omega_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\prec$ ” не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_2 \prec \omega_1 \end{array} \right\} &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \prec, \prec \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \prec, \prec \rangle \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 < Re \omega_1, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_2 < Re \omega_1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_1 \neq Re \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_2, \\ a_1 \neq a_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} b_1 < b_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_2, \\ b_1 < b_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго менше за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_2 \prec \omega_3 \end{array} \right\} &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \prec, \prec \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \prec, \prec \rangle \omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 < Re \omega_3, \\ Im \omega_2 < Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_2 < Re \omega_3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_2 < Im \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_3, \\ Im \omega_1 < Im \omega_3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_3, \\ b_1 < b_3 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \omega_1 \langle \prec, \prec \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \prec \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 6) для відношення “ $\prec$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\prec$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

7) Позначимо через “ $\succ$ ” відношення $(\omega_k \succ \omega_l) := (\omega_k \langle \succ, \succ \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 7. Відношення “ $\succ$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \succ \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 \neq Re \omega_1, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \neq a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_1 \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \succ, \succ \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \succ, \succ \rangle \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_2 > Re \omega_1, \\ Im \omega_2 > Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Re \omega_2 > Re \omega_1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Im \omega_1 > Im \omega_2, \\ Im \omega_2 > Im \omega_1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 > \text{Re } \omega_2, \\ \text{Re } \omega_1 \neq \text{Re } \omega_2; \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_2, \\ \text{Im } \omega_1 \neq \text{Im } \omega_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 > a_2, \\ a_1 \neq a_2; \\ b_1 > b_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 > a_2, \\ b_1 > b_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{array} \right.$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число строго більше за друге.

Транзитивність:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_3 \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle >, > \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle >, > \rangle \omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 > \text{Re } \omega_2, \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_2 \\ \text{Re } \omega_2 > \text{Re } \omega_3, \\ \text{Im } \omega_2 > \text{Im } \omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 > \text{Re } \omega_2, \\ \text{Re } \omega_2 > \text{Re } \omega_3 \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_2, \\ \text{Im } \omega_2 > \text{Im } \omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 > \text{Re } \omega_3, \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 > a_3, \\ b_1 > b_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \omega_1 \langle >, > \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \succ \omega_3.$$

Бачимо, що у випадку 7) для відношення “ $\succ$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\succ$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

8) Позначимо через “ $\prec$ ” відношення $(\omega_k \prec \omega_l) := (\omega_k \langle <, > \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 8. Відношення “ $\prec$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \prec \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 \neq \text{Re } \omega_1, \\ \text{Im } \omega_1 \neq \text{Im } \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \neq a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\prec$ ” не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_2 \prec \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle <, > \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle <, > \rangle \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 < \text{Re } \omega_2, \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_2; \\ \text{Re } \omega_2 < \text{Re } \omega_1, \\ \text{Im } \omega_2 > \text{Im } \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \omega_1 < \text{Re } \omega_2, \\ \text{Re } \omega_2 < \text{Re } \omega_1; \\ \text{Im } \omega_1 > \text{Im } \omega_2, \\ \text{Im } \omega_2 > \text{Im } \omega_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_2, \\ a_2 < a_1; \\ a_1 \neq a_2; \\ b_1 > b_2, \\ b_2 > b_1; \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_2 \prec \omega_1; \\ \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_1; \\ \omega_1 \neq \omega_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_1 \succ \omega_2; \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{array} \right.$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число може бути строго меншим за друге або строго більшим за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \prec \succ \omega_2, \\ \omega_2 \prec \succ \omega_3 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \prec, \succ \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \prec, \succ \rangle \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Im \omega_1 > Im \omega_2; \\ Re \omega_2 < Re \omega_3, \\ Im \omega_2 > Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_2, \\ Re \omega_2 < Re \omega_3; \\ Im \omega_1 > Im \omega_2, \\ Im \omega_2 > Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 < Re \omega_3, \\ Im \omega_1 > Im \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 < a_3, \\ b_1 > b_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \langle \prec, \succ \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \prec \succ \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 8) для відношення “ $\prec \succ$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\prec \succ$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$.

9) Позначимо через “ $\succ \prec$ ” відношення $(\omega_k \succ \prec \omega_l) := (\omega_k \langle \succ, \prec \rangle \omega_l)$, $k, l = 1, 2, 3$.

ОЗНАЧЕННЯ 9. Відношення “ $\succ \prec$ ” називається відношенням строгого порядку.

Доведемо виконання відповідних умов.

Антирефлексивність (дійсна компонента) та антирефлексивність (уявна компонента):

$$\omega_1 \succ \prec \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \langle \neq, \neq \rangle \omega_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 \neq Re \omega_1, \\ Im \omega_1 \neq Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \neq a_1, \\ b_1 \neq b_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_1,$$

тобто комплексне число у відношенні “ $\succ \prec$ ” не порівнюється саме з собою.

Асиметричність (дійсна компонента) та асиметричність (уявна компонента):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \prec \omega_2, \\ \omega_2 \succ \prec \omega_1 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \succ, \prec \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \succ, \prec \rangle \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Im \omega_1 < Im \omega_2; \\ Re \omega_2 > Re \omega_1, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \omega_1 > Re \omega_2, \\ Re \omega_2 > Re \omega_1; \\ Im \omega_1 < Im \omega_2, \\ Im \omega_2 < Im \omega_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 > a_2, \\ a_2 > a_1; \\ a_1 \neq a_2; \\ b_1 < b_2, \\ b_2 < b_1; \\ b_1 \neq b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_1; \\ \omega_1 \prec \omega_2, \\ \omega_2 \prec \omega_1; \\ \omega_1 \neq \omega_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_1 \prec \omega_2; \\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ця властивість означає, що одне комплексне число може бути строго більшим за друге або строго меншим за друге.

Транзитивність:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \succ \omega_2, \\ \omega_2 \succ \omega_3 \end{array} \right. &:= \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \langle \succ, \prec \rangle \omega_2, \\ \omega_2 \langle \succ, \prec \rangle \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_1 < \operatorname{Im} \omega_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_3, \\ \operatorname{Im} \omega_2 < \operatorname{Im} \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_2, \\ \operatorname{Re} \omega_2 > \operatorname{Re} \omega_3; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} \omega_1 < \operatorname{Im} \omega_2, \\ \operatorname{Im} \omega_2 < \operatorname{Im} \omega_3 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \omega_1 > \operatorname{Re} \omega_3, \\ \operatorname{Im} \omega_1 < \operatorname{Im} \omega_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 > a_3, \\ b_1 < b_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \omega_1 \langle \succ, \prec \rangle \omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 \succ \omega_3. \end{aligned}$$

Бачимо, що у випадку 9) для відношення “ $\succ \prec$ ” в $\mathbb{C}$ виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності та транзитивності.

Отже, відношення “ $\succ \prec$ ” є відношенням строгого порядку в $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$. $\square$

З доведених умов для означень 1-9 бачимо, що у випадку 1) виконуються властивості еквівалентності, а у випадках 2) - 9) - властивості строгого порядку.

4. Аналог закону трихотомії для комплексних чисел.

Лема. Комплексну площину $\mathbb{C}$ можна зобразити як об’єднання неперетинних підмножин $\mathbb{S}_j$:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{j=1}^9 \mathbb{S}_j, \quad \mathbb{S}_j \cap \mathbb{S}_l = \emptyset, \quad j \neq l, \quad l = 1, \dots, 9, \quad (1)$$

де

$$\mathbb{S}_1 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega = w\};$$

$$\mathbb{S}_2 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \preccurlyeq w\}; \quad \mathbb{S}_3 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \succcurlyeq w\};$$

$$\mathbb{S}_4 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \preccurlyeq w\}; \quad \mathbb{S}_5 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \succcurlyeq w\};$$

$$\mathbb{S}_6 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \prec w\}; \quad \mathbb{S}_7 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \succ w\};$$

$$\mathbb{S}_8 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \prec \succ w\}; \quad \mathbb{S}_9 = \{\omega, w \in \mathbb{C} \mid \omega \succ \prec w\}.$$

Доведення.

Доведемо дві умови.

1. Неперетинність підмножин: $\mathbb{S}_j \cap \mathbb{S}_l = \emptyset, \quad j \neq l$.

Згідно з доведеними умовами в означеннях 1-9 бачимо, що жодна пара підмножин вигляду (1) не може виконуватись одночасно, оскільки можливість входження в кожену підмножину базується на строгих знаках нерівностей ($<$, $=$, $>$). Отже, підмножини (1) попарно не перетинаються.

2. Об’єднання підмножин: $\mathbb{C} = \bigcup_{j=1}^9 \mathbb{S}_j$.

Оскільки будь-яке комплексне число $\omega = x + yi \in \mathbb{C}$ геометрично зображується парою дійсних значень координат $(x; y) \in \mathbb{R}$, а для дійсних чисел виконується закон трихотомії, то координати комплексного числа обов’язково потраплять в одну з

комбінацій знаків. Отже, на комплексній площині будь-яка точка належить хоча б одній із дев'яти підмножин (1). $\square$

Згідно доведеної леми сформулюємо аналог закону трихотомії для комплексних чисел: *будь-які два комплексні числа можна порівняти між собою тільки за одним з дев'яти відношень, що входять в розбиття комплексної площини (1).*

ЗАУВАЖЕННЯ. Хоча для розбиття (1) комплексної площини $\mathbb{C}$ виконується аналог закону трихотомії - це не свідчить про повне впорядкування комплексної площини, а лише про часткове її впорядкування.

Згідно означень 1-7 для двох комплексних чисел $\omega, w \in \mathbb{C}$ можна встановити строгий порядок, оскільки для них виконується один із трьох варіантів: вони рівні між собою ($\omega = w$), одне число строго менше за друге ($\omega \prec w$, $\omega \preceq w$, $\omega \prec w$) або одне число строго більше за друге ($\omega \succ w$, $\omega \succeq w$, $\omega \succ w$). Згідно означень 8-9 відношення " $\prec$ " і " $\succ$ " є відношеннями строгого порядку, оскільки для них виконуються властивості антирефлексивності, асиметричності й транзитивності, але цього недостатньо для того, щоб серед комплекснозначної вибірки, заданої цими відношеннями, визначити, чи одне комплексне число строго менше (строго більше) за друге. Випадки 8) і 9) потребують більш детального вивчення.

5. Висновки.

У роботі проаналізовано метод впорядкування комплексних чисел відповідно до взаємного розміщення точок на комплексній площині. Доведено, що одержане впорядкування комплексної площини задовольняє аналог закону трихотомії для комплексних чисел. Але для комплекснозначної вибірки, взятої з множини комплексних чисел з відношеннями порядку " $\prec$ " і " $\succ$ ", можна говорити тільки про часткове її впорядкування. Одержані результати можуть бути використані при майбутніх дослідженнях впорядкування комплексної площини.

6. Декларації.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Джерела фінансування

Перший і третій автори отримали підтримку від Національного фонду досліджень України, номер проекту 2025.07/0014, назва проекту: «Сучасні проблеми математичного аналізу та геометричної теорії функцій».

Авторські внески

Т.Ю. Коломієць: постановка задачі, розробка методів, математичні результати, написання першої версії, редагування, доопрацювання, схвалення фінальної версії.

Р.О. Коломієць: перевірка першої версії, технічне редагування та оформлення результатів.

А.Л. Таргонський: вдосконалення методів, перевірка математичних результатів.

Цитована література

1. Rudin W. Real and complex analysis. 3rd ed.: New York, NY: McGraw-Hill, 1987. 416 p.
2. Olariu S. Complex numbers in N dimensions. North-Holland Mathematics Studies, 190. Amsterdam: North-Holland, 2002. 269 p.

3. *Kirkwood J. R.* An Introduction to Analysis, 2nd edition, PWS Publishing Company and Waveland Press, Inc., 1995. 278 p.
4. *Hrbacek K., Jech T.* Introduction to Set Theory, 3rd edition Revised and Expanded. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics: Marcel Dekker, Inc., 1999. 308 p.
5. *Alpay D., Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M.* Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 913–929.
6. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. {arXiv:1611.06850v2} [math.PR] 27 Mar 2017.
7. *Коломієць Т. Ю.* Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2020. Т. 34. С. 36–49.
8. *Коломієць Т. Ю.* Умовна ймовірнісна міра в алгебрі бігіперболічних чисел. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2025. Т. 39, № 1. С. 13–22.
9. *Angell D.* Ordering Complex Numbers ... *Not. Parabola*. 2007. Vol. 43, Iss. 2. P. 1-5.
10. *Sun D., Gu Z., Liu W., Yue C.* The order of complex numbers. <http://arxiv.org/abs/physics/0102047v2> {arXiv:1003.4906v1} [math. GM] 22 Mar 2010. 2010. P. 1-6.
11. *Lyahov V. V., Nechshadim V. M.* Complex Numbers and Physical Reality. <http://arxiv.org/abs/physics/0102047v2> {arXiv:physics/0102047v2} [physics.gen-ph] 12 Mar 2001. 2001. P. 1-11.
12. *Kaczmarek J.* Geometrical aspects of a relation ordering the field of complex numbers. *Zeszyty Naukowe. Geometria*. 2002. Vol. 22. P. 39-52.
13. *Yadav D. K.* A new approach to ordering complex numbers. *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications (IJMSEA)*. 2008. Vol. 2, No. 3. P. 211–223.
14. *Fenwick Ch.* On complex numbers I – Part 1: Introducing complex numbers, graphing complex numbers, doing arithmetic on complex numbers, and the polar form of a complex numbers. Center for languages and International Education, Institute of Education, University College London, 2022. 149 p.
15. *Novoa L. G.* Order characterization of the complex field. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1978. Vol. 21, No. 3. P. 313-318.
16. *Ma J., Wu L., Zhang Y.* Directed Partial Orders on Complex Numbers and Quaternions over Non-Archimedean Linearly Ordered Fields. *Order*. 2017. Vol. 34, P. 37–44.
17. *Ma J.* Some questions on partially ordered rings – a survey. *Quaestiones Mathematicae*. 2023. Vol. 46, No. 12. P. 1-14.
18. *Durtschi Nh., Ma J., Redfield R. H.* Partially ordered rings with negative squares. *Quaestiones Mathematicae*. 2025. Vol. 48, No. 9. P. 1-8.

References

1. Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
2. Olariu, S. (2002). *Complex numbers in N dimensions*. North-Holland Mathematics Studies (Vol. 190). North-Holland.
3. Kirkwood, J. R. (1995). *An introduction to analysis* (2nd ed.). PWS Publishing Company & Waveland Press.
4. Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to set theory* (3rd rev. & expanded ed.). Marcel Dekker.
5. Alpay, D., Luna-Elizarraras, M. E., & Shapiro, M. (2017). Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(2), 913–929. <https://doi.org/10.1007/s00006-016-0706-6>
6. Kumar, R., & Sharma, K. (2017). Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. *arXiv*. arXiv:1611.06850v2 [math.PR].
7. Kolomiets, T. Yu. (2020). Elementy teorii ymovirnostei iz znachenniyami u bihiperbolichnii alhebri. [Elements of probability theory with values in the bihyperbolic algebra]. *Pratsi Instytutu Prykladnoi Matematyky i Mekhaniky NAN Ukrainy*, 34, 36–49. [in Ukrainian].

8. Kolomiiets, T. Yu. (2025). Umovna ymovirnisna mira v alhebri bihiperbolicnykh chysel. [Conditional probability measure in the algebra of bihyperbolic numbers]. *Pratsi Instytutu Prykladnoi Matematyky i Mekhaniky NAN Ukrainy*, 39(1), 13–22. [in Ukrainian].
9. Angell, D. (2007). Ordering complex numbers ... Not. *Parabola*, 43(2), 1–5.
10. Sun, D., Gu, Z., Liu, W., & Yue, C. (2010). The order of complex numbers. *arXiv*. arXiv:1003.4906 [math.GM].
11. Lyahov, V. V., & Nechshadim, V. M. (2001). Complex numbers and physical reality. *arXiv*. arXiv:physics/0102047 [physics.gen-ph].
12. Kaczmarek, J. (2002). Geometrical aspects of a relation ordering the field of complex numbers. *Zeszyty Naukowe. Geometria*, 22, 39–52.
13. Yadav, D. K. (2008). A new approach to ordering complex numbers. *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, 2(3), 211–223.
14. Fenwick, C. (2022). *On complex numbers I—Part 1: Introducing complex numbers, graphing complex numbers, doing arithmetic on complex numbers, and the polar form of complex numbers*. Centre for Languages and International Education, Institute of Education, University College London.
15. Novoa, L. G. (1978). Order characterization of the complex field. *Canadian Mathematical Bulletin*, 21(3), 313–318.
16. Ma, J., Wu, L., & Zhang, Y. (2017). Directed partial orders on complex numbers and quaternions over non-Archimedean linearly ordered fields. *Order*, 34, 37–44. <https://doi.org/10.1007/s11083-016-9387-y>
17. Ma, J. (2023). Some questions on partially ordered rings: A survey. *Quaestiones Mathematicae*, 46(12), 1–14. <https://doi.org/10.2989/16073606.2023.2177206>
18. Durtschi, N., Ma, J., & Redfield, R. H. (2025). Partially ordered rings with negative squares. *Quaestiones Mathematicae*, 48(9), 1–8. <https://doi.org/10.2989/16073606.2025.2505509>

T.Yu. Kolomiiets, R.O. Kolomiiets, A.L. Targonskii

Organizing a complex sample.

The problem of ordering the complex plane is highly relevant to research in various fields. This article provides a detailed review of known results regarding various methods for ordering sets of complex numbers. For a thorough investigation, we have chosen a method for ordering a sample (or subset) of complex numbers, taking into account the positions of the complex points on the plane. Since the complex plane is geometrically isomorphic to two-dimensional real space, the relative positions of complex points can be determined in a similar manner. All nine possible ways of relating two complex numbers are presented. For each case, a definition of the order relation is introduced, and it is proven that only one of the proposed relations can be established between any two complex numbers. In particular, a lemma is proven regarding the partition of the entire complex plane into a union of nine disjoint subsets. Based on the proven lemma, an analogue of the trichotomy law for complex numbers is formulated. It is shown that although the analog of the trichotomy law holds for the obtained partition of the complex plane, this does not yet imply a complete ordering of the complex plane. We analyze the possibility of partial (non-strict) and complete (strict) ordering of a complex-valued sample selected from the set of complex numbers. Cases are presented that are questionable and require further study. These are cases for which the properties of antireflexives, asymmetry, and transitivity hold, but this is insufficient to determine, for a complex-valued sample defined by these relations, whether one complex number is strictly less (strictly greater) than another. The results obtained can be used in future studies of the ordering of the complex plane.

Keywords: *complex plane, complex-valued sample, order relation, trichotomy law.*

Т.Ю. Коломієць,
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, Житомир, Україна
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7685-4569>
tamila.kolomiets@gmail.com

Отримано: 27.03.2026
Прийнято: 20.04.2026
Опубліковано: 29.05.2026

Р.О. Коломієць,
Державний університет «Житомирська політехніка»,
Житомир, Україна
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9020-938X>
krt_kro@ztu.edu.ua

А.Л. Таргонський,
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, Житомир, Україна
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0670-037X>
targonsk@zu.edu.ua