

Каракоч Наталія Сергіївна, здобувач вищої освіти
фізико-математичного факультету
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна

Науковий керівник: Михайленко Василь Васильович, професор,
завідувач кафедри алгебри та геометрії
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна

ПРОБЛЕМНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ ЗАСТОСУВАНЬ ПОХІДНОЇ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Застосування похідної в шкільному курсі часто опановуються через послідовність типових дій: знайти похідну, визначити критичні точки, дослідити знак похідної та зробити висновок про поведінку функції. Така схема потрібна для формування базових умінь, однак її багаторазове відтворення може звести роботу учня до розпізнавання знайомого шаблону. У результаті складність виникає тоді, коли умова задачі не називає потрібного способу або містить дані в іншому поданні – графічному, словесному чи прикладному.

У модельних програмах з математики для профільної старшої школи, затверджених у 2026 році для поетапного впровадження з 2027 року, тема «Похідна та її застосування» безпосередньо пов'язана з розв'язуванням комплексних проблемних ситуацій. Серед очікуваних результатів названо вміння визначати дані, потрібні для розв'язання, пропонувати способи досягнення результату, переходити між формами подання інформації та застосовувати похідну до дослідження функцій і знаходження найбільшого та найменшого значень [1]. Така орієнтація потребує завдань, у яких учень не лише виконує диференціювання, а приймає математичне рішення. Дослідження математичного міркування показують, що сама наявність складнішої задачі ще не забезпечує зміни способу навчальної діяльності. J. Lithner розмежував імітаційне міркування, побудоване на відтворенні знайомого алгоритму, та творче міркування, у якому спосіб розв'язання обирається й обґрунтовується на основі математичних властивостей [2]. А. Н. Schoenfeld пов'язував успішне розв'язування математичної проблеми не лише з набором знань, а й з евристичними, контролем власних дій та оцінюванням проміжних результатів [3]. Для теми похідної це означає, що навчальне завдання має вимагати від учня визначити роль похідної у конкретній ситуації, а не тільки виконати обчислення.

Змістовий аспект також має принципове значення. M. Zandieh описала розуміння похідної як систему взаємопов'язаних процесно-об'єктних і репрезентаційних компонентів. F. Feudel і R. Biehler показали, що навіть після курсу математичного аналізу труднощі зберігаються саме там, де потрібно інтерпретувати похідну в контексті та пов'язати формальний запис зі змістом зміни величини. В. Ubuz виявила стійкі помилки під час переходу між графіком функції та графіком похідної. Отже, проблемні завдання під час вивчення застосувань похідної доцільно будувати так, щоб вони змушували учня зіставляти властивості функції, знак похідної, графічні дані та зміст конкретної ситуації [4].

Мета та задачі дослідження

Мета дослідження полягала в обґрунтуванні системи проблемних завдань для

навчання застосувань похідної в старшій школі. Для її досягнення було поставлено задачі: визначити ознаки завдання, яке створює реальну пізнавальну проблему; виокремити змістові групи проблемних завдань у темі застосувань похідної; розробити приклади для вивчення монотонності, екстремумів, найбільшого і найменшого значень та прикладної оптимізації; встановити методичну послідовність їх використання і способи педагогічного супроводу. Дослідження мало теоретико-методичний характер та спиралося на аналіз сучасних програмних вимог і праць з дидактики математики.

Результати дослідження та їх обговорення

Проблемним доцільно вважати не будь-яке нестандартне або складне завдання, а таке, у якому хоча б один істотний крок не визначений умовою. Учень має сам встановити математичний зв'язок, вибрати критерій, перевірити достатність умови або побудувати модель. У темі застосувань похідної це особливо важливо, оскільки формальна наявність похідної в умові часто одразу підказує алгоритм. Тому продуктивне проблемне завдання маскує готову схему і переносить увагу з операції диференціювання на зміст міркування.

Першу групу становлять короткі завдання на перевірку твердження. Наприклад: «Відомо, що $f'(x_0)=0$. Чи обов'язково точка x_0 є точкою екстремуму функції?» Типова помилка полягає в ототожненні необхідної умови з достатньою. Контрприклад $f(x)=x^3$ руйнує це узагальнення: $f'(0)=0$, але функція продовжує зростати по обидва боки від нуля. Після знаходження контрприкладу доцільно поставити додаткове запитання: яка інформація про знак похідної дозволила б зробити висновок про максимум або мінімум? Таким способом учень переходить від запам'ятованої ознаки до розуміння зміни характеру монотонності.

Інша концептуальна проблема виникає під час знаходження найбільшого та найменшого значень на відрізку. Учням можна запропонувати твердження: «Найбільше значення диференційовної функції на відрізку завжди досягається в точці, де похідна дорівнює нулю». Його спростовує будь-яка строго зростаюча функція на замкненому відрізку, наприклад $f(x)=x$ на $[0; 2]$. Тут найбільше значення досягається в правому кінці відрізка, хоча внутрішніх критичних точок немає. Таке завдання змушує учня пояснити роль кінців відрізка і формує повну процедуру пошуку глобального екстремуму без механічного переліку кроків.

Друга група охоплює завдання на читання та реконструкцію інформації за графіком похідної. Доцільно подавати графік $y=f'(x)$, не показуючи графіка самої функції, і просити визначити проміжки зростання та спадання f , можливі точки максимуму й мінімуму, а потім схематично відтворити один із графіків f . Тут обчислення майже відсутні. Основна робота полягає у перекладі знака похідної на мову поведінки функції. Саме цей перехід є вразливим місцем у засвоєнні теми, що узгоджується з результатами В. Ubuz про труднощі учнів у використанні графічної інформації для пояснення символічного змісту похідної [6]. Проблемність такого завдання посилюється, якщо графік похідної має кілька нулів різного типу. Наприклад, в одній точці він перетинає вісь Ox , а в іншій лише дотикається до неї і не змінює знак. Учень має встановити, чому нуль похідної не завжди відповідає екстремуму функції. Порівняння двох точок у межах одного рисунка дає сильніший методичний ефект, ніж окреме формулювання правила, оскільки причина відмінності стає видимою в знаковій поведінці похідної.

Третю групу становлять завдання, у яких учень отримує неповний набір

характеристик функції. Наприклад, відомо, що $f'(x) > 0$ на $(-\infty; -1)$ і $(2; +\infty)$, а $f'(x) < 0$ на $(-1; 2)$. Потрібно визначити характер точок $x = -1$ і $x = 2$ та пояснити, які твердження про значення самої функції з цих даних зробити неможливо. Перша частина спонукає використати ознаки екстремуму, друга – відділити інформацію про зміну від інформації про абсолютну висоту графіка. Це запобігає поширеному перенесенню властивостей похідної безпосередньо на значення функції.

Наступний рівень утворюють задачі на оптимізацію, де похідна не згадується в умові. Наприклад: «Для огороження прямокутної ділянки біля прямої берегової лінії є 120 м сітки. Уздовж берега огорожа не потрібна. Які розміри має мати ділянка, щоб її площа була найбільшою?» Учень спочатку визначає змінні та обмеження, а вже потім отримує функцію площі. Якщо ширину позначити x , довжина вздовж берега дорівнює $120 - 2x$, тому площа описується виразом $S(x) = x(120 - 2x)$, де $0 < x < 60$. Похідна $S'(x) = 120 - 4x$ дає критичне значення $x = 30$, а відповідна довжина становить 60 м. Важливо, щоб завершальна частина розв'язання містила пояснення, чому отримана точка відповідає максимуму та як математична відповідь інтерпретується в початковій ситуації. Методична цінність цієї задачі полягає не в самому знаходженні похідної квадратичної функції. Проблемними є попередні кроки: вибір змінної, побудова залежності між сторонами, встановлення області допустимих значень і визначення величини, яку потрібно оптимізувати. Якщо вчитель одразу повідомляє формулу площі як функцію однієї змінної, значна частина проблемного змісту зникає. У проблемному навчанні саме формулювання того, що потрібно з'ясувати і яких знань бракує, розглядається як важлива частина навчальної діяльності.

Висновки

Проблемні завдання під час вивчення застосувань похідної мають переносити центр навчальної діяльності з виконання готової процедури на вибір і обґрунтування способу дії. Методично доцільними є завдання на перевірку тверджень і побудову контрприкладів, аналіз знака похідної, реконструкцію властивостей функції за графіком її похідної та прикладну оптимізацію. Їх використання варто організовувати від коротких концептуальних проблем до задач, у яких учень сам формує математичну модель. Ефективність такого підходу залежить від дозованої підтримки вчителя, обов'язкової перевірки достатності умов та переходу між символічним, графічним і змістовим поданнями. Запропонована система може бути використана під час розроблення уроків з монотонності функції, екстремумів, найбільшого і найменшого значень та оптимізаційних задач у курсі математики старшої школи.

Список використаних джерел:

1. Міністерство освіти і науки України. Модельна навчальна програма «Алгебра. 10–12 класи» для закладів загальної середньої освіти, основний рівень. 2026. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/15/mnp-algebra-10-12-klasi-osnovnii-riven-nelin-jep-ta-in.pdf>
2. Lithner J. A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 2008. Vol. 67. P. 255–276. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
3. Schoenfeld A. H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando : Academic Press, 1985. 409 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8>
5. Zandieh M. J. A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*. 2000. Vol. 8. P. 103–127. DOI: <https://doi.org/10.1090/cbmath/008/06>