

Section: Physical and Mathematical Sciences

СТВОРЕННЯ ПРОБЛЕМНИХ СИТУАЦІЙ ПІД ЧАС ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Михайленко Василь

професор

Каракой Наталія

аспірант

Кафедра фізики та математики
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, Україна

Анотація. У роботі розкрито методичні можливості проблемного підходу під час формування поняття похідної у старшій школі. Вихідною позицією стало розуміння похідної не лише як результату формального диференціювання, а як способу опису локальної зміни величини. Виокремлено три змістові лінії, навколо яких доцільно створювати проблемні ситуації: перехід від середньої швидкості до миттєвої, наближення січних до дотичної та узгодження числового, графічного і словесного подання швидкості зміни. Запропоновано послідовність дій учителя, за якої суперечність виникає з доступної учням задачі, а означення похідної з'являється як відповідь на пізнавальну потребу. Обґрунтовано умови, що підтримують самостійне висування припущень, перевірку наближень і перехід до математичного узагальнення.

Ключові слова: проблемне навчання, локальна швидкість зміни, дотична, січна, математичне поняття, старша школа.

Введення

Тема похідної поєднує кілька способів математичного мислення: роботу з функцією, оцінювання зміни величини, інтерпретацію графіка та перехід до граничного процесу. У чинній навчальній програмі з математики для 10–11 класів похідна та її застосування входять до змісту старшої школи, а компетентнісна спрямованість курсу передбачає використання математичних знань у нових і практично значущих ситуаціях [1]. Проте саме на етапі введення похідної легко виникає розрив між формулою та її змістом. Учень може засвоїти правила диференціювання, не пов'язуючи похідну з локальною швидкістю зміни або нахилом дотичної. Такий розрив підтверджують дослідження з дидактики математичного аналізу. А. Orton виявив труднощі під час переходу від середньої швидкості зміни на інтервалі до швидкості зміни в окремій точці [2]. М. Zandieh показала, що повноцінне розуміння похідної охоплює взаємопов'язані способи її подання – графічний, числовий, словесний і символічний [3]. В. Ubuz пов'язала типові помилки з недостатнім розумінням границі, змішуванням процесу та

результату і труднощами переходу між графічним та символічним поданнями [4]. Новіші результати G. Greefrath et al. також засвідчили, що уявлення про похідну як локальну швидкість зміни та як кутовий коефіцієнт дотичної формуються нерівномірно, тому їх доцільно розвивати через різні типи навчальних ситуацій [5].

Проблемний підхід дає змогу змінити сам момент появи нового поняття. Замість повідомлення готового означення учні стикаються із задачею, для якої наявних засобів уже недостатньо. Потреба в новому математичному об'єкті виникає з пошуку способу розв'язання. Така логіка відповідає загальним засадам *problem-based learning*, де опанування змісту відбувається через кероване розв'язування проблеми та осмислення способу дії [6]. У навчанні похідної це особливо важливо, оскільки граничний перехід має сприйматися не як формальна вимога означення, а як засіб отримання характеристики зміни в конкретний момент.

Мета та задачі дослідження

Мета дослідження полягала в обґрунтуванні методичних умов створення проблемних ситуацій, які сприяють змістовому формуванню поняття похідної в курсі математики старшої школи. Для досягнення мети було поставлено задачі: визначити основні змістові труднощі, що виникають під час введення похідної; встановити, яка пізнавальна суперечність може стати основою проблемної ситуації; розробити послідовність проблемних завдань для переходу від середньої до миттєвої швидкості зміни та від січної до дотичної; окреслити способи педагогічного супроводу, що зберігають самостійність математичного пошуку учнів. Дослідження мало теоретико-методичний характер і спиралося на аналіз навчальної програми, результатів досліджень з дидактики математичного аналізу та методичне моделювання навчальних ситуацій.

Результати дослідження та їх обговорення

Ключовою умовою проблемного введення похідної є така постановка задачі, за якої учень уже володіє достатніми засобами для початку пошуку, але ці засоби не дають завершеної відповіді. Якщо суперечність виникає до актуалізації необхідних попередніх знань, задача сприймається як недоступна. Якщо ж спосіб розв'язання очевидний і зводиться до відтворення відомого алгоритму, проблемна ситуація фактично зникає. Тому перед введенням похідної доцільно актуалізувати поняття функції, приросту аргументу і функції, середньої швидкості, кутового коефіцієнта прямої та січної до графіка.

Першу проблемну ситуацію доцільно будувати навколо питання про швидкість руху в окремий момент. Наприклад, нехай пройдений шлях описано залежністю $s(t)=t^2$. Учні пропонується знайти швидкість тіла саме в момент $t=2$ с. Відомий спосіб обчислення середньої швидкості потребує проміжку часу, тому безпосередньо застосувати його до одного моменту неможливо. Учні можуть обчислити середню швидкість на відрізках від 2 до 3 с, від 2 до 2,5 с, від 2 до 2,1 с і від 2 до 2,01 с. Отримані значення 5; 4,5; 4,1; 4,01 м/с утворюють послідовність наближень до 4 м/с. Важливим тут є не саме число 4, а питання вчителя: чому

скорочення проміжку часу робить оцінку точнішою і що означає результат, коли довжина проміжку прямує до нуля? Учні фактично відкривають потребу в граничному переході раніше, ніж отримують формальне означення похідної.

У цій ситуації методично недоцільно одразу записувати готову формулу та пояснювати її складові. Продуктивнішим є короткий етап прогнозування: учні висловлюють припущення щодо наступних значень середньої швидкості, пояснюють напрям зміни чисел і формулюють, до якого значення вони наближаються. Так відбувається перехід від обчислювальної дії до змістового узагальнення. Дослідження F. Hitt і S. Dufour, проведене на матеріалі відкритого завдання про швидкість, показало, що робота з ситуаційною проблемою та різними поданнями величин підтримує побудову поняття похідної через власні дії учнів [7].

Друга проблемна ситуація переводить той самий зміст у геометричну площину. Для графіка $y=x^2$ можна зафіксувати точку $P(1;1)$ та послідовно обирати точки Q з абсцисами 2; 1,5; 1,1. Кутові коефіцієнти відповідних січних дорівнюють 3; 2,5; 2,1. Учні помічають, що зі зближенням P і Q січна змінює положення, а її нахил наближається до певного значення. Проблемне питання формулюється так: як знайти точний нахил прямої, що описує напрям графіка безпосередньо в точці P , якщо для обчислення кутового коефіцієнта прямої звичайним способом потрібні дві різні точки? Потреба перейти до граничного положення січної створює природний міст до поняття дотичної та геометричного змісту похідної. Така побудова запобігає поширеному спрощенню, коли дотичну учень уявляє лише як пряму, що має з графіком одну спільну точку. У контексті похідної суттєвим стає локальний характер наближення: дотична описує напрям графіка поблизу вибраної точки. G. Greefrath et al. віднесли нахил дотичної та локальну швидкість зміни до базових змістових моделей похідної [5]. Отже, дві проблемні ситуації – кінематична і геометрична – мають бути не альтернативними способами пояснення, а взаємопов'язаними етапами формування одного поняття.

Третя ситуація має забезпечити перехід між поданнями. Учня можна запропонувати графік функції без аналітичної формули і поставити запитання, у якій із позначених точок функція зростає найшвидше, де її зміна близька до нуля, а де вона спадає. На першому етапі відповідь ґрунтується на візуальному оцінюванні нахилу. Далі учні мають пояснити той самий висновок мовою дотичних і локальної швидкості зміни. Лише після цього вводиться символічне позначення похідної в точці. Така послідовність послаблює залежність розуміння від готової формули. У дослідженні S. Habre та M. Abboud робота з візуальними, числовими і символічними представленнями сприяла розумінню похідної як миттєвої швидкості зміни та нахилу кривої в точці [8].

На основі розглянутих ситуацій визначено чотири методичні умови їх використання. Перша полягає в змістовій доступності проблеми: контекст має бути зрозумілим без додаткового теоретичного апарату. Друга умова – можливість отримати кілька наближень або варіантів відповіді, між якими учень

помічає закономірність. Третя – обов’язковий перехід між числовим, графічним і словесним представленнями, оскільки ізольоване опрацювання одного з них звужує образ поняття. Четверта – дозоване педагогічне керування. Учитель не повідомляє наступний крок, а ставить питання, які уточнюють суперечність: «Що саме ми зараз знаходимо?», «Чому цей результат є лише наближенням?», «Що змінюється, коли проміжок зменшується?», «Яке геометричне значення має отримане число?».

Послідовність формування поняття за проблемного підходу доцільно організувати як рух від явища до математичної характеристики. Спочатку учень спостерігає зміну величини в конкретній ситуації та обчислює середню швидкість зміни. Потім виникає потреба описати зміну в окремий момент. Серія наближень приводить до ідеї граничного значення. Геометричне моделювання через січні й дотичну пов’язує числовий результат із графіком. Після цього символічне означення похідної виконує функцію узагальнення вже сформованого змісту. Саме в такій логіці формула стає компактним записом способу міркування, а не початковим об’єктом для запам’ятовування. Водночас проблемність не слід ототожнювати з навмисним ускладненням завдання. Пізнавальна суперечність має бути локальною і керованою: учень розуміє запитання, може розпочати розв’язання та бачить, де саме відомого способу бракує. Це відрізняє проблемну ситуацію від задачі з прихованою умовою або надмірною кількістю нових елементів. З позицій С. Е. Hmelo-Silver, ефективність проблемного навчання пов’язана саме з педагогічним супроводом, який допомагає учням визначити, яких знань їм не вистачає, та спрямовує подальший пошук [6]. Для теми похідної таким об’єктом пошуку стає спосіб кількісно описати локальну зміну.

Висновки

Проблемне введення похідної доцільно будувати навколо пізнавальної потреби визначити характеристику зміни в окремий момент або в окремій точці графіка. Методично продуктивними є три взаємопов’язані лінії: наближення середніх швидкостей до миттєвої швидкості, наближення січних до дотичної та узгодження числового, графічного і словесного представлень локальної зміни. За такої організації означення похідної завершує процес узагальнення, а не передуює йому. Роль учителя полягає у доборі доступної суперечності, організації серії наближень і постановці запитань, які спонукають учнів пояснювати отримані результати. Запропонована логіка може бути використана як основа для розроблення системи проблемних завдань під час подальшого вивчення правил диференціювання та застосувань похідної.

Список використаних джерел

1. Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту : затв. наказом МОН України від 23.10.2017 № 1407. URL:

<https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx>

2. Orton A. Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*. 1983. Vol. 14, No. 3. P. 235–250. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00410540>
3. Zandieh M. A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education IV. CBMS Issues in Mathematics Education*. 2000. Vol. 8. P. 103–127. DOI: <https://doi.org/10.1090/cbmeth/008>
4. Ubuz B. Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2007. Vol. 38, No. 5. P. 609–637. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207390701359313>
5. Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V., Weigand H.-G. Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal für Mathematik-Didaktik*. 2023. Vol. 44. P. 143–169. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9>
6. Hmelo-Silver C. E. Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*. 2004. Vol. 16, No. 3. P. 235–266. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3>
7. Hitt F., Dufour S. Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education*. 2021. Vol. 53, No. 3. P. 635–647. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x>
8. Habre S., Abboud M. Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2006. Vol. 25, No. 1. P. 57–72. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.004>