

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Д.В. Ромаш, Є.О. Севостьянов

АНАЛОГИ ТЕОРЕМ КАРАТЕОДОРІ
І КЕБЕ-БЛОХА
ДЛЯ КЛАСІВ
ОРЛИЧА-СОБОЛЄВА

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2026

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного
університету імені Івана Франка
(протокол № 21 від 25 вересня 2026 р.)*

Рецензенти:

С.А. Плакса – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

В.П. Журавльов – доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри механічної інженерії та математики Поліського національного університету, м. Житомир

А.В. Зіновчук – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Житомирського державного університету імені Івана Франка

В22 Аналоги теорем Каратеодорі і Кебе-Блоха для класів Орлича-Соболева / Ромаш Д.В., Севостьянов Є.О. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2026. - 43 с.

Навчально-методичний посібник присвячено аналогам теорем Каратеодорі і Кебе-Блоха для класів Орлича-Соболева. Наведено основні означення, класичні результати та результати проєкту, модельні приклади з розв'язаннями, завдання для самоконтролю та завдання для самостійної роботи з 30 варіантами.

Посібник підготовлено в рамках проєкту «Аналоги теорем Каратеодорі і Кебе-Блоха для класів Орлича-Соболева» (№ 2025.02/0010) за підтримки Національного фонду досліджень України.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

© О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов, А.Л. Таргонський

2026

© Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2026

ЗМІСТ

1	Теорема Каратеодорі	5
1.1	Означення	5
1.2	Класичні результати про граничне продовження	9
1.3	Результати, отримані в ході проєкту	10
1.4	Приклади та їх детальне обґрунтування	13
1.5	Завдання для самоконтролю	18
1.6	Завдання для самостійної роботи	19
2	Теорема Кебе-Блоха	22
2.1	Означення	22
2.2	Класичні результати	24
2.3	Результати проєкту	25
2.3.1	Проблематика та базові поняття	26
2.3.2	Аналог теореми Кебе в $\mathbb{R}^n$ за інтегровно- сті мажоранти	26
2.3.3	Аналог теореми Кебе за інтегральних обме- жень на мажоранту	27
2.3.4	Властивість відкритості граничного від- ображення	28
2.3.5	Узагальнення на метричні простори та рі- манові многовиди	30
2.3.6	Застосування до класів Орлича-Соболева та кільцевих гомеоморфізмів	31
2.4	Приклади та їх детальне обґрунтування	32
2.5	Завдання для самоконтролю	36

2.6	Завдання для самостійної роботи	37
	Перелік використаних джерел	41

1 Теорема Каратеодорі

1.1 Означення

Означення 1.1. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Простір $C_0^k(U)$ визначається як простір функцій $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм у U , які мають k частинних похідних за кожною змінною, неперервних у U .

Означення 1.2. Нехай U є відкритою підмножиною простору $\mathbb{R}^n$ і нехай $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функція така, що $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$. Припустимо, що існує функція $v \in L_{\text{loc}}^1(U)$, для якої для кожної $\varphi \in C_0^1(U)$ виконується

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x) dm(x) = - \int_U \varphi(x) v(x) dm(x).$$

Тоді функцію v називають слабкою похідною першого порядку функції u за змінною x_i і позначають $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$.

Означення 1.3. Функція $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ належить простору $W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$, якщо u має слабкі похідні першого порядку за всіма змінними в U , причому всі ці похідні є локально інтегровними в U .

Означення 1.4. Відображення $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, належить класу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$, якщо $f_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Для $p \geq 1$ відображення f належить простору $W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$, якщо всі слабкі частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ є локально інтегровними в U у степені p .

Означення 1.5. Нехай $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ є вимірною функцією. Відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ належить класу Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$, якщо $f_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ та для кожної області $G \subset D$ з $\overline{G} \subset D$ виконується

$$\int_G \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) < \infty,$$

де

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2}.$$

За означенням, $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D) \subset W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$. При $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$, маємо $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$.

Означення 1.6. Відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок. Відображення f називається *відкритим*, якщо образ кожної відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.7. Нехай $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ та $D \subset \mathbb{R}^n$ є областю. Позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma: [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ та $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Означення 1.8. Борелева функція $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називається *допустимною* для сім'ї шляхів Γ в $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$$

для всіх (локально спрямованих) шляхів $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку кажуть, що $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Для $p \geq 1$ *p-модулем* Γ називають величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Означення 1.9. Кажуть, що межа ∂D області D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, є *сильно досяжною* в точці $x_0 \in \partial D$ відносно p -модуля, якщо для кожного околу U точки x_0 існують компактна множина $E \subset D$, окіл $V \subset U$ точки x_0 та $\delta > 0$ такі, що

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta$$

для кожного континууму F в D , який перетинає ∂U та ∂V .

Наступні поняття, пов'язані з простими кінцями, належать Каратеодорі (див. [2] і [11]).

Означення 1.10. Нехай ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n-1}$; поверхню σ отождествлюємо з її образом і покладаємо $\partial\sigma = \overline{\sigma} \setminus \sigma$. Жорданова поверхня $\sigma: \omega \rightarrow D$ називається *розрізом* області D , якщо σ розділяє D , тобто $D \setminus \sigma$ має більше однієї компоненти, $\partial\sigma \cap D = \emptyset$ та $\partial\sigma \cap \partial D \neq \emptyset$. Послідовність розрізів $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ в D називається *ланцюгом*, якщо: 1) множина σ_{m+1} міститься рівно в одній компоненті d_m множини $D \setminus \sigma_m$, причому $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$; 2) $\bigcap_{m=1}^{\infty} d_m = \emptyset$.

Означення 1.11. Два ланцюги розрізів $\{\sigma_m\}$ та $\{\sigma'_k\}$ називаються *еквівалентними*, якщо для кожного m область d_m містить усі області d'_k , за винятком скінченної кількості, і навпаки. *Кінцем* області D називається клас еквівалентних ланцюгів розрізів у D . Нехай K — кінець області D в $\mathbb{R}^n$, тоді множина

$$I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$$

називається *тілом (impression) кінця* K .

Означення 1.12. Кінець K називається *простим кінцем*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ такий, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$$

для деякого континууму C в D . Множину простих кінців, що відповідають області D , позначають через E_D , а поповнення області D її простими кінцями — через $\overline{D}_P = D \cup E_D$.

Наступні означення локально квазіконформної межі та регулярної області сходять до Р. Няккі (див. [16] і [11]).

Означення 1.13. Межа ∂D області D в $\mathbb{R}^n$ називається *локально квазіконформною*, якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U , для якого існує квазіконформне відображення φ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином $\mathbb{B}^n$ та координатної гіперплощини. Послідовність розрізів σ_m називається *регулярною*, якщо $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \emptyset$ для $m \in \mathbb{N}$ та $d(\sigma_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Якщо кінець K містить хоча б один регулярний ланцюг, він називається *регулярним*. Обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ називається *регулярною*, якщо D можна квазіконформно відобразити на область із локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом у $\mathbb{R}^n$, і при цьому кожен простий кінець у D є регулярним.

Означення 1.14. Нехай $g: D_0 \rightarrow D$ — квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D . Для точок $x, y \in \overline{D}_P$ визначимо метрику:

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|,$$

де $g^{-1}(x)$ для простого кінця $x \in E_D$ треба розуміти як відповідну (єди-ну) межова точка області D_0 (зазначена межова точка є єдиною і ко-ректно визначеною з огляду на [16, теорема 4.1]). Ця метрика генерує збіжність і відповідну топологію в $\overline{D}_P$, яка називається *топологією про-стих кінців*.

Означення 1.15. Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для $x \in \partial D$ множиною точок накопичення відображення f в точці x називається множина

$$C(f, x) := \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : \exists x_k \in D : x_k \rightarrow x, f(x_k) \rightarrow y, k \rightarrow \infty\}.$$

Множиною точок накопичення f на межі D називають

$$C(f, \partial D) = \bigcup_{x \in \partial D} C(f, x).$$

Означення 1.16. Функція $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ має скінченне середнє коли-вання в точці $x_0 \in D$, якщо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty,$$

де

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x).$$

У цьому випадку кажуть, що $\varphi \in FMO(x_0)$.

Означення 1.17. Нехай $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ є вимірною за Лебегом функцією. Вводимо

$$Q'(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geq 1, \\ 1, & Q(x) < 1. \end{cases}$$

Середнім значенням Q' по сфері $|x - x_0| = r$ називають функцію

$$q'_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q'(x) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Означення 1.18. Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ має частинні похідні майже всюди в D . Позначимо

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \quad \|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|},$$

$$J(x, f) = \det f'(x).$$

Для $\alpha \geq 1$ внутрішнім розтягненням відображення f в точці x порядку α називається величина

$$K_{I,\alpha}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^\alpha}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

1.2 Класичні результати про граничне продовження

Добре відома теорема Каратеодорі стверджує, що конформні відображення продовжуються на межі своїх областей у термінах простих кінців (див., наприклад, [4, теорема 9.4]).

Теорема 1.1.[Теорема Каратеодорі] *Якщо f відображає одиничний круг конформно та однолисто на область B , то воно індукує взаємно однозначне відображення між точками на одиничному колі та простими кінцями області B (див. [2]).*

Існує також аналогічний результат Р. Няккі (R. Näkki) для квазіконформних відображень, зміст якого наведено нижче.

Теорема 1.2.[Теорема Няккі] *При квазіконформному відображенні f області D_0 з локально квазіконформною межею на область D , існує взаємно однозначна відповідність між межовими точками D_0 та простими кінцями D . Більше того, множина точок накопичення $C(f, b)$, $b \in \partial D_0$, збігається з тілом (impression) $I(P)$ відповідного простого кінця P області D (див. [16, теорема 4.1]).*

Окрім класичних результатів (див., наприклад, [1, 2, 5, 10, 11]), актуальним і природним є перенесення цих властивостей на класи Соболева

та Орлича-Соболева. Особливий інтерес у цьому контексті становлять відображення, які не є гомеоморфізмами і не зберігають межу, але є відкритими та дискретними. Варто зазначити, що для гомеоморфізмів класів Орлича-Соболева подібні результати щодо граничного продовження були отримані раніше у [11]. У випадку, коли відображення є відкритими, дискретними та замкненими, це питання детально висвітлено у [24, глава 5]. Наведені далі результати багато в чому спираються на підходи з праць [6] та [7].

Слід зауважити, що оцінки спотворення модуля в граничних точках не встановлені для відображень класу $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$, які не зберігають межу. За виконання умови Кальдерона, всі відомі оцінки припускають, що відображення f є або гомеоморфізмом, або відкритим, дискретним і замкненим (див., наприклад, [24]). У другому випадку проблема граничного продовження відображень Орлича-Соболева безпосередньо зводиться до оцінок модуля. Натомість для відображень, які не зберігають межу, такий простий зв'язок відсутній. Тому подальше дослідження граничної поведінки відповідних відображень вимагає знаходження цього зв'язку та залучення нових методів.

1.3 Результати, отримані в ході проєкту

Наступні результати були отримані в ході виконання проєкту Національного фонду досліджень України «Аналоги теорем Каратеодорі і Кебе-Блоха для класів Орлича-Соболева» (номер проєкту 2025.02/0010) під керівництвом професора Є.О. Севостьянова. Ці дослідження присвячені проблемам неперервного межового продовження відображень класів Орлича-Соболева, які є відкритими, дискретними, але не є замкненими (тобто не зберігають межу області).

Почнемо з теорем про неперервне продовження на межу в термінах простих кінців (див., напр., [7, 12]).

Теорема 1.3. *Нехай $n - 1 < \alpha \leq n$, D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірنا за Лебегом функція і нехай $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — зростаюча функція. Нехай D — регулярна область, а $f: D \rightarrow D'$ — відкрите дискретне відображення класу $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$, при-*

чому $f(D) = D'$. Крім того, припустимо, що $C(f, \partial D) \subset E_*$ для деякої замкненої (у топології $\mathbb{R}^n$) множини $E_* \subset \overline{D'}$, і $f^{-1}(E_*) = E$ для деякої замкненої (у топології D) підмножини $E \subset D$. Припустимо також, що виконуються наступні умови:

1) множина E є ніде не щільною в D , і D є скінченно зв'язною на $E \cup \partial D$, тобто для будь-якої точки $z_0 \in E \cup \partial D$ та будь-якого її околу $\tilde{U}$ знайдеться окіл $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ точки z_0 такий, що $(D \cap \tilde{V}) \setminus E$ складається зі скінченної кількості компонент;

2) для будь-якого $P \in E_D := \overline{D_P} \setminus D$ та кожного околу U кінця P у $\overline{D_P}$ знайдеться окіл $V \subset U$ кінця P у $\overline{D_P}$ такий, що перетин $V \cap D$ є зв'язним, а $(V \cap D) \setminus E$ складається не більше ніж з t компонент, $1 \leq t < \infty$;

3) всі компоненти множини $D' \setminus E_*$ мають сильно досяжну межу відносно α -модуля;

4) функція φ задовольняє умову Кальдерона:

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{\varphi(t)} \right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty;$$

5) внутрішнє розтягнення $K_{I,\alpha}(x, f) \leq Q(x)$ майже скрізь і, крім того, існують $M > 0$ та деяка зростаюча опукла функція $\Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такі, що

$$\int_D \Phi(Q(x)) \cdot \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M$$

причому

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \infty$$

для деякого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$.

Тоді f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D_P} \rightarrow \overline{D'}$, і більше того, $\bar{f}(\overline{D_P}) = \overline{D'}$ ([12]).

Теорема 1.4. Висновок теореми 1.3 залишається справедливим, якщо замість умови 5) виконується одна з наступних умов: 5.1) функція Q має скінченне середнє коливання в кожній точці $b \in \partial D$; 5.2)

$q_b(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \rightarrow 0$ для кожної точки $b \in \partial D$; 5.3) умова

$$\int_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_b'^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty$$

виконується для кожної точки $b \in \partial D$ та деякого $\delta(b) > 0$. Тоді f має неперервне продовження $\bar{f}: \overline{D}_P \rightarrow \overline{D}'$, і більше того, $\bar{f}(\overline{D}_P) = \overline{D}'$ (див., напр., [12]).

У [7] також встановлено умови локального неперервного продовження таких відображень в конкретну межову точку.

Теорема 1.5. Нехай $\alpha \geq 1$, D і D' — обмежені області в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $b \in \partial D$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція і нехай $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — зростаюча функція. Нехай $f: D \rightarrow D'$ — обмежене відкрите дискретне відображення класу $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$, $f(D) = D'$. Припустимо, що $C(f, \partial D) \subset E_*$ для деякої замкненої (відносно D') множини $E_* \subset D'$ і $f^{-1}(E_*) = E$ для деякої замкненої (відносно D) множини $E \subset D$. Припустимо також, що виконуються умови 1), 3) та 4) теореми 1.3, а умова 2) замінюється на наступну: 2) для будь-якого околу U точки b знайдеться окіл $V \subset U$ точки b такий, що: 2a) $V \cap D$ є зв'язним; 2б) $(V \cap D) \setminus E$ складається не більше ніж з t компонент, $1 \leq t < \infty$.

Припустимо, що $K_{I,\alpha}(x, f) \leq Q(x)$ майже скрізь і виконується хоча б одна з умов 5.1)–5.3) теореми 1.4 у точці b . Тоді f має неперервне продовження в точку b (див. [7]).

Теорема 1.6. Для плоского випадку $n = 2$ висновок теореми 1.5 залишається справедливим для обмежених відкритих дискретних відображень класу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ за додаткової умови $Q \in L_{\text{loc}}^1(D)$. При цьому зберігаються топологічні умови 1)–3), оцінка $K_{I,\alpha}(x, f) \leq Q(x)$ майже скрізь та одна з умов 5.1)–5.3) у точці b при $n = 2$; умова Кальдерона 4) не вимагається (див., напр., [7]).

Окремим важливим напрямком проекту є дослідження одностайної неперервності (equicontinuity) сімей таких відображень (див., напр., [7]).

Нехай $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\alpha \geq 1$, E_* та F — замкнені множини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — область, E — замкнена (відносно D) множина в D , $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — зростаюча функція, а $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна функція. Позначимо через $\mathfrak{R}_{E_*, E, F, N}^{\varphi, Q, \delta, \alpha}(D)$ сім'ю всіх обмежених відкритих дискретних відображень $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus F$ таких, що $K_{I, \alpha}(x, f) \leq Q(x)$ майже скрізь, $N(f, D) \leq N$ і, крім того: 1) $C(f, \partial D) \subset E_*$; 2) для кожної компоненти K множини $D'_f \setminus E_*$, де $D'_f := f(D)$, існує континуум $K_f \subset K$ такий, що $h(K_f) \geq \delta$ і $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$; 3) $f^{-1}(E_*) = E$.

Теорема 1.7. *Нехай $\alpha \in (n - 1, n]$, D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Припустимо, що: 1) множина E є ніде не щільною в D , і D є скінченно зв'язною на $E \cup \partial D$; 2) для будь-якого $x_0 \in \partial D$ існує $m = m(x_0) \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ такий, що $V \cap D$ є зв'язним, а $(V \cap D) \setminus E$ складається не більше ніж з m компонент.*

Нехай для $\alpha = n$ множина F має додатну ємність (capacity), а для $n - 1 < \alpha < n$ є довільною замкненою множиною. Припустимо, що функція φ задовольняє умову Кальдерона, а для функції Q в кожній точці $x_0 \in \overline{D}$ виконується хоча б одна з умов 5.1)–5.3).

Якщо сім'я всіх компонент $D'_f \setminus E_*$ є одностайно рівномірною (equi-uniform) по всіх $f \in \mathfrak{R}_{E_*, E, F, N}^{\varphi, Q, \delta, \alpha}(D)$ відносно α -модуля, то кожне відображення $f \in \mathfrak{R}_{E_*, E, F, N}^{\varphi, Q, \delta, \alpha}(D)$ має неперервне продовження на ∂D , і розширена сім'я $\mathfrak{R}_{E_*, E, F, N}^{\varphi, Q, \delta, \alpha}(D)$ є одностайно неперервною (equicontinuous) в $\overline{D}$ відносно хордальної метрики h (див., напр., [7]).

1.4 Приклади та їх детальне обґрунтування

У цьому підрозділі ми розглянемо два модельні приклади. Їхня головна мета — допомогти читачеві перейти від складних та абстрактних інтегральних умов нових теорем до зрозумілих класичних випадків. Ми детально розберемо, як нові критерії (умова Кальдерона та умова розбіжності інтеграла) застосовуються на практиці, і покажемо, що вони є природними узагальненнями вже відомих фактів з геометричної теорії функцій.

Приклад 1. З'ясувати, при яких значеннях параметра $p \geq 1$ фун-

кція $\varphi(t) = t^p$ задовольняє умову Кальдерона (умову 4 з теореми 1.3) у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Розв’язання та аналіз. У класичному математичному аналізі гладкість відображень зазвичай оцінюється за допомогою степеневих функцій, що приводить до класичних просторів Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$. Проте, згідно з Означенням 1.5, класи Орлича-Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$ є значно ширшими, оскільки замість жорсткого степеня t^p у них використовується довільна вимірна зростаюча функція $\varphi(t)$. При цьому, як зазначено в самому означенні, класичний простір Соболева є частинним випадком простору Орлича-Соболева: при $\varphi(t) = t^p$ маємо $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$.

Для загальних класів Орлича-Соболева головною умовою можливості неперервного продовження відображення на межу є складна інтегральна умова Кальдерона. Перевіримо, як ця абстрактна умова працює на звичайних степенях.

Згідно з Теоремою 1.3, умова Кальдерона має вигляд:

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{\varphi(t)} \right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty.$$

Підставимо нашу базову функцію $\varphi(t) = t^p$:

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{t^p} \right)^{\frac{1}{n-2}} dt = \int_1^\infty (t^{1-p})^{\frac{1}{n-2}} dt = \int_1^\infty t^{\frac{1-p}{n-2}} dt.$$

Зі стандартного курсу математичного аналізу відомо, що невласний інтеграл $\int_1^\infty t^\gamma dt$ збігається тоді і тільки тоді, коли показник степеня $\gamma < -1$. Отже, для збіжності нашого інтеграла необхідно і достатньо розв’язати нерівність:

$$\frac{1-p}{n-2} < -1.$$

Оскільки розглядаються простори розмірності $n \geq 3$, знаменник $n-2$ є додатним. Помножимо обидві частини на $n-2$:

$$1-p < -(n-2) \implies 1-p < -n+2 \implies p > n-1.$$

Висновок до прикладу 1. Умова Кальдерона для функції $\varphi(t) = t^p$ зводиться до простого обмеження $p > n-1$. Цей приклад наочно демонструє, що нова загальна умова Кальдерона ідеально узгоджується з

класичною теорією просторів Соболева. Він пояснює, звідки в класичних теоремах геометричної теорії функцій береться вимога $p > n - 1$ — вона є прямим математичним наслідком умови Кальдерона для простого випадку $\varphi(t) = t^p$.

Приклад 2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ - обмежена область, $b \in \partial D$. Припустимо, що в околі межевої точки b мажоранта внутрішнього розтягнення відображення $Q(x)$ має логарифмічну особливість: $Q(x) = \left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{n-1}$ при $0 < |x-b| < \delta < 1/e$. Для сферичного усереднення задаємо Q цією ж формулою в усьому проколотому околі b , зокрема поза D . Перевірити, чи виконується для такої функції $Q(x)$ інтегральна умова розбіжності 5.3 з теореми 1.4 при $\alpha = n$.

Розв’язання та аналіз. Функція $Q(x)$ (мажоранта внутрішнього розтягнення відображення) показує, наскільки сильно відображення «деформує» простір у кожній точці. У класичній теорії (для квазіконформних відображень) ця деформація є обмеженою. Проте теореми нашого проекту дозволяють функції $Q(x)$ бути необмеженою та прямувати до нескінченності при наближенні до межі.

Головне питання: наскільки швидко $Q(x)$ може зростати до нескінченності, щоб відображення все ще можна було неперервно продовжити? Вигляд функції $Q(x) = \left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{n-1}$ обрано не випадково. Згідно з Теоремою 1.4 (умова 5.2), за виконання решти гіпотез теореми продовження можливе, якщо середнє значення розтягнення має саме таку логарифмічну особливість. Автори стверджують, що з цієї умови автоматично випливає виконання інтегральної умови 5.3. Доведемо це аналітично.

Інтегральна умова 5.3 має вигляд:

$$\int_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty.$$

За умовою задачі $\alpha = n$, тому показник степеня спрощується: $\frac{n-1}{\alpha-1} =$

$\frac{n-1}{n-1} = 1$. Інтеграл набуває вигляду:

$$\int_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t \cdot q_b'^{\frac{1}{n-1}}(t)}.$$

Знайдемо середнє значення $q_b(r)$ функції $Q(x)$ на сфері $S(b, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - b| = r\}$.

Чому ми маємо шукати саме середнє значення по сфері?

Зверніть увагу на саму інтегральну умову 5.3. Підінтегральний вираз залежить не від самої n -вимірної просторової функції $Q(x)$, а саме від її усередненої версії $q_b'(t)$. Такий підхід є надзвичайно важливим у геометричній теорії функцій: щоб оцінити поведінку n -вимірного відображення поблизу межевої точки b , ми «нашаровуємо» простір навколо цієї точки концентричними сферичними кільцями. Мажоранта внутрішнього розтягнення $Q(x)$ може поводити себе дуже складно в різних напрямках. Однак, усереднення $Q(x)$ по сферах дозволяє згладити ці коливання і звести складну багатовимірну задачу до обчислення звичайного одновимірного інтеграла за радіусом r .

За Означенням 1.17, середнє значення обчислюється як інтеграл по сфері, поділений на площу цієї сфери. У нашому прикладі функція $Q(x) = \left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{n-1}$ залежить *лише* від відстані $|x - b|$ до точки b . Це означає, що на поверхні сфери радіуса r (де $|x - b| = r$) функція взагалі не змінюється - вона є сталою. Завдяки цій радіальній симетрії, інтеграл середнього значення від константи дорівнює самій цій константі:

$$\begin{aligned} q_b(r) &= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-b|=r} \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-b|=r} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

оскільки площа сфери якраз і дорівнює $\int_{|x-b|=r} d\mathcal{H}^{n-1} = \omega_{n-1} r^{n-1}$.

Що таке зрізана функція $q'_b(r)$ і навіщо вона потрібна? Згідно з Означенням 1.17, зрізана функція $Q'(x)$ будується за спеціальним правилом: ми залишаємо значення функції без змін, якщо воно більше або дорівнює 1, і примусово замінюємо його на 1, якщо воно менше 1. Після цього усереднюємо Q' по сфері й отримуємо q'_b ; загалом це не те саме, що зрізати вже обчислене середнє q_b . Для чого це робиться? Інтегральна умова 5.3 перевіряє, як швидко розтягнення прямує до нескінченності, коли ми наближаємося до межі. Нас цікавлять виключно великі значення деформації. Якщо ж в якихось точках $Q(x) < 1$, це може створити математичні проблеми під час оцінок модуля сімей кривих – наприклад, нулі в знаменнику. Штучно «зрізаючи» функцію знизу одиницею, ми гарантуємо, що знаменник завжди буде коректно визначеним ($q'_b(r) \geq 1$), при цьому в нашому прикладі не впливаючи на розбіжність інтеграла, оскільки в розглянутому околі $Q > 1$.

У нашому конкретному прикладі ми розглядаємо окіл точки b , де радіус $r < \delta < 1/e$. При таких малих радіусах дріб $\frac{1}{r} > e$, а отже натуральний логарифм $\log \frac{1}{r} > 1$. Тому обчислене нами середнє значення $q_b(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}$ є гарантовано строго більшим за 1. Завдяки цьому зрізання функції її не змінює:

$$q'_b(r) = q_b(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}.$$

Підставимо знайдене значення у знаменник підінтегрального виразу (щоб уникнути зайвих дужок, одразу застосуємо властивість степенів):

$$(q'_b(t))^{\frac{1}{n-1}} = \left[\left(\log \frac{1}{t}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n-1}} = \log \frac{1}{t}.$$

Отримуємо остаточний інтеграл:

$$\int_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t}}.$$

Зробимо заміну змінної: нехай $u = \log \frac{1}{t} = -\ln t$. Тоді $du = -\frac{1}{t}dt$. При $t \rightarrow 0$ маємо $u \rightarrow \infty$. При $t = \delta(b)$ маємо $u = -\ln \delta(b)$. Інтеграл перетво-

рюється на:

$$\int_{-\ln \delta(b)}^{\infty} \frac{du}{u} = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln u \Big|_{-\ln \delta(b)}^M = \infty.$$

Висновок до прикладу 2. Інтеграл розбігається. Цей приклад демонструє «межовий», критичний стан нових теорем. Він показує, що навіть якщо спотворення $Q(x)$ не є константою, а прямує до нескінченності на межі області як логарифм (тобто росте повільно), перевірочний інтеграл все одно розбігається до нескінченності, і, за виконання решти її гіпотез, теорема успішно спрацьовує. Це ілюструє механіку роботи інтегральних умов з теоретичного матеріалу для відображень, що не є квазіконформними.

1.5 Завдання для самоконтролю

1. **Класи Орлича-Соболева.** Чим принципово відрізняється загальний клас Орлича-Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$ від класичного простору Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$? Наведіть приклад функції $\varphi(t)$, яка звужує загальне означення до класичного випадку.
2. **Топологічні властивості відображень.** Дайте означення відкритого та дискретного відображення. Чому в новітніх дослідженнях геометричної теорії функцій розглядають саме такі відображення, а не обмежуються лише гомеоморфізмами?
3. **Прості кінці.** Поясніть концепцію «простого кінця» (prime end) області D . У яких випадках для дослідження межової поведінки відображень доцільно переходити від звичайної евклідової межі ∂D до простору простих кінців $\overline{D}_P$?
4. **Мажоранта внутрішнього розтягнення.** Як математично визначається внутрішнє розтягнення $K_{I,\alpha}(x, f)$ порядку $\alpha \geq 1$? Який геометричний зміст нерівності $K_{I,\alpha}(x, f) \leq Q(x)$, і що означає випадок, коли функція $Q(x)$ є необмеженою поблизу межі?
5. **Класичні результати.** Сформулюйте класичну теорему Каратеодорі для конформних відображень та її узагальнення, зроблене Р.

Няккі для квазіконформних відображень. У чому полягає строга відповідність між межовими точками та простими кінцями у цих теоремах?

6. **Властивість «незамкненості».** У нових теоремах проєкту (Теореми 1.3–1.6) розглядаються відображення, що не зберігають межу. Який аналітичний зміст несуть умови $C(f, \partial D) \subset E_*$ та $f^{-1}(E_*) = E$? Наведіть геометричну інтерпретацію цих множин.
7. **Умова Кальдерона.** Запишіть інтегральну умову Кальдерона для функції $\varphi(t)$. Яку роль ця умова відіграє в теорії просторів Орліча-Соболева при встановленні можливості неперервного продовження відображення?
8. **Умова скінченного середнього коливання.** Що означає запис $Q \in FMO(x_0)$ для мажоранти розтягнення у межовій точці? Чому вимога скінченного середнього коливання Q за виконання решти гіпотез теореми є достатньою для побудови неперервного продовження (згідно з умовою 5.1 теореми 1.4)?
9. **Умова розбіжності та зрізана функція.** Поясніть механіку роботи інтегральної умови розбіжності 5.3) з теореми 1.4. Як саме будується «зрізана» функція $Q'(x)$ і чому під час оцінки модуля сімей кривих ми усереднюємо її саме по сферах?
10. **Аналіз межової поведінки (за матеріалами прикладів).** Спираючись на розв'язані в підрозділі приклади, поясніть: як швидко мажоранта внутрішнього розтягнення $Q(x)$ може прямувати до нескінченності при наближенні до межової точки $b \in \partial D$, щоб за виконання решти гіпотез відповідної теореми відображення все ще гарантовано допускало неперервне продовження?

1.6 Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Для розмірності простору $n \geq 3$ та додатних констант p і k , значення яких задані в таблиці для кожного варіанта, знайти всі значення параметра $a > 0$, при яких функція $\varphi(t) = t^{p-a+k}$ задовольняє інте-

гральну умову Кальдерона (умова 4 теореми 1.3). Відповідь обґрунтувати шляхом аналітичного обчислення відповідного невластного інтеграла та розв'язання отриманої нерівності.

Таблиця 1. Параметри до Задачі 1

Варіант	n	p	k	Варіант	n	p	k
1	3	2	1	16	4	5	2
2	4	3	2	17	5	2	3
3	5	1	4	18	6	1	4
4	6	4	2	19	7	4	1
5	7	2	1	20	3	6	2
6	3	1	3	21	4	2	5
7	4	5	2	22	5	3	1
8	5	2	4	23	6	5	2
9	6	3	3	24	7	1	3
10	7	6	1	25	3	2	6
11	3	2	2	26	4	4	4
12	4	3	5	27	5	1	2
13	5	1	2	28	6	2	3
14	6	5	4	29	7	3	5
15	7	2	3	30	4	1	2

Задача 2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $b \in \partial D$. Для розмірності простору n та додатних констант p і k , значення яких задані в таблиці для кожного варіанта, знайти всі значення параметра $a > 0$, при яких мажоранта внутрішнього розтягнення відображення, задана у вигляді

$$Q(x) = p \left(\log \frac{1}{|x - b|} \right)^{a \cdot k},$$

задовольняє інтегральну умову розбіжності 5.3) з теореми 1.4 при $\alpha = n$ в околі точки b . Для сферичного усереднення задаємо Q наведеною формулою в усьому проколотому околі $0 < |x - b| < \delta < 1$. Відповідь обґрунтувати шляхом знаходження середнього значення функції на сфері,

виконання заміни змінної, обчислення відповідного невластного інтеграла та розв'язання отриманої нерівності.

Таблиця 2. Параметри до Задачі 2

Варіант	n	p	k	Варіант	n	p	k
1	3	2	1	16	4	5	2
2	4	3	2	17	5	2	3
3	5	1	4	18	6	1	4
4	6	4	2	19	7	4	1
5	7	2	1	20	3	6	2
6	3	1	3	21	4	2	5
7	4	5	2	22	5	3	1
8	5	2	4	23	6	5	2
9	6	3	3	24	7	1	3
10	7	6	1	25	3	2	6
11	3	2	2	26	4	4	4
12	4	3	5	27	5	1	2
13	5	1	2	28	6	2	3
14	6	5	4	29	7	3	5
15	7	2	3	30	4	1	2

2 Теорема Кебе-Блоха

2.1 Означення

Теорія просторових відображень, що задовольняють геометричні та аналітичні обмеження, є природним узагальненням геометричної теорії функцій комплексної змінної. Для розуміння сучасних просторових аналогів теорем Кебе та Блоха, наведемо класичні базові поняття та результати для аналітичних функцій (див., напр., [3]).

Означення 2.1. Функція $f(z)$, яка є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}$, називається **однолистою** в цій області, якщо вона набуває кожного свого значення лише один раз. Іншими словами, $f(z)$ є ін'єктивним відображенням: з того, що $f(z_1) = f(z_2)$ для $z_1, z_2 \in D$, обов'язково випливає, що $z_1 = z_2$.

Особливий інтерес становлять конформні (аналітичні однолисті) функції, що відображають одиничний круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для зручності досліджень їх зазвичай нормують у початку координат.

Означення 2.2. Клас S - це сім'я всіх функцій $f(z)$, які є аналітичними та однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D}$, і задовольняють так зване гідродинамічне нормування:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Будь-яка функція $f \in S$ розкладається в крузі $\mathbb{D}$ у збіжний степеневий ряд Тейлора вигляду:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

У цьому розділі ми також спираємося на базові поняття просторів Соболева та Орлича-Соболева, модулів сімей кривих та простих кінців, які вже були детальніше введені у першому розділі. Проте для дослідження розмірів образів просторових відображень та глобальної поведінки їх сімей (що є суттю аналогів теорем типу Кебе-Блоха) нам необхідно ввести низку нових метричних та топологічних інструментів.

Означення 2.3. Для оцінки розмірів множин у розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ найчастіше використовується хордальна (або сферична) метрика $h(x, y)$ (див., напр., [28]). Ця метрика визначається так:

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y,$$

та $h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}$. Відповідно, хордальний діаметр множини $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ визначається як $h(E) := \sup_{x, y \in E} h(x, y)$.

Означення 2.4. Нехай $p \geq 1$, D - область в $\mathbb{R}^n$, $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, а $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ - вимірна за Лебегом функція. Кажуть, що відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задовольняє обернену нерівність Полецького в точці y_0 відносно p -модуля (див., напр., [24]), якщо існує $r_0 > 0$ таке, що для будь-якого сферичного кільця $A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n: r_1 < |y - y_0| < r_2\}$ з $0 < r_1 < r_2 < r_0$ та будь-якої вимірної функції $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, що задовольняє умову $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$, виконується оцінка:

$$M_p(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{f(D) \cap A(y_0, r_1, r_2)} Q(y) \cdot \eta^p(|y - y_0|) dm(y),$$

де Γ_f — сім'я кривих у D , образи яких належать $\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$, тобто з'єднують сфери всередині кільця. Умову в точці ∞ розуміють за допомогою інверсії $\psi(y) = y/|y|^2$, як у [9, 26].

Означення 2.5. Для відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, множини $E \subset D$ та точки $y \in \mathbb{R}^n$ функція кратності (multiplicity function) $N(y, f, E)$ визначається як кількість прообразів точки y у множині E (див. [21]), тобто,

$$N(y, f, E) = \text{card}\{x \in E: f(x) = y\}.$$

Максимальна кратність відображення f на множині E позначається як

$$N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Означення 2.6. Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дискретне відкрите відображення, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — крива, і $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Крива $\alpha: [a, c] \rightarrow D$

називається максимальним f -підняттям (maximal f -lifting) кривої β з початком у точці x (див., напр., [14]), якщо виконуються три умови: 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c]}$; 3) для будь-якого $c < c' \leq b$ не існує кривої $\alpha': [a, c'] \rightarrow D$ такого, що $\alpha = \alpha'|_{[a,c]}$ та $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c']}$.

Означення 2.7. Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, називається рівномірною областю (uniform domain) відносно p -модуля, $p \geq 1$, якщо для кожного $r > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $M_p(\Gamma(F, F^*, D)) \geq \delta$ для будь-яких континуумів F та F^* у D , хордальні діаметри яких задовольняють умови $h(F) \geq r$ та $h(F^*) \geq r$ (див., напр., [6]). Сім'я областей D_i , $i \in I$, називається *одно-стайно рівномірною* (equi-uniform), якщо зазначена умова виконується для кожної області D_i зі спільною константою δ .

Означення 2.8. Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f: X \rightarrow X'$ між метричними просторами (X, d) та (X', d') називається одностайно неперервною (або одностайно неперервною, equicontinuous) в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх x , що задовольняють умову $d(x, x_0) < \delta$, і для всіх відображень $f \in \mathfrak{F}$ одночасно. Сім'я $\mathfrak{F}$ називається нормальною, якщо з будь-якої послідовності відображень $f_m \in \mathfrak{F}$ можна виділити підпослідовність, що збігається локально рівномірно в X (див., напр., [28]). Згідно з теоремою Арцела-Асколі, для сім'ї неперервних відображень компактного метричного простору X у компактний метричний простір X' ці два поняття є еквівалентними.

2.2 Класичні результати

Вивчення властивостей функцій класу S та загальних аналітичних функцій привело до появи фундаментальних теорем, які оцінюють розміри образів областей при таких відображеннях (див., напр., [3]).

Теорема Кебе для аналітичних функцій містить у собі твердження про те, що конформні відображення одиничного круга з нормуванням у початку координат обов'язково покривають круг фіксованого радіуса.

Теорема Кебе (про 1/4). Нехай $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ – однолиста аналітична функція така, що $f(0) = 0$ та $f'(0) = 1$. Тоді образ f по-

криває відкритий круг із центром у 0 радіуса одна четверта, тобто $f(\mathbb{D}) \supset B(0, 1/4)$. Точність цієї константи досягається на функції Кебе $f(z) = z/(1 - z)^2$.

Якщо відмовитися від глобальної однолистості функції в усьому крузі $\mathbb{D}$ і вимагати лише аналітичність та нормування похідної в нулі, ми приходимо до теореми Блоха (див., напр., [3]).

Теорема Блоха. *Нехай $f(z)$ - аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D}$, причому $f'(0) = 1$. Тоді існує абсолютна константа $B > 0$ (стала Блоха), така що в крузі $\mathbb{D}$ знайдеться підобласть, яка відображається функцією $f(z)$ однолисто на деякий круг радіуса B .*

Близькою за змістом є теорема Ландау (див., напр., [3]). У цій теоремі розглядаються загальні аналітичні функції, але, на відміну від теореми Блоха, тут не вимагається, щоб знайдений круг був саме *однолистим* образом підобласті (допускається, що функція може покривати цей круг кілька разів).

Теорема Ландау. *Нехай $f(z)$ - аналітична функція в крузі $\mathbb{D}$, така що $f(0) = 0$ та $f'(0) = 1$. Тоді існує абсолютна константа $L > 0$ (стала Ландау), така що образ $f(\mathbb{D})$ містить у собі круг радіуса L .*

Ці класичні результати показують, що поведінка похідної (а отже і розтягнення відображення) в одній точці жорстко контролює геометрію та розміри образу цілої області.

У наступних підрозділах ми покажемо, як ці ідеї переносяться на значно складніші об'єкти - відображення простору $\mathbb{R}^n$, що задовольняють обернену нерівність Полецького.

2.3 Результати проєкту

У цьому підрозділі ми детально висвітлимо основні результати, отримані в ході виконання проєкту, які узагальнюють класичну теорему Кебе на випадок просторових відображень, відображень на метричних просторах, а також встановлюють важливі наслідки щодо поведінки граничних відображень. Усі наведені нижче результати базуються на працях (див.,

напр., [9, 18, 26, 27]).

2.3.1 Проблематика та базові поняття

Як відомо з підрозділу 2.2, класична теорема Кебе про $1/4$ використовує жорстке нормування похідної в нулі: $f'(0) = 1$. Для узагальнених просторових відображень, зокрема відображень зі скінченним спотворенням, класів Соболева та Орлича-Соболева, вимагати існування та фіксацію похідної в точці не завжди можливо, оскільки такі відображення можуть бути диференційовними лише майже скрізь.

Тому в сучасній геометричній теорії функцій локальне нормування похідної замінюється *глобальною топологічною умовою*. Найчастіше вимагається, щоб діаметри образів деяких фіксованих множин (наприклад, континуумів) були відділені від нуля деякою фіксованою константою. Для вимірювання відстаней у розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ зручно використовувати хордальну (сферичну) метрику $h(x, y)$, а для оцінки розмірів множин - хордальний діаметр $h(E)$.

Головним інструментом дослідження розмірів образів відображень виступає **обернена нерівність Полецького** (inverse Poletsky inequality). Нагадаємо, що відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задовольняє обернену нерівність Полецького в точці $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$ відносно p -модуля сімей шляхів з мажорантою Q , якщо для будь-якого сферичного кільця $A(y_0, r_1, r_2)$ та будь-якої допустимої функції η виконується оцінка:

$$M_p(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^p(|y - y_0|) dm(y),$$

де $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ — сім'я кривих у D , образи яких з'єднують відповідні сфери всередині кільця $A(y_0, r_1, r_2)$.

2.3.2 Аналог теореми Кебе в $\mathbb{R}^n$ за інтегровності мажоранти

Перший фундаментальний результат проекту узагальнює теорему Кебе для відкритих дискретних відображень, мажоранта яких є інтегровою функцією на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє додаткові умови, наведені нижче (див., напр., [26]).

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Позначимо через $\mathfrak{F}_{Q,\delta}^E(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, які задовольняють обернену нерівність Полецького відносно n -модуля з мажорантою Q у кожній точці $\overline{\mathbb{R}^n}$, і для яких зафіксовано спільний континуум $E \subset D$ такий, що виконується умова нормування:

$$h(f(E)) \geq \delta > 0,$$

де δ – фіксована стала, спільна для всієї сім'ї.

Теорема 2.1 (Аналог теореми Кебе для $Q \in L^1$). *Припустимо, що $Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ і, крім того, або $Q \in FMO(\overline{\mathbb{R}^n})$, або для кожної точки $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ існує $\delta(y_0) > 0$ таке, що*

$$\int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Тут $q_{y_0}(t)$ – середнє значення Q на сфері $S(y_0, t)$; умови в ∞ означають відповідні умови в нулі для $\tilde{Q}(y) = Q(y/|y|^2)$. Тоді для заданої кулі $B(x_0, \varepsilon_1) \subset D$ існує радіус $r_0 > 0$, який не залежить від конкретного відображення $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta}^E(D)$, такий що

$$B(f(x_0), r_0) \subset f(B(x_0, \varepsilon_1))$$

для всіх $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta}^E(D)$.

Цей результат (див., напр., [26]) геометрично означає, що образ будь-якої кулі фіксованого радіуса при відображеннях даного класу обов'язково містить у собі (в евклідовій метриці) кулю, радіус якої r_0 є однаковим для всього класу відображень. Це є прямим, строгим просторовим узагальненням класичної властивості «покриття кулі радіуса $1/4$ ».

2.3.3 Аналог теореми Кебе за інтегральних обмежень на мажоранту

Спільну мажоранту Q можна замінити мажорантами Q_f , що залежать від відображення, за відповідних інтегральних умов і нормування. У геометричній теорії функцій часто використовують так звані інтегральні обмеження, коли мажоранта контролюється за допомогою певної зростаючої опуклої функції $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$.

Нехай $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,\Phi}^{a,b}(D)$ - сім'я відкритих дискретних відображень, які задовольняють обернену нерівність Полецького відносно p -модуля з мажорантою Q , що залежить від відображення ($Q = Q_f$), у кожній точці $\overline{\mathbb{R}^n}$, і для якої виконується інтегральне обмеження:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Q_f(y)) \frac{dm(y)}{(1 + |y|^2)^n} < \infty.$$

Для фіксованих $a, b \in D$, $a \neq b$, вимагається виконання умови нормування $h(f(a), f(b)) \geq \delta > 0$.

Теорема 2.2 (Теорема Кебе з інтегральними обмеженнями).

Нехай $n - 1 < p \leq n$. Припустимо, що функція Φ задовольняє умову розбіжності:

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p-1}}} = \infty$$

для деякого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$. Припустимо також, що сім'я $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,\Phi}^{a,b}(D)$ одностайно неперервна в a і b . Тоді для будь-якого компакта $K \subset D$ та числа $0 < \varepsilon_1 < \text{dist}(K, \partial D)$ існує радіус $r_0 > 0$, який не залежить від f , такий що

$$B_h(f(x_0), r_0) \subset f(B(x_0, \varepsilon_1))$$

для всіх $x_0 \in K$ та всіх $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,\Phi}^{a,b}(D)$.

Цей результат, отриманий у [9], показує, що навіть якщо мажоранта Q_f має сильні локальні особливості, глобального контролю через опуклу функцію Φ з умовою розбіжності інтеграла, за виконання решти гіпотез теореми 2.2, достатньо для того, щоб відображення зберігало властивість покриття фіксованої кулі.

2.3.4 Властивість відкритості граничного відображення

Одним із найважливіших застосувань аналога теореми Кебе є вивчення топологічних властивостей границь послідовностей відображень. Відомо (з класичних теорем Гурвіца для аналітичних функцій), що границя локально рівномірно збіжної послідовності однолистих функцій є або однолистою функцією, або константою.

Для просторових відображень ситуація значно складніша: границя послідовності відкритих дискретних відображень, взагалі кажучи, може втрачати ці властивості (наприклад, вироджуватися, «сплющуючи» простір у відрізок чи поверхню меншої розмірності). Однак, завдяки наявності фіксованої кулі в образі (що гарантується аналогом теореми Кебе), граничне відображення зберігає властивість відкритості (див., напр., [26]).

Теорема 2.3 (Відкритість та легкість граничного відображення). *Нехай сім'я $\mathfrak{F}_{Q,\delta}^E(D)$ визначена як у теоремі 2.1 (з усіма зазначеними там умовами на Q). Якщо послідовність відображень $f_m \in \mathfrak{F}_{Q,\delta}^E(D)$, $m = 1, 2, \dots$, збігається локально рівномірно в області D до деякого відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, то граничне відображення f також є відкритим і легким.*

Легким називається відображення, кожен шар якого є цілком незв'язним. Стала границя виключається умовою $h(f_m(E)) \geq \delta > 0$ на фіксованому континуумі E .

Схема доведення (ідея): Припустимо супротивне, тобто що f не є відкритим. Оскільки f є границею локально рівномірно збіжної послідовності, порушення відкритості означало б, що існує точка $x_0 \in D$ та її окіл, образ якого при відображенні f не містить жодного околу точки $f(x_0)$. Проте за Теоремою 2.1 для кожного відображення f_m образ $f_m(B(x_0, \varepsilon_1))$ гарантовано містить евклідову кулю $B(f_m(x_0), r_0)$ з фіксованим радіусом $r_0 > 0$. Вибираємо кулю із замиканням у початковому околі x_0 . Компактність цього замикання дозволяє перейти до збіжної підпослідовності прообразів кожної точки достатньо малої кулі навколо $f(x_0)$; локально рівномірна збіжність дає прообраз при f . Граничний перехід з урахуванням цієї «геометричної підпірки» (наявності кулі радіуса r_0) забезпечує, що образ початкового околу містить окіл $f(x_0)$, що доводить відкритість f . Легкість встановлюється окремо за допомогою оцінок модуля (див., напр., [26]).

2.3.5 Узагальнення на метричні простори та ріманові многовиди

У ході виконання проєкту результати щодо аналогів теореми Кебе були глибоко поширені на випадок абстрактних метричних просторів (див., напр., [27]). Такий підхід дозволяє застосовувати теорію до неевклідових об'єктів, зокрема до ріманових поверхонь та фактор-просторів за групами Мобіуса.

Нехай (X, d, μ) та (X', d', μ') – метричні простори з мірами, що задовольняють умови регулярності. Основний акцент робиться на просторах Левнера (Loewner spaces) та регулярних за Альфорсом просторах, у яких справедлива нерівність Пуанкаре. Саме в таких просторах модуль сімей кривих та діаметр множини жорстко пов'язані метрично.

Теорема 2.4 (Аналог теореми Кебе у метричних просторах).

Нехай D – область у просторі X , яка є локально зв'язним і локально компактним α -простором Левнера розмірності Хаусдорфа $\alpha \geq 2$. Нехай $D' \subset X'$ має компактне замикання та принаймні дві різні межові точки і задовольняє умову A: дві пари різних точок $a, c \in D'$ і $b, d \in \overline{D}'$ можна з'єднати неперетинними шляхами в $\overline{D}'$, які, крім кінцевих точок, лежать у D' . Припустимо, що X' – локально шляхово зв'язний, локально компактний, верхньо α' -регулярний простір розмірності Хаусдорфа $\alpha' \geq 2$ і для деякої сталої $\gamma > 0$, кожного $z_0 \in X'$ та всіх достатньо малих $r > 0$ виконується

$$\mu'(B'(z_0, 2r)) \leq \gamma \log^{\alpha'-2}(1/r) \mu'(B'(z_0, r)).$$

Нехай сім'я відображень $\mathfrak{F}$ складається з відкритих дискретних відображень $f: D \rightarrow D'$, які задовольняють обернену нерівність Полецького у кожній точці X' з мажорантою $Q: X' \rightarrow [0, \infty]$, $Q \in FMO(\overline{D}')$ та умову нормування діаметра $d'(f(E)) \geq \delta > 0$ для фіксованого континууму $E \subset D$. Тоді для будь-якої кулі $\overline{B(x_0, \varepsilon_1)} \subset D$ існує радіус $r_0 > 0$, який не залежить від f , такий що $B'(f(x_0), r_0) \subset f(B(x_0, \varepsilon_1))$ для всіх $f \in \mathfrak{F}$.

За виконання зазначених метричних гіпотез цей результат генерує наслідки для класів Соболева та Орліча-Соболева, визначених у пев-

ній області ріманової поверхні або фактор-простору, утвореного групою дробово- лінійних відображень одиничної кулі (див., напр., [27]).

2.3.6 Застосування до класів Орлича-Соболева та кільцевих гомеоморфізмів

Вказані вище абстрактні результати (теореми 2.1-2.3) за відповідних додаткових умов мають застосування до класів Орлича-Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ та кільцевих Q -гомеоморфізмів (див., напр., [9, 18]).

У класичній теорії доведено, що гомеоморфізми f , для яких f і f^{-1} належать відповідним класам $W_{\text{loc}}^{1,n}$, задовольняють обернену нерівність Полецького, де в якості мажоранти Q виступає внутрішня дилатація $K_I(y, f^{-1})$. У [18] цей зв'язок поширено на ширші класи відображень.

Теорема 2.5 (Застосування до кільцевих гомеоморфізмів). *Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гомеоморфізм, $n \geq 3$, $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$. Припустимо, що функція φ задовольняє умову Кальдерона*

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{\varphi(t)} \right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty,$$

а зовнішня дилатація відображення локально інтегровна в степені $n-1$: $K_O(x, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$. Тоді обернене відображення $g = f^{-1}$ належить до простору $W_{\text{loc}}^{1,n}(f(D))$ і, за додаткової умови $K_I(\cdot, g) \in L_{\text{loc}}^1(f(D))$, є кільцевим Q^ -гомеоморфізмом з мажорантою $Q^* = K_I(y, g)$. Для застосування аналога теореми Кебе з [18] потрібно також перевірити умови цієї праці на область, мажоранту і нормування $h(f(K), \partial f(D)) \geq \delta > 0$; для обернених відображень ці умови перевіряють окремо.*

Цей блок завершує архітектуру досліджень проєкту: від абстрактних відображень з оберненою нерівністю Полецького до метричних просторів і, зрештою, до конкретних диференціально-аналітичних класів Орлича-Соболева, для яких наведено достатні умови збереження класичних геометричних властивостей (умова Кальдерона, умови на мажоранту та нормування сім'ї).

2.4 Приклади та їх детальне обґрунтування

У цьому підрозділі ми розглянемо два модельні приклади, які демонструють важливість умов у доведених аналогах теореми Кебе. Перший приклад показує, чому неможливо відмовитися від глобального топологічного нормування $h(f(E)) \geq \delta$. Другий приклад ілюструє геометричний зміст радіальної інтегральної умови на базі радіальних відображень.

Приклад 1. (Необхідність топологічного нормування). Нехай $D = B(0, 1)$ — одинична куля в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Розглянемо сім'ю відображень $f_m: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданих формулою $f_m(x) = \frac{1}{m}x$, $m = 1, 2, \dots$. Показати, що ця сім'я задовольняє обернену нерівність Полецького відносно n -модуля з мажорантою $Q(y) = \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)$, але для неї не виконується твердження просторового аналога теореми Кебе (теореми 2.1). Пояснити, яка саме умова теореми була порушена.

Розв'язання та аналіз. Відображення $f_m(x) = x/m$ є звичайними гомотетіями (стисненням у m разів). Оскільки гомотетія зберігає кути, кожне відображення f_m є конформним. Як відомо (див., наприклад, [28, теорема 8.1]), конформні відображення задовольняють обернену нерівність Полецького відносно n -модуля з мажорантою $Q(x) \equiv 1$. Очевидно, що стала функція $Q(x) \equiv 1$ є локально інтегровною ($Q \in L^1_{\text{loc}}$). Для глобальної умови теореми 2.1 беремо $Q(y) = \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)$: усі образи $f_m(D)$ містяться в цій кулі, тому нерівність зберігається. Така спільна мажоранта інтегровна на $\mathbb{R}^n$ і, як обмежена функція, задовольняє умову ФМО, включно з умовою в нескінченності через інверсію.

Перевіримо виконання висновку теореми 2.1. Візьмемо компакт $K = \{0\} \subset D$ та фіксований радіус $\varepsilon_1 = 1/2$. Знайдемо образ кулі $B(0, 1/2)$ при відображенні f_m . Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B(0, 1/2)$, тобто $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < 1/2$.

За означенням відображення f_m , кожна координата образу $y = f_m(x)$ може бути отримана шляхом ділення відповідної координати вектора x на m , тобто $y = (\frac{x_1}{m}, \frac{x_2}{m}, \dots, \frac{x_n}{m})$. Обчислимо евклідову норму вектора y :

$$|y| = \sqrt{\left(\frac{x_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{m}\right)^2} = \frac{1}{m} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{1}{m} |x|.$$

Оскільки за вибором кулі $|x| < 1/2$, то для норми образу отримуємо

строгу оцінку:

$$|y| = \frac{1}{m}|x| < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2m}.$$

З іншого боку, кожна точка y з такою нормою має прообраз $x = my$, який лежить у $B(0, 1/2)$. Отже, образом є евклідова куля:

$$f_m(B(0, 1/2)) = B\left(0, \frac{1}{2m}\right).$$

Згідно з аналогом теореми Кебе, мав би існувати спільний для всієї сім'ї радіус $r_0 > 0$ в евклідовій метриці такий, що $B(0, r_0) \subset f_m(B(0, 1/2))$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Обчислимо хордальний радіус отриманого образу. Згідно з означенням хордальної метрики, відстань від початку координат до довільної точки y обчислюється як $h(y, 0) = \frac{|y|}{\sqrt{1+|y|^2}}$. Супремум хордальних відстаней від нуля до точок кулі $B(0, \frac{1}{2m})$ дорівнює відстані до її межі, тобто значенню при $|y| = \frac{1}{2m}$:

$$r_m^{(h)} = \sup_{|y| < \frac{1}{2m}} h(y, 0) = \frac{\frac{1}{2m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2m}}{\frac{\sqrt{4m^2+1}}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{4m^2+1}}.$$

Оскільки хордальний радіус образу $r_m^{(h)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, жодного спільного (фіксованого) радіуса $r_0 > 0$, який би вмістився в усі ці образи одночасно, **не існує**.

Чому теорема «зламалася»? Перевіримо умову нормування. За умовою теореми 2.1 має існувати фіксований континуум $E \subset D$, для якого $h(f_m(E)) \geq \delta > 0$. Візьмемо, наприклад, радіальний відрізок $E = [0, 1/2]$ (на осі x_1). Його образ при відображенні f_m — це відрізок $f_m(E) = [0, \frac{1}{2m}]$. Хордальний діаметр цього образу дорівнює відстані між його кінцями:

$$h(f_m(E)) = h\left(0, \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{\sqrt{4m^2+1}}.$$

Очевидно, що $\lim_{m \rightarrow \infty} h(f_m(E)) = 0$. Це означає, що відділити діаметр образу від нуля фіксованою сталою $\delta > 0$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ неможливо. Аналогічний висновок (про стягування хордального діаметра до нуля) справедливий для будь-якого іншого фіксованого континууму $E \subset B(0, 1)$.

Висновок до прикладу 1. Відсутність глобального нормування $h(f_m(E)) \geq \delta > 0$ призводить до того, що сім'я відображень неконтрольовано «стискає» простір у точку. У такому разі гарантувати існування покриття кулі фіксованого радіуса $r_0 > 0$ неможливо. Топологічне нормування є критично необхідним для просторових аналогів теореми Кебе-Блоха.

Приклад 2. (Радіальне відображення та інтегральна умова). Нехай задано вимірну функцію $Q: \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$, $n \geq 3$. Позначимо через $q_0(r)$ її середнє інтегральне значення на сфері $S(0, r)$. Припустимо, що $q_0(r) < \infty$ майже скрізь на $(0, 1)$. Розглянемо радіальне відображення $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задане формулою:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|), \quad \text{де} \quad \rho(r) = \exp \left\{ - \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}.$$

Показати, що $K_I(x, f) = q_0(|x|)$ майже скрізь. З'ясувати геометричний зміст розбіжності інтеграла $\int_0^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty$ для можливості неперервного продовження в нуль.

Розв'язання та аналіз. Знайдемо дилатації даного радіального відображення. Функція ρ локально абсолютно неперервна на $(0, 1)$; наведені нижче рівності з похідними виконуються майже скрізь. Тангенціальний (дотичний) розтяг δ_τ та радіальний розтяг δ_r обчислюються за формулами:

$$\delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\rho(|x|)}{|x|}, \quad \delta_r(x) = \rho'(|x|).$$

Обчислимо похідну $\rho'(r)$. Оскільки функція $\rho(r)$ є складеною (це експонента, аргументом якої є інтеграл зі змінною нижньою межею), застосуємо правило диференціювання $(e^{u(r)})' = e^{u(r)} \cdot u'(r)$. За основною теоремою математичного аналізу похідна інтеграла за нижньою межею дорівнює підінтегральній функції зі знаком мінус, тобто

$$\frac{d}{dr} \left(- \int_r^1 g(t) dt \right) = g(r).$$

Тому маємо:

$$\delta_r(x) = \rho'(|x|) = \underbrace{\exp \left\{ - \int_{|x|}^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}}_{\text{це сама функція } \rho(|x|)} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x| q_0^{1/(n-1)}(|x|)}}_{\text{похідна показника}}.$$

Згортаючи експоненту назад у $\rho(|x|)$, отримуємо:

$$\delta_r(x) = \rho(|x|) \cdot \frac{1}{|x| q_0^{1/(n-1)}(|x|)} = \left(\frac{\rho(|x|)}{|x|} \right) \cdot \frac{1}{q_0^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Враховуючи, що вираз у великих дужках - це точнісінько наш тангенціальний розтяг $\delta_\tau(x)$, остаточно отримуємо:

$$\delta_r(x) = \frac{\delta_\tau(x)}{q_0^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Оскільки за умовою $Q(x) \geq 1$, то й $q_0(|x|) \geq 1$. Звідси випливає, що $\delta_\tau(x) \geq \delta_r(x)$. Тому мінімальний розтяг $l(f'(x)) = \delta_r(x)$, а якобіан $|J(x, f)| = \delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)$. Обчислимо внутрішню дилатацію $K_I(x, f)$:

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l^n(f'(x))} = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = \left(\frac{\delta_\tau(x)}{\delta_r(x)} \right)^{n-1}.$$

Підставляючи знайдене раніше співвідношення $\delta_\tau(x)/\delta_r(x) = q_0^{1/(n-1)}(|x|)$, маємо:

$$K_I(x, f) = \left(q_0^{1/(n-1)}(|x|) \right)^{n-1} = q_0(|x|).$$

Отже, відображення дійсно має внутрішню дилатацію $q_0(|x|)$ майже скрізь.

Тепер проаналізуємо образ та можливість неперервного продовження в нуль. Шукаємо образ проколотої кулі $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Радіальне відображення переводить її у сферичне кільце $A(0, \rho(0), \rho(1))$. Очевидно, $\rho(1) = \exp\{0\} = 1$. А от внутрішній радіус образу залежить від інтеграла:

$$\rho(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \exp \left\{ - \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}.$$

Випадок А (радіальний інтеграл розбігається): Якщо $\int_0^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty$, то $\rho(0) = \exp\{-\infty\} = 0$. У цьому разі образ проколотої кулі «дотягується» до початку координат. Відображення можна неперервно продовжити в нуль, поклавши $f(0) = 0$. Образом всієї кулі $\mathbb{B}^n$ буде суцільна куля $B(0, 1)$, яка містить $B(0, r_0)$ для $0 < r_0 \leq 1$. Цей висновок стосується продовженого відображення; образ проколотої кулі сам по собі нуля не містить.

Випадок Б (умова порушена): Якщо інтеграл збігається, $\int_0^1 \dots dt = M < \infty$, то $\rho(0) = e^{-M} > 0$. Образом проколотої кулі $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ стає кільце $A(0, e^{-M}, 1)$. При наближенні до нуля вздовж різних променів граничні значення заповнюють сферу радіуса e^{-M} , тому неперервне продовження в нуль неможливе. Образ **не містить** початку координат і жодної кулі $B(0, r_0)$ з центром у ньому.

Висновок до прикладу 2. Цей розрахунок показує геометричний зміст радіальної інтегральної умови розбіжності. У цій моделі вона є точним критерієм того, що внутрішній радіус образу дорівнює нулю і відображення можна неперервно продовжити в центр. За виконання цієї умови образ продовженого відображення є повною одиничною кулею; для застосування загальної теореми Кебе потрібно окремо перевірити всі її гіпотези.

2.5 Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте класичну теорему Кебе про $1/4$. На якому класичному нормуванні похідної вона базується і на якій функції досягає своєї точності?
2. У чому полягає принципова відмінність між теоремами Блоха та Ландау щодо гарантії однолистості покриття знайденого круга?
3. Чому для відображень класів Соболева та Орлича-Соболева не завжди можна вимагати класичного нормування похідної в наперед заданій точці $f'(0) = 1$? Якою глобальною топологічною умовою його замінюють у сучасній теорії?
4. Що таке обернена нерівність Полецького і яку роль вона відіграє в

дослідженні розмірів образів просторових відображень?

5. Сформулюйте просторовий аналог теореми Кебе (з усіма умовами на мажоранту Q у теоремі 2.1). У чому полягає його геометричний зміст для сім'ї відображень?
6. Як Приклад 1 (послідовність гомотетій $f_m(x) = x/m$) ілюструє критичну необхідність глобального топологічного нормування $h(f(E)) \geq \delta$? Що відбувається з образами кулі у разі його порушення?
7. Сформулюйте інтегральну умову розбіжності через Φ^{-1} .
8. Спираючись на результати обчислень у Прикладі 2 (з радіальним відображенням), поясніть, що геометрично відбувається з образом проколотої кулі при збіжності радіального інтеграла.
9. Як наявність гарантованої фіксованої кулі в образі впливає на топологічні властивості (відкритість) граничного відображення, якщо послідовність відкритих дискретних відображень збігається локально рівномірно за умов теореми 2.3?
10. На які абстрактні метричні об'єкти поширюється аналог теореми Кебе в сучасній геометричній теорії функцій? Яким додатковим умовам регулярності мають задовольняти ці простори?

2.6 Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Для заданої сім'ї відображень $f_m: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданих формулою $f_m(x) = \frac{x}{\varphi(m)}$, де $m \in \mathbb{N}$, переконатися, що ця сім'я задовольняє обернену нерівність Полецького відносно n -модуля з одиничною мажорантою на образі. За умов теореми 2.1 взяти спільну мажоранту $Q(y) = \mathbf{1}_{B(0,R)}(y)$, де $R > \sup_{m \in \mathbb{N}} 1/\varphi(m)$.

Дослідити цю сім'ю відображень, давши обґрунтовані відповіді на такі питання:

1. Знайти образ кулі $B(0, \varepsilon_1)$ при відображенні f_m та обчислити його евклідові, а потім хордальний радіус $r_m^{(h)}$. З'ясувати, чи виконується для цієї сім'ї висновок просторового аналога теореми Кебе тобто,

чи існує спільний фіксований хордальний радіус $r_0 > 0$, який би містився в усіх образах $f_m(B(0, \varepsilon_1))$ одночасно при всіх $m \in \mathbb{N}$?

2. Знайти образ радіального континууму $E = [0, 1/2]$ та обчислити його хордальний діаметр $h(f_m(E))$. З'ясувати, чи порушується для даної сім'ї обов'язкова умова топологічного нормування $h(f_m(E)) \geq \delta > 0$ при $m \rightarrow \infty$.
3. Спираючись на попередні пункти, зробити висновок: чому саме для цієї сім'ї відображень (незважаючи на виконання умов теореми 2.1 щодо мажоранти Q) геометрична властивість Кебе-Блоха щодо покриття фіксованої кулі зберігається або руйнується.

Дані для кожного варіанта наведено в Таблиці 1.

Задача 2. Нехай $n \geq 3$, а мажоранта внутрішньої дилатації радіального відображення $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ вигляду $f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|)$ має середнє інтегральне значення $q_0(r)$ на сфері $|x| = r$. Для заданих n та $q_0(r)$ обчислити внутрішній радіус образу проколотої кулі:

$$\rho(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \exp \left\{ - \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} \right\}.$$

З'ясувати, чи виконується для заданої функції $q_0(r)$ радіальна інтегральна умова розбіжності. Зробити обґрунтований висновок: чи допускає відображення неперервне продовження значенням $f(0) = 0$ (тобто чи дорівнює $\rho(0)$ нулю), і якщо допускає, чи покриває образ продовженого відображення кулю з центром у нулі.

Дані для кожного варіанта наведено в Таблиці 2.

Табл. 1: Параметри до Задачі 1

Варіант	$\varphi(m)$	ε_1	Варіант	$\varphi(m)$	ε_1
1	$2m$	1/2	16	$10m$	3/5
2	m^2	1/3	17	$m^{3/2}$	1/2
3	$3m$	1/4	18	4^m	1/3
4	m^3	1/2	19	$m^2 + 2m$	1/4
5	2^m	2/3	20	$m \ln(m + 1)$	1/2
6	e^m	1/5	21	2^{m+1}	2/3
7	$m!$	3/4	22	m^5	1/5
8	$m^2 + m$	1/2	23	$e^{m/2}$	3/4
9	$\sqrt{m}$	1/3	24	$m^3 + m$	1/2
10	$\ln(m + 1)$	1/4	25	$\sqrt{m^3}$	1/3
11	$5m$	2/5	26	$m!/2$	1/4
12	m^4	1/2	27	5^m	2/5
13	3^m	1/3	28	$m^2 + 5$	1/2
14	$m^2 + 1$	1/4	29	$e^m + m$	1/3
15	e^{2m}	1/2	30	$2m^2$	1/4

Табл. 2: Параметри до Задачі 2

Варіант	n	$q_0(r)$	Варіант	n	$q_0(r)$
1	3	$\left(\ln \frac{e}{r}\right)^2$	16	4	$(1+2r)^3$
2	4	r^{-3}	17	3	$(1+r^3)^2$
3	3	$(1+r)^2$	18	4	$r^{-3/2}$
4	4	$(1+r^2)^3$	19	5	$(1+3r)^4$
5	3	$\left(1+\ln^2 \frac{1}{r}\right)^2$	20	3	$\left(\ln \frac{e}{r}\right)^4$
6	5	r^{-2}	21	4	$\left(\frac{1+2r}{r}\right)^3$
7	4	$\left(\ln \frac{e}{r}\right)^6$	22	5	$(2+r^2)^4$
8	3	$\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2$	23	3	e^{2r}
9	4	$(1+\sqrt{r})^3$	24	4	$\left(\ln \frac{e}{r}\right)^3$
10	5	e^{4r}	25	3	$(2+r)^2$
11	3	r^{-1}	26	5	$\left(\frac{2+r^2}{r}\right)^4$
12	4	$(2-r)^3$	27	3	$\ln \frac{e}{r}$
13	3	$\left(\frac{1+r}{r}\right)^2$	28	4	$\left(\frac{r+3}{r}\right)^3$
14	5	$\left(\ln \frac{e}{r}\right)^8$	29	3	$\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2$
15	3	$\left(\frac{e^{1-r}}{r}\right)^2$	30	4	$\left(1+\ln^2 \frac{1}{r}\right)^3$

Перелік використаних джерел

- [1] Adamowicz T. Prime ends in metric spaces and quasiconformal-type mappings. *Analysis and Mathematical Physics*. 2026. Vol. 9, iss. 4. P. 1941–1975.
- [2] Caratheodory C. Über die Begrenzung der einfachzusammenhängender Gebiete. *Math. Ann.* 1913. Vol. 73. P. 323–370.
- [3] Carleson L., Gamelin T.W. *Complex dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics*. – Springer-Verlag, New York etc., 1993.
- [4] Collingwood E.F. and Lohwator A.J. *The Theory of Cluster Sets. Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*, **56**. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [5] Cristea M. Open discrete mappings having local ACL^n inverses. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2010. Vol. 55, iss. 1–3. P. 61–90.
- [6] Desyatka V., Sevost'yanov E. On boundary-non-preserving mappings with Poletsky inequality. *Canadian Mathematical Bulletin*. 2025. Vol. 68, iss. 3. P. 834–855.
- [7] Desyatka V., Halyts'ka A., Sevost'yanov E. On boundary extension of unclosed Orlicz-Sobolev mappings. *Journal of Mathematical Sciences*. 2026. Vol. 302, iss. 3. P. 329–348.
- [8] Hesse J. A p -extremal length and p -capacity equality. *Ark. Mat.* 1975. Vol. 13. P. 131–144.
- [9] Sevost'yanov E., Targonskii V. and Ilkevych N. On Koebe's theorem for mappings with integral constraints. 2025. arXiv preprint arXiv:2509.02008.
- [10] Kovtonyuk D.A., Petkov I.V. and Ryazanov V.I. Prime ends in theory of mappings with finite distortion in the plane. *Filomat*. 2017. Vol. 31, iss. 5. P. 1349–1366.

- [11] Kovtonyuk D.A. and Ryazanov V.I. On the theory of prime ends for space mappings. Ukr. Math. J. 2015. Vol. 67, iss. 4. P. 528–541.
- [12] Kovba Z., Sevost'yanov E. On Caratheodory prime ends extension for unclosed Orlicz-Sobolev classes. 2026. arXiv:2604.15026.
- [13] Kuratowski K. Topology, v. 2. – Academic Press, New York–London, 1968.
- [14] Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1971. Vol. 488. P. 1–31.
- [15] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. – Springer Science + Business Media, LLC, New York, 2009.
- [16] Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings. J. Anal. Math. 1979. Vol. 35. P. 13–40.
- [17] Petkov I., Salimov R., Stefanchuk M. Nonlinear Beltrami equation: Lower estimates of Schwarz lemma's type. Canad. Math. Bull. 2024. Vol. 67, iss. 3. P. 533–543.
- [18] Romash D. and Sevost'yanov E. On Koebe-Bloch theorem for ring mappings and convergence to a homeomorphism. Complex Variables and Elliptic Equations. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17476933.2026.2697524>.
- [19] Ryazanov V., Volkov S. On the Boundary Behavior of Mappings in the Class $W_{loc}^{1,1}$ on Riemann Surfaces. Complex Analysis and Operator Theory. 2017. Vol. 11. P. 1503–1520.
- [20] Salimov R.R., Stefanchuk M.V. Functional Asymptotics of Solutions of the Nonlinear Cauchy–Riemann– Beltrami System. Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 277, iss. 2. P. 311–328.
- [21] Sevost'yanov E. On the local behavior of Open Discrete Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes. Ukr. Math. J. 2017. Vol. 68, iss. 9. P. 1447–1465.

- [22] Sevost'yanov E. On the boundary behavior of some classes of mappings. J. Math. Sci. 2019. Vol. 243, iss. 6. P. 934–948.
- [23] Sevost'yanov E. The inverse Poletsky inequality in one class of mappings. Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 264, iss. 4. P. 455–470.
- [24] Sevost'yanov E. Mappings with Direct and Inverse Poletsky Inequalities. Developments in Mathematics (DEVIM, volume 78). – Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2023.
- [25] Sevost'yanov E. On global behavior of mappings with integral constraints. Analysis and Mathematical Physics. 2022. Vol. 12, iss. 3. Article number 76.
- [26] Sevost'yanov E. and Targonskii V. An analogue of Koebe's theorem and the openness of a limit map in one class. Analysis and Mathematical Physics. 2025. Vol. 15, iss. 3. Article number 59.
- [27] Sevost'yanov E., Targonskii V., Romash D. and Ilkevych N. An analogue of Koebe's theorem in metric spaces. 2026. <https://arxiv.org/abs/2509.15093>.
- [28] Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Lecture Notes in Math., 229. – Springer-Verlag, Berlin etc., 1971.
- [29] Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n -space. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertations. 1976. Vol. 11. P. 1–44.
- [30] Ziemer W.P. Extremal length and conformal capacity. Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 126, iss. 3. P. 460–473.
- [31] Ziemer W.P. Extremal length and p -capacity. Michigan Math. J. 1969. Vol. 16. P. 43–51.