

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов,
А.Л. Таргонський

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.
ЧАСТИНА V

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2026

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного
університету імені Івана Франка
(протокол № 21 від 25 вересня 2026 р.)*

Рецензенти:

В.І. Рязанов – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу
теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН
України, м. Черкаси

І.В. Денег – доктор фіз.-мат. наук, старший дослідник, провідний
науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України, м. Київ

А.О. Погоруй – доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри
алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені
Івана Франка

В22 Математичний аналіз. Частина V / Довгопятий О.П., Севос-
стьянов Є.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка,
2026. - 109 с.

Навчально-методичний посібник стосується визначеного інтегралу та його застосувань. Розглянуті питання обчислення визначених та не-власних інтегралів, обчислення площ плоских фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл та площ поверхонь обертання, а також застосування визначеного інтеграла до розв'язування фізичних задач. Кожен розділ містить в собі мінімальні теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач, та приклади їх розв'язання. Окремо наведені завдання для самоконтролю та типові задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

© О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов, А.Л. Таргонський

2026

© Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2026

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	4
1 Визначений інтеграл	5
1.1 Поняття визначеного інтеграла. Обчислення визначених інтегралів	5
1.2 Завдання для самоконтролю	15
1.3 Завдання для самостійної роботи №1	16
1.4 Невласні інтеграли	17
1.5 Завдання для самоконтролю	25
1.6 Завдання для самостійної роботи №2	27
1.7 Обчислення площ плоских фігур	29
1.8 Завдання для самоконтролю	42
1.9 Завдання для самостійної роботи №3	44
1.10 Обчислення довжини дуги кривої	47
1.11 Завдання для самоконтролю	53
1.12 Завдання для самостійної роботи №4	54
1.13 Обчислення об'ємів тіл	57
1.14 Завдання для самоконтролю	65
1.15 Завдання для самостійної роботи №5	67
1.16 Обчислення площ поверхонь обертання	70
1.17 Завдання для самоконтролю	80
1.18 Завдання для самостійної роботи №6	81
1.19 Застосування визначеного інтеграла до розв'язування фізичних задач	85
1.20 Завдання для самоконтролю	98
1.21 Завдання для самостійної роботи №7	100
Основні формули	104
Рекомендована література	109

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$[x]$	ціла частина числа x : найбільше ціле число, що не перевищує x
$A \Rightarrow B$	з умови A випливає умова B
$A \Leftrightarrow B$	умови A і B рівносильні
$\forall$	«для будь-якого, для кожного, для всіх»
$\exists$	«існує, знайдеться»
$!$	«єдиний»
$x \in A$	«елемент x належить множині A »
$A \subset B$	«множина A включається у множину B », тобто, кожен елемент $x \in A$ також задовольняє умову $x \in B$
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	функція, область визначення якої є множина D , зі значеннями в $\mathbb{R}$
$f(A)$	$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні f
$f^{-1}(B)$	$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини B при відображенні f
$f^{-1} : f(D) \rightarrow D$	обернене відображення до відображення f , $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D, f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(D)$
$ x $	Покладемо $ x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
$f'(x)$	$f'(x)$ служить означенням звичайної похідної f в точці x
$C^1(D)$	клас неперервних функцій $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

1 Визначений інтеграл

1.1 Поняття визначеного інтеграла. Обчислення визначених інтегралів

У попередній частині цього навчально-методичного посібника було розглянуто поняття первісної та невизначеного інтеграла, а також основні методи інтегрування функцій. Перейдемо тепер до поняття визначеного інтеграла.

Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Позначимо

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n},$$

та на кожному з відрізків $[x_{k-1}; x_k]$ виберемо довільну точку ξ_k . Суму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

називають *інтегральною сумою* функції f на відрізку $[a; b]$.

Означення 1.1. Якщо при

$$\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \longrightarrow 0$$

інтегральна сума σ_n має скінченну границю, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ та вибору точок ξ_k , то цю границю називають *визначеним інтегралом* функції f на відрізку $[a; b]$ і позначають

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Числа a і b називають відповідно *нижньою* та *верхньою межами інтегрування*, функцію $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, а x – *змінною інтегрування*.

Будь-яка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція є інтегровною на цьому відрізку.

Розглянемо геометричний зміст визначеного інтеграла. Нехай функція f неперервна та невід'ємна на відрізку $[a; b]$. Тоді число

$$\int_a^b f(x) dx$$

дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox .

x

Теорема 1.1. (Основні властивості визначеного інтеграла).

Нехай функції f та g інтегровні на відрізку $[a; b]$. Тоді:

1. Якщо межі інтегрування співпадають, то

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

2. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Сталій множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Визначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

5. Для довільної точки $c \in [a; b]$ справедлива рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. Якщо $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

7. Якщо $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Розглянемо декілька прикладів застосування властивостей визначеного інтеграла.

Приклад 3. Відомо, що

$$\int_0^2 f(x) dx = 5, \quad \int_0^2 g(x) dx = -1.$$

Знайти

$$\int_0^2 (3f(x) - 2g(x)) dx.$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями визначеного інтеграла. Маємо:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3f(x) - 2g(x)) dx &= 3 \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 g(x) dx = \\ &= 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 17. \quad \square\end{aligned}$$

Приклад 4. Відомо, що

$$\int_1^3 f(x) dx = 4, \quad \int_3^5 f(x) dx = 7.$$

Знайти

$$\int_1^5 f(x) dx.$$

Розв'язання. Використовуючи властивість адитивності визначеного інтеграла, маємо:

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = 4 + 7 = 11. \quad \square$$

Формула Ньютона–Лейбніца

Безпосереднє використання означення визначеного інтеграла для його обчислення є досить незручним. Зв'язок між визначеним інтегралом та первісною функцією встановлює формула Ньютона–Лейбніца.

Теорема 1.2. (Формула Ньютона–Лейбніца). Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а F – одна з первісних функцій f на цьому відрізку. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Для скорочення запису використовують позначення

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тоді формулу Ньютона–Лейбніца можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Таким чином, для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну з первісних підінтегральної функції та обчислити різницю її значень на верхній і нижній межах інтегрування.

Приклад 5. *Обчислити*

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x - 1) dx.$$

Розв’язання. Первісною для функції $3x^2 + 2x - 1$ є функція

$$F(x) = x^3 + x^2 - x.$$

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца маємо

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x^2 + 2x - 1) dx &= (x^3 + x^2 - x)|_0^2 = \\ &= (8 + 4 - 2) - (0 + 0 - 0) = 10. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 6. *Обчислити*

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx.$$

Розв’язання. Використовуючи табличний інтеграл

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

отримаємо

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1. \quad \square$$

Приклад 7. *Обчислити*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Розв'язання. За формулою Ньютона–Лейбніца

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1. \quad \square\end{aligned}$$

В багатьох випадках перед застосуванням формули Ньютона–Лейбніца необхідно спочатку перетворити підінтегральну функцію. Для цього можна використовувати алгебраїчні перетворення, почленне ділення, тригонометричні формули та методи інтегрування, розглянуті у попередній частині посібника.

Приклад 8. *Обчислити*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою пониження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \\ &= \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \quad \square\end{aligned}$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

У попередній частині посібника було розглянуто метод заміни змінної при обчисленні невизначених інтегралів. Цей метод можна використовувати і для обчислення визначених інтегралів. При цьому немає необхідності повертатися до початкової змінної: достатньо після виконання заміни змінити межі інтегрування.

Нехай

$$t = \varphi(x).$$

Тоді нові межі інтегрування знаходяться таким чином:

$$x = a \quad \Longrightarrow \quad t = \varphi(a),$$

$$x = b \quad \Longrightarrow \quad t = \varphi(b).$$

Приклад 9. *Обчислити*

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^3 dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну

$$t = x^2 + 1, \quad dt = 2x dx.$$

Знайдемо нові межі інтегрування:

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 1,$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = 2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x(x^2 + 1)^3 dx &= \int_1^2 t^3 dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_1^2 = \\ &= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 10. *Обчислити*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx.$$

При цьому

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad t = 0.$$

Тому

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \, dx &= -\int_1^0 t^3 \, dt = \int_0^1 t^3 \, dt = \\ &= \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \square\end{aligned}$$

Зауваження 1.2. Після виконання заміни змінної у визначеному інтегралі зручніше відразу змінити межі інтегрування. У такому випадку повертатися після інтегрування до початкової змінної не потрібно.

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Метод інтегрування частинами також переноситься на визначені інтеграли. Формула інтегрування частинами має вигляд

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Вибір функцій u та dv здійснюється за тими самими принципами, що й при обчисленні невизначених інтегралів.

Приклад 11. Обчислити

$$\int_0^1 x e^x \, dx.$$

Розв'язання. Покладемо

$$u = x, \quad dv = e^x \, dx.$$

Тоді

$$du = dx, \quad v = e^x.$$

За формулою інтегрування частинами

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x \, dx &= x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = \\ &= e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1. \quad \square\end{aligned}$$

Приклад 12. Обчислити

$$\int_1^e \ln x \, dx.$$

Розв'язання. Покладемо

$$u = \ln x, \quad dv = dx.$$

Тоді

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = \\ &= e - (e - 1) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Використання парності та непарності функцій

В деяких випадках обчислення визначеного інтеграла можна суттєво спростити, якщо врахувати парність або непарність підінтегральної функції.

Якщо функція f є парною на відрізку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Якщо функція f є непарною на відрізку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Приклад 13. Обчислити

$$\int_{-2}^2 (x^5 + x^2) \, dx.$$

Розв'язання. Функція x^5 є непарною, тому

$$\int_{-2}^2 x^5 \, dx = 0.$$

Функція x^2 є парною. Отже,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (x^5 + x^2) dx &= 2 \int_0^2 x^2 dx = \\ &= 2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16}{3}. \quad \square\end{aligned}$$

1.2 Завдання для самоконтролю

1. Дайте означення інтегральної суми функції на відрізку.
2. Дайте означення визначеного інтеграла.
3. Який геометричний зміст має визначений інтеграл від невід'ємної функції?
4. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
5. Сформулюйте формулу Ньютона–Лейбніца.
6. Як змінюються межі інтегрування при виконанні заміни змінної у визначеному інтегралі?
7. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
8. Доведіть, що якщо функція f є непарною та інтегрованою на $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

9. Доведіть, що якщо функція f є парною та інтегрованою на $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

10. Чи може визначений інтеграл від неперервної функції дорівнювати нулю, якщо сама функція не є тотожно нульовою? Наведіть приклад.
11. Чи може визначений інтеграл від додатної на відрізку функції бути від'ємним? Обґрунтуйте відповідь.

12. Нехай

$$\int_a^b f(x) dx = 3.$$

Знайдіть $\int_b^a f(x) dx$.

1.3 Завдання для самостійної роботи №1

Задача 1. Обчислити визначений інтеграл для кожного з варіантів.

Варіант	Інтеграл	Варіант	Інтеграл
1	$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 2) dx$	16	$\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx$
2	$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$	17	$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$
3	$\int_0^{\pi/2} (2 \sin x + 3 \cos x) dx$	18	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$
4	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$	19	$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$
5	$\int_0^1 x e^{x^2} dx$	20	$\int_0^1 x \ln(x+1) dx$
6	$\int_0^1 x e^{2x} dx$	21	$\int_0^1 x^2 e^x dx$
7	$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$	22	$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$
8	$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$	23	$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$
9	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$	24	$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
10	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$	25	$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx$
11	$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$	26	$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$
12	$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$	27	$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$
13	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	28	$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$
14	$\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$	29	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4}$
15	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$	30	$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$

1.4 Невласні інтеграли

При введенні поняття визначеного інтеграла передбачалося, що межі інтегрування є скінченними, а підінтегральна функція обмежена на відрізку інтегрування. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то приходимо до поняття невластного інтеграла.

Розрізняють невластні інтеграли першого та другого роду. До невластних інтегралів першого роду відносять інтеграли з нескінченними межами інтегрування, а до невластних інтегралів другого роду – інтеграли від необмежених функцій.

Невластні інтеграли першого роду

Нехай функція f неперервна на проміжку $[a; +\infty)$.

Означення 1.2. Невласним інтегралом першого роду функції f на проміжку $[a; +\infty)$ називають границю

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо ця границя існує та є скінченною, то невластний інтеграл називають *збіжним*. Якщо границя не існує або є нескінченною, то невластний інтеграл називають *розбіжним*.

Такий інтеграл є збіжним лише тоді, коли збігаються обидва інтеграли в правій частині.

Приклад 14. Дослідити на збіжність та обчислити інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Розв'язання. За означенням невластного інтеграла першого роду маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1. \end{aligned}$$

Отже, даний невластний інтеграл збігається і

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad \square$$

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, даний невластний інтеграл розбігається. $\square$

Попередні два приклади є частинними випадками важливого невластного інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Теорема 1.3. Невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Приклад 16. Дослідити на збіжність та обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-2x} \right|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2b} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збігається і

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Приклад 17. Дослідити на збіжність та обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Розв'язання. За означенням

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1. \end{aligned}$$

Отже, даний інтеграл збігається і дорівнює 1. $\square$

Приклад 18. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Розв'язання. Розіб'ємо інтеграл на два:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Обчислимо кожен з них:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.$$

Обидва інтеграли збігаються. Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi. \quad \square$$

Невласні інтеграли другого роду

Розглянемо тепер випадок, коли проміжок інтегрування є скінченним, але підінтегральна функція необмежена.

Нехай функція f неперервна на проміжку $[a; b)$ та необмежена в околі точки b .

Означення 1.3. Невласним інтегралом другого роду функції f на відрізку $[a; b]$ називають границю

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx.$$

Якщо ця границя існує та є скінченною, то невластний інтеграл називають *збіжним*, в іншому випадку – *розбіжним*.

Якщо функція f необмежена в околі лівого кінця відрізка, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x) dx.$$

Приклад 19. Дослідити на збіжність та обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена при $x \rightarrow 0+0$.
Тому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\alpha}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2. \end{aligned}$$

Отже, даний невластний інтеграл збігається і дорівнює 2. $\square$

Приклад 20. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \ln x \Big|_{\alpha}^1 = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} (-\ln \alpha) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, даний невластний інтеграл розбігається. $\square$

Як і для невластних інтегралів першого роду, корисно запам'ятати наступний результат.

Теорема 1.4. Невластний інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

збігається при $p < 1$ і розбігається при $p \geq 1$.

Якщо функція f має нескінченний розрив у внутрішній точці $c \in (a; b)$, то необхідно розглянути два невластні інтеграли:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow c-0} \int_a^\alpha f(x) dx,$$

а

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow c+0} \int_\beta^b f(x) dx.$$

Початковий інтеграл збігається лише тоді, коли збігаються обидва інтеграли в правій частині.

Зауваження 1.3. Якщо хоча б один з двох інтегралів

$$\int_a^c f(x) dx, \quad \int_c^b f(x) dx$$

розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ також розбігається.

Приклад 21. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена в точці $x = 0$. Тому необхідно розглянути два невласні інтеграли:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Для першого інтеграла маємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \int_{-1}^\alpha \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} -2\sqrt{-x} \Big|_{-1}^\alpha = 2. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Отже, обидва інтеграли збігаються і

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4. \quad \square$$

Приклад 22. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена в точці $x = 0$, яка належить проміжку інтегрування. Розглянемо інтеграл

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \left(-\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, вже перший з двох невластних інтегралів розбігається, тому початковий інтеграл також розбігається. $\square$

Ознаки порівняння невластних інтегралів

Не кожний невластний інтеграл можна обчислити безпосередньо. У багатьох випадках для встановлення його збіжності або розбіжності достатньо порівняти підінтегральну функцію з іншою функцією, поведінка відповідного невластного інтеграла для якої вже відома.

Теорема 1.5. (Ознака порівняння) Нехай функції f та g неперервні на проміжку $[a; +\infty)$ і

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad x \in [a; +\infty).$$

Тоді:

1. Якщо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

збігається, то збігається й інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Якщо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

розбігається, то розбігається й інтеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Аналогічна ознака справедлива і для невластних інтегралів другого роду.

Приклад 23. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Розв'язання. Для $x \geq 1$ маємо

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2}.$$

Інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

збігається. Отже, за ознакою порівняння збігається і інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx. \quad \square$$

Теорема 1.6. (Гранична ознака порівняння) Нехай функції f та g неперервні і додатні на проміжку $[a; +\infty)$ та

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \quad 0 < A < +\infty.$$

Тоді невластні інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{та} \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Аналогічне твердження справедливе для невласних інтегралів другого роду, якщо границя розглядається при наближенні до точки, в якій підінтегральна функція є необмеженою.

Приклад 24. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+4} dx.$$

Розв'язання. При $x \rightarrow +\infty$ підінтегральна функція поводить себе як $\frac{2}{x^2}$. Покладемо

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2x+1)}{x^3+4} = 2.$$

Оскільки

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

збігається, то за граничною ознакою порівняння збігається і початковий інтеграл. $\square$

1.5 Завдання для самоконтролю

1. Які інтеграли називають невласними інтегралами першого роду?

2. Дайте означення збіжного невласного інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

3. Як визначається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx?$$

4. За якої умови збігається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx?$$

5. При яких значеннях p збігається інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx?$$

6. Які інтеграли називають невластими інтегралами другого роду?

7. Дайте означення невластного інтеграла другого роду у випадку, коли підінтегральна функція необмежена в околі правого кінця відрізка.

8. Як обчислюється невластий інтеграл, якщо підінтегральна функція має нескінченний розрив у внутрішній точці проміжку інтегрування?

9. При яких значеннях p збігається інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx?$$

10. Сформулюйте ознаку порівняння невластних інтегралів.

11. Сформулюйте граничну ознаку порівняння невластних інтегралів.

12. Дослідіть на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

13. Дослідіть на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

14. Чи можна вважати збіжним інтеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

на підставі того, що підінтегральна функція є непарною? Обґрунтуйте відповідь.

1.6 Завдання для самостійної роботи №2

Задача 2. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності невластний інтеграл першого роду.

Варіант	Інтеграл	Варіант	Інтеграл
1	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$	16	$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$
2	$\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$	17	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$	18	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-x)^2}$
4	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$	19	$\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$
5	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+1}$	20	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}}$
6	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$	21	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
7	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$	22	$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+1}$
8	$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$	23	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$
9	$\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$	24	$\int_1^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$
10	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$	25	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^3}$
11	$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2} dx$	26	$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+4}$
12	$\int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x} dx$	27	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$
13	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	28	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2-x}$
14	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$	29	$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$
15	$\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$	30	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$

Задача 3. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності невластний інтеграл другого роду.

Варіант	Інтеграл	Варіант	Інтеграл
1	$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$	16	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
2	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$	17	$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$
3	$\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$	18	$\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{4-x}} dx$
4	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/4}}$	19	$\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$
5	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$	20	$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}$
6	$\int_0^1 \ln x dx$	21	$\int_0^1 \ln(1-x) dx$
7	$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	22	$\int_0^2 \frac{3-x}{\sqrt{2-x}} dx$
8	$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$	23	$\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{4-x}}$
9	$\int_0^1 \frac{1+x}{x^{1/3}} dx$	24	$\int_0^2 \frac{x+1}{(2-x)^{1/3}} dx$
10	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{4/3}}$	25	$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{4/3}}$
11	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{ x-1 }}$	26	$\int_0^4 \frac{dx}{ x-2 ^{2/3}}$
12	$\int_0^2 \frac{dx}{ x-1 }$	27	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{ x ^{3/2}}$
13	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{ x ^{1/3}}$	28	$\int_0^4 \frac{dx}{ x-2 ^{4/3}}$
14	$\int_0^2 \ln x-1 dx$	29	$\int_{-2}^2 \ln x dx$
15	$\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{ x-1 }} dx$	30	$\int_0^4 \frac{x+1}{ x-2 ^{3/2}} dx$

1.7 Обчислення площ плоских фігур

Одним із найважливіших геометричних застосувань визначеного інтеграла є обчислення площ плоских фігур.

Нехай функція f неперервна та невід'ємна на відрізку $[a; b]$. Тоді площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox , обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

У загальному випадку, якщо функція f змінює знак на відрізку $[a; b]$, то площа фігури між графіком функції та віссю Ox обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

На практиці для обчислення такого інтеграла відрізок $[a; b]$ розбивають точками, в яких функція змінює знак, та обчислюють площу кожної частини окремо.

x

Приклад 28. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою

$$y = x^2$$

та прямою

$$y = 2x + 3.$$

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину параболи та прямої:

$$x^2 = 2x + 3.$$

Отже,

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

звідки

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

На відрізку $[-1; 3]$ пряма $y = 2x + 3$ розташована вище параболи $y = x^2$.
Тому

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \\ &= \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{32}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

У деяких задачах графіки, що обмежують фігуру зверху та знизу, змінюються на проміжку інтегрування. У такому випадку область необхідно розбити на декілька частин.

Приклад 29. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = x, \quad y = x^3.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину графіків:

$$x = x^3.$$

Отже,

$$x(x-1)(x+1) = 0,$$

тому

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

x

Нехай фігура обмежена кривими

$$x = \varphi(y), \quad x = \psi(y)$$

та прямими $y = c$, $y = d$, причому

$$\varphi(y) \geq \psi(y), \quad y \in [c; d].$$

Тоді її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy.$$

Отже,

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

звідки

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 2.$$

x

Розв'язання. Запишемо рівняння параболи у вигляді

$$x = \frac{y^2}{4}.$$

Знайдемо ординати точок перетину параболи та прямої:

$$\frac{y^2}{4} = 2.$$

Звідси

$$y^2 = 8,$$

тому

$$y_1 = -2\sqrt{2}, \quad y_2 = 2\sqrt{2}.$$

На відріжку

$$[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$$

права межа фігури задається прямою $x = 2$, а ліва межа – параболою

$$x = \frac{y^2}{4}.$$

Площа фігури, заданої параметрично

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Якщо $x(t)$ є монотонною функцією, а $y(t)$ не змінює знак на $[\alpha; \beta]$, то, враховуючи

$$dx = x'(t) dt,$$

площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|.$$

Приклад 32. Обчислити площу під однією аркою циклоїди

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Розкриємо квадрат:

$$(1 - \cos t)^2 = 1 - 2 \cos t + \cos^2 t.$$

Використовуючи формулу пониження степеня

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

одержуємо

$$\begin{aligned} S &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= a^2 \left(\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \quad \square \end{aligned}$$

Площа фігури в полярних координатах

Нагадаємо поняття полярних координат. Положення точки M на площині можна задавати не лише декартовими координатами $(x; y)$, а й полярними координатами $(r; \varphi)$, де r – відстань від точки M до початку координат O , а φ – кут між додатним напрямом осі Ox та променем OM .

а також

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Крива в полярних координатах може бути задана рівнянням

$$r = r(\varphi).$$

Це означає, що для кожного значення кута φ визначається відстань r від початку координат до відповідної точки кривої.

Нехай крива задана в полярних координатах рівнянням

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

Тоді площа фігури, обмеженої цією кривою та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

r

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

x

7. Запишіть формулу для обчислення площі фігури при інтегруванні за змінною y .

8. Запишіть формулу для обчислення площі фігури, якщо крива задана параметрично.

9. Запишіть формулу для обчислення площі фігури в полярних координатах.

10. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції

$$y = 4 - x^2$$

та віссю Ox .

11. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = x^2, \quad y = 2x.$$

12. Чому при обчисленні площі фігури не можна безпосередньо використовувати від'ємне значення визначеного інтеграла?

1.9 Завдання для самостійної роботи №3

Задача 4. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$y = x^2, \quad y = 3x$	16	$y = \sqrt{x}, \quad y = x$
2	$y = x^2, \quad y = x + 2$	17	$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{x}{2}$
3	$y = x^2 - 4x, \quad y = 0$	18	$y = \sqrt{x}, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$
4	$y = x^2 - 4, \quad y = 0$	19	$y = x^3, \quad y = 4x$
5	$y = x^2, \quad y = 3x - 2$	20	$y = x^3, \quad y = x^2$
6	$y = 2x - x^2, \quad y = 0$	21	$y = x^3 - x, \quad y = 0$
7	$y = x^2 - 2x, \quad y = x$	22	$y = x^3, \quad y = 2x$
8	$y = x^2 - 1, \quad y = x + 1$	23	$y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$
9	$y = x^2 - 6x, \quad y = 0$	24	$y = \cos x, \quad y = 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
10	$y = x^2 + x, \quad y = 2x + 2$	25	$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
11	$y = 4x - x^2, \quad y = 0$	26	$y = \sin x, \quad y = 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
12	$y = x^2 - 2x - 3, \quad y = 0$	27	$y = x , \quad y = 2$
13	$y = x^2, \quad y = 4$	28	$y = x , \quad y = x^2$
14	$y = x^2 - 2x, \quad y = 2x$	29	$y = x - 1 , \quad y = 1$
15	$y = x^2 - 2x, \quad y = 2 - x$	30	$y = x , \quad y = 4 - x^2$

Задача 5. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями, інтегруючи відносно змінної y .

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$x = y^2, \quad x = 2y + 3$	16	$x = 2y - y^2, \quad x = y$
2	$x = y^2 - 2y, \quad x = 0$	17	$x = y^2 - 4y + 3, \quad x = 0$
3	$x = 4 - y^2, \quad x = y + 2$	18	$x = (y - 1)^2, \quad x = 4$
4	$x = y^2, \quad x = 4y$	19	$x = y^2 - 2y, \quad x = 2 - y$
5	$x = y^2 - 1, \quad x = 3$	20	$x = 3y - y^2, \quad x = y$
6	$x = 2y - y^2, \quad x = 0$	21	$x = y^2 + 2y, \quad x = 3$
7	$x = y^2 + 1, \quad x = 2y + 1$	22	$x = 4 - y^2, \quad x = 2 - y$
8	$x = y^2 - 4, \quad x = 2y$	23	$x = (y + 1)^2, \quad x = 4$
9	$x = y^2 - 2y, \quad x = y + 2$	24	$x = y^2 - y, \quad x = y + 2$
10	$x = 3 - y^2, \quad x = 1$	25	$x = 6 - y^2, \quad x = y + 4$
11	$x = y^2, \quad x = 2 - y$	26	$x = y^2 - 3y, \quad x = y$
12	$x = (y - 2)^2, \quad x = 4$	27	$x = 4y - y^2, \quad x = 2y$
13	$x = y^2 + y, \quad x = 2y + 2$	28	$x = y^2 + 2y - 3, \quad x = 1$
14	$x = 4 - y^2, \quad x = 0$	29	$x = (y - 1)^2 - 1, \quad x = 3$
15	$x = y^2 - 3y, \quad x = 2y$	30	$x = 5 - y^2, \quad x = y + 3$

Задача 6. Обчислити площу фігури, заданої в полярних координатах.

Варіант	Рівняння та межі	Варіант	Рівняння та межі
1	$r = 2 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$	16	$r = 3 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
2	$r = 4 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	17	$r = 3(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
3	$r = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	18	$r = 4 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
4	$r = 3 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	19	$r = 2(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
5	$r = 5 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	20	$r = 2(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
6	$r = 1 + \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$	21	$r = 3(1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
7	$r = 2 - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$	22	$r = 2 - \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
8	$r = 2 + \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$	23	$r = 3 + 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
9	$r = 3 - 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$	24	$r = 3 - 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
10	$r = 1 + 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	25	$r = 1 + 2 \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$
11	$r = 2 \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	26	$r = 3 \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$
12	$r = 2 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	27	$r = 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
13	$r = 2 \cos 3\varphi, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$	28	$r = 3 \sin 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
14	$r^2 = 4 \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	29	$r^2 = 9 \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$
15	$r^2 = 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	30	$r^2 = 9 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

1.10 Обчислення довжини дуги кривої

Ще одним важливим геометричним застосуванням визначеного інтеграла є обчислення довжини дуги кривої.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та має неперервну похідну на цьому відрізку. Тоді довжина дуги графіка функції $y = f(x)$ від точки з абсцисою $x = a$ до точки з абсцисою $x = b$ обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Використовуючи формулу

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} l &= \left(\frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \quad \square \end{aligned}$$

У деяких задачах після підстановки похідної у формулу довжини дуги вираз під знаком квадратного кореня може виявитися повним квадратом. У такому випадку підінтегральний вираз суттєво спрощується.

Приклад 36. Обчислити довжину дуги кривої

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

від точки з абсцисою $x = 1$ до точки з абсцисою $x = 2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} 1 + (y')^2 &= 1 + \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Оскільки $x \in [1; 2]$, маємо

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{17}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

Довжина дуги кривої, заданої параметрично

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причому функції $x(t)$ та $y(t)$ мають неперервні похідні. Тоді довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \\ & = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2},$$

а при $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\sin \frac{t}{2} \geq 0,$$

то

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} l &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 4a + 4a = 8a. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 38. Обчислити довжину кола

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Рис. Параметричне задання кола

Розв'язання. Маємо

$$x'(t) = -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t.$$

Тому

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ &= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. \quad \square \end{aligned}$$

Довжина дуги кривої в полярних координатах

Нехай крива задана в полярних координатах рівнянням

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

причому функція $r(\varphi)$ має неперервну похідну. Тоді довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Приклад 39. *Обчислити довжину кардіоїди*

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0.$$

x

Оскільки при $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\cos \frac{\varphi}{2} \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} l &= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 8a. \quad \square \end{aligned}$$

1.11 Завдання для самоконтролю

1. Запишіть формулу для обчислення довжини дуги графіка функції

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

2. Які умови накладаються на функцію f при застосуванні формули довжини дуги графіка функції?

3. Запишіть формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

4. Запишіть формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої в полярних координатах.

5. Обчисліть довжину дуги прямої

$$y = 2x + 1$$

на відрізку $[0; 3]$.

6. Обчисліть довжину кола радіуса R , використовуючи його параметричне задання.

7. Обчисліть довжину дуги кривої

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

8. Обчисліть довжину кривої, заданої параметрично:

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

1.12 Завдання для самостійної роботи №4

Задача 7. Обчислити довжину дуги кривої $y = f(x)$ на заданому проміжку.

Варіант	Функція та проміжок	Варіант	Функція та проміжок
1	$y = \frac{x^2}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$	16	$y = \frac{x^2}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2$
2	$y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2$	17	$y = \frac{x^2}{6}, \quad 0 \leq x \leq 3$
3	$y = \frac{x^2}{8}, \quad 0 \leq x \leq 4$	18	$y = \frac{x^2}{10}, \quad 0 \leq x \leq 5$
4	$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$	19	$y = \frac{1}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 4$
5	$y = \frac{4}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	20	$y = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$
6	$y = \frac{1}{3}(x+1)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$	21	$y = \frac{1}{3}(x+2)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2$
7	$y = \frac{2}{3}(x+2)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	22	$y = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$
8	$y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$	23	$y = \ln(\sin x), \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
9	$y = \ln(\sec x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$	24	$y = \ln(\csc x), \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
10	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$	25	$y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 2 \leq x \leq 4$
11	$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$	26	$y = \frac{x^2}{6} - \frac{3}{4} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 3$
12	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2$	27	$y = \frac{x^3}{9} + \frac{3}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2$
13	$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2$	28	$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 2 \leq x \leq 3$
14	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 3$	29	$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 3$
15	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 2 \leq x \leq 4$	30	$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 3$

Задача 8. Обчислити довжину дуги параметрично заданої кривої.

Варіант	Параметричне задання	Варіант	Параметричне задання
1	$x = t^2, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$	16	$x = 2t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$
2	$x = t^2, \quad y = 4t, \quad 0 \leq t \leq 1$	17	$x = 3t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$
3	$x = t, \quad y = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad 0 \leq t \leq 2$	18	$x = t, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \quad 0 \leq t \leq 1$
4	$x = t^2, \quad y = \frac{2}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$	19	$x = 2t^2, \quad y = \frac{4}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$
5	$x = t^2, \quad y = \frac{4}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$	20	$x = t - \frac{t^3}{3}, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$
6	$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	21	$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$
7	$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$	22	$x = 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$
8	$x = 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	23	$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi$
9	$x = e^t, \quad y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 1$	24	$x = e^{-t}, \quad y = e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1$
10	$x = e^t, \quad y = 2e^t, \quad 0 \leq t \leq 1$	25	$x = 2e^t, \quad y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 1$
11	$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 1$	26	$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 1$
12	$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 1$	27	$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad 1 \leq t \leq 2$
13	$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	28	$x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
14	$x = 3 \cos^3 t, \quad y = 3 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	29	$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
15	$x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$	30	$x = 3 \cos^3 t, \quad y = 3 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

Задача 9. Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах.

Варіант	Рівняння та проміжок	Варіант	Рівняння та проміжок
1	$r = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$	16	$r = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$
2	$r = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2$	17	$r = 2\varphi, \quad 1 \leq \varphi \leq 2$
3	$r = e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$	18	$r = 2e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$
4	$r = e^{-\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$	19	$r = 3e^{-\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$
5	$r = 2e^{2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$	20	$r = 3e^{2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 1$
6	$r = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	21	$r = 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
7	$r = 3 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	22	$r = 4 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
8	$r = 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	23	$r = 2 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
9	$r = 1 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	24	$r = 2e^{-\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \ln 2$
10	$r = 1 + \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	25	$r = 2(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
11	$r = 1 - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	26	$r = 3(1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
12	$r = 1 - \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	27	$r = 2(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
13	$r = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	28	$r = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
14	$r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$	29	$r = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$
15	$r = 2(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	30	$r = 3(1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$x^2 + 1, 0 \leq x \leq 2$$

1.13 Обчислення об'ємів тіл

Визначений інтеграл можна використовувати для обчислення об'ємів тіл. Нехай тіло розташоване між площинами $x = a$ та $x = b$, а площа його поперечного перерізу площиною, перпендикулярною до осі Ox , дорівнює $S(x)$. Тоді об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Розв'язання. За формулою обчислення об'єму маємо:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox

Нехай функція f неперервна та невід'ємна на відрізку $[a; b]$. При обертанні криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції

$$y = f(x),$$

віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, навколо осі Ox утворюється тіло обертання.

x

Приклад 41. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіком функції

$$y = \sqrt{x},$$

віссю Ox та прямою $x = 4$.

x

x

$\mathfrak{a}$

$\mathfrak{x}$

то поперечним перерізом утвореного тіла є кільце. Його площа дорівнює

$$S(x) = \pi (f^2(x) - g^2(x)) .$$

Отже,

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \, dx.$$

Приклад 43. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину графіків:

$$\sqrt{x} = x.$$

Звідси

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

x

Отже,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - x^2) \, dx = \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \quad \square \end{aligned}$$

Об'єм тіла обертання навколо осі Oy

Якщо фігура задана функцією

$$x = \varphi(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

x

y

При обертанні фігури навколо осі Oy не завжди зручно виражати x через y . У таких випадках можна використовувати метод циліндричних оболонок.

Нехай фігура, обмежена графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, розташована праворуч від осі Oy .

x

7. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіком функції

$$y = x,$$

віссю Ox та прямою $x = 2$.

8. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = 2x, \quad y = x^2.$$

9. Використовуючи визначений інтеграл, виведіть формулу об'єму конуса радіуса R та висоти H .

10. Використовуючи визначений інтеграл, виведіть формулу об'єму кулі радіуса R .

1.15 Завдання для самостійної роботи №5

Задача 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо осі Ox .

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 2$	16	$y = x, y = 0, x = 3$
2	$y = x^2, y = 0, x = 2$	17	$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 4$
3	$y = 2x, y = 0, x = 2$	18	$y = x^3, y = 0, x = 2$
4	$y = 4 - x, y = 0, x = 0$	19	$y = 3 - x, y = 0, x = 0$
5	$y = 4 - x^2, y = 0$	20	$y = 9 - x^2, y = 0$
6	$y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 3$	21	$y = \sqrt{x+1}, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
7	$y = x^2 + 1, y = 0, 0 \leq x \leq 1$	22	$y = 2 + \sqrt{x}, y = 0, 0 \leq x \leq 4$
8	$y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$	23	$y = \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
9	$y = e^x, y = 0, 0 \leq x \leq 1$	24	$y = e^{-x}, y = 0, 0 \leq x \leq 1$
10	$y = x, y = \sqrt{x}$	25	$y = x^2, y = \sqrt{x}$
11	$y = 3x, y = x^2$	26	$y = 4x, y = x^2$
12	$y = x + 2, y = x^2$	27	$y = 2 - x, y = x^2$
13	$y = 4, y = x^2$	28	$y = 3, y = x^2 + 2$
14	$y = 2\sqrt{x}, y = x$	29	$y = \sqrt{x}, y = x^3$
15	$y = 2, y = \sqrt{x}, x = 0$	30	$y = 3, y = \sqrt{x}, x = 0$

Задача 11. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо осі Oy , інтегруючи відносно змінної y .

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$x = y^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$	16	$x = 2y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$
2	$x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$	17	$x = y^3, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$
3	$x = y + 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$	18	$x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 4$
4	$x = 4 - y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 4$	19	$x = 3 - y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$
5	$x = 4 - y^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$	20	$x = 9 - y^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$
6	$x = 2\sqrt{y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$	21	$x = \sqrt{y + 1}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$
7	$x = y^2 + 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$	22	$x = 2 + \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 4$
8	$x = \sin y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi$	23	$x = \cos y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
9	$x = e^y, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$	24	$x = e^{-y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$
10	$x = y, \quad x = y^2$	25	$x = \sqrt{y}, \quad x = y$
11	$x = 2y, \quad x = y^2$	26	$x = 3y, \quad x = y^2$
12	$x = y + 2, \quad x = y^2$	27	$x = 2 - y, \quad x = y^2$
13	$x = 4, \quad x = y^2$	28	$x = 3, \quad x = y^2 + 2$
14	$x = 2\sqrt{y}, \quad x = y$	29	$x = \sqrt{y}, \quad x = \frac{y}{2}$
15	$x = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad y = 0$	30	$x = 3, \quad x = \sqrt{y}, \quad y = 0$

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо осі Oy , методом циліндричних оболонок.

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$y = x^2, y = 0, 0 \leq x \leq 3$	16	$y = 2x, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
2	$y = \sqrt{x}, y = 0, 0 \leq x \leq 4$	17	$y = x^3, y = 0, 0 \leq x \leq 2$
3	$y = x + 1, y = 0, 0 \leq x \leq 2$	18	$y = \sqrt{2x}, y = 0, 0 \leq x \leq 4$
4	$y = 4 - x, y = 0, 0 \leq x \leq 4$	19	$y = 3 - x, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
5	$y = 4 - x^2, y = 0, 0 \leq x \leq 2$	20	$y = 9 - x^2, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
6	$y = 2\sqrt{x}, y = 0, 0 \leq x \leq 3$	21	$y = \sqrt{x+1}, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
7	$y = x^2 + 1, y = 0, 0 \leq x \leq 1$	22	$y = 2 + \sqrt{x}, y = 0, 0 \leq x \leq 4$
8	$y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$	23	$y = \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
9	$y = e^x, y = 0, 0 \leq x \leq 1$	24	$y = e^{-x}, y = 0, 0 \leq x \leq 1$
10	$y = x, y = x^2$	25	$y = \sqrt{x}, y = x$
11	$y = 2x, y = x^2$	26	$y = 3x, y = x^2$
12	$y = 3x, y = x^2 + 2$	27	$y = 2 - x, y = x^2, x \geq 0$
13	$y = 4, y = x^2, x \geq 0$	28	$y = 3, y = x^2 + 2, x \geq 0$
14	$y = 2\sqrt{x}, y = x$	29	$y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{2}$
15	$y = 2, y = \sqrt{x}, x \geq 0$	30	$y = 3, y = \sqrt{x}, x \geq 0$

1.16 Обчислення площ поверхонь обертання

Визначений інтеграл можна використовувати не лише для обчислення об'ємів тіл обертання, але й для знаходження площ їх поверхонь.

Нехай функція f невід'ємна на відрізку $[a; b]$ та має неперервну похідну. При обертанні дуги графіка функції

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

навколо осі Ox утворюється поверхня обертання.

Площа цієї поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну:

$$y' = 1.$$

За формулою площі поверхні обертання маємо

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 1^2} dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 x dx = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \sqrt{2}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

x

x

Нехай функція f невід'ємна на відрізку $[a; b]$, причому $a \geq 0$. При обертанні дуги графіка

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

навколо осі Oy площа утвореної поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

x

x

Таким чином, за допомогою визначеного інтеграла отримано відому формулу площі поверхні сфери

$$S = 4\pi R^2.$$

Площа поверхні обертання кривої, заданої параметрично

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Якщо ця крива обертається навколо осі Ox , то площа утвореної поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Якщо крива обертається навколо осі Oy , то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

У випадку, коли $x(t)$ або $y(t)$ є невід'ємними на всьому проміжку зміни параметра, знак модуля у відповідній формулі можна не записувати.

Приклад 50. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої

$$x = t^2, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 1.$$

Оскільки $y(t) = t \geq 0$ при $0 \leq t \leq 1$, то

$$S = 2\pi \int_0^1 t \sqrt{4t^2 + 1} dt.$$

Зробимо заміну

$$u = 4t^2 + 1, \quad du = 8t dt.$$

При цьому

$$t = 0 \implies u = 1,$$

$$t = 1 \implies u = 5.$$

Отже,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{u} \, du = \frac{\pi}{4} \left. \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \\ &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

Площа поверхні обертання кривої, заданої в полярних координатах

Нехай крива задана в полярних координатах рівнянням

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

Тоді елемент довжини дуги має вигляд

$$dl = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} \, d\varphi.$$

Оскільки

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi,$$

то при обертанні кривої навколо осі Ox площа поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} \, d\varphi.$$

При обертанні навколо осі Oy маємо

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \cos \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} \, d\varphi.$$

Зауваження 1.7. При обертанні кривої, заданої в полярних координатах, необхідно врахувати відстань від точки кривої до осі обертання. Оскільки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то відстань до осі Ox дорівнює $|r \sin \varphi|$, а до осі Oy — $|r \cos \varphi|$.

Приклад 51. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої

$$r = 2R \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

одержуємо

$$\begin{aligned} S &= 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 4\pi R^2 \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 R^2. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 52. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги кривої

$$r = a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$r = a,$$

то

$$r'(\varphi) = 0.$$

Отже,

$$\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} = \sqrt{a^2} = a.$$

На проміжку $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ маємо $\cos \varphi \geq 0$, тому

$$|r(\varphi) \cos \varphi| = a \cos \varphi.$$

За формулою площі поверхні обертання навколо осі Oy одержуємо

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2\pi a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^2. \quad \square \end{aligned}$$

При обертанні чверті кола радіуса a навколо осі Oy утворюється півсфера. Тому отриманий результат узгоджується з відомою формулою площі сфери

$$S = 4\pi a^2,$$

оскільки площа півсфери дорівнює $2\pi a^2$.

1.17 Завдання для самоконтролю

1. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні, утвореної обертанням графіка функції

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

навколо осі Ox .

2. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Oy .

3. Чим відрізняються формули площі поверхні при обертанні кривої навколо осей Ox та Oy ?

4. Який геометричний зміст має множник $2\pi f(x)$ у формулі

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx?$$

5. Який вираз у формулі площі поверхні обертання відповідає елементу довжини дуги кривої?

6. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні, утвореної обертанням параметрично заданої кривої навколо осі Ox .

7. Запишіть відповідну формулу для обертання параметрично заданої кривої навколо осі Oy .

8. Як обчислюється площа поверхні обертання кривої, заданої в полярних координатах?

9. Обчисліть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox відрізка прямої

$$y = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

10. Обчисліть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги параболи

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

11. Використовуючи визначений інтеграл, виведіть формулу площі бічної поверхні конуса радіуса R та висоти H .

12. Використовуючи визначений інтеграл, виведіть формулу площі поверхні сфери радіуса R .

1.18 Завдання для самостійної роботи №6

Задача 13. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $y = f(x)$ навколо осі Ox .

Варіант	Функція та проміжок	Варіант	Функція та проміжок
1	$y = x + 2, \quad 0 \leq x \leq 1$	16	$y = 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$
2	$y = 3x, \quad 0 \leq x \leq 1$	17	$y = 4x, \quad 0 \leq x \leq 1$
3	$y = x + 1, \quad 0 \leq x \leq 2$	18	$y = 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$
4	$y = 3 - x, \quad 0 \leq x \leq 2$	19	$y = 4 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$
5	$y = \sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 9$	20	$y = 2\sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4$
6	$y = \sqrt{2x}, \quad 1 \leq x \leq 4$	21	$y = \sqrt{3x}, \quad 1 \leq x \leq 3$
7	$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$	22	$y = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$
8	$y = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$	23	$y = 2x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$
9	$y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	24	$y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2$
10	$y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1$	25	$y = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1$
11	$y = \cosh x, \quad 0 \leq x \leq 1$	26	$y = \sinh x, \quad 0 \leq x \leq 1$
12	$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$	27	$y = \sin x, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
13	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2$	28	$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \leq x \leq 2$
14	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$	29	$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$
15	$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	30	$y = \frac{4}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

Задача 14. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $y = f(x)$ навколо осі Oy .

Варіант	Функція та проміжок	Варіант	Функція та проміжок
1	$y = x, \quad 0 \leq x \leq 1$	16	$y = 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$
2	$y = 3x, \quad 0 \leq x \leq 1$	17	$y = 4x, \quad 1 \leq x \leq 2$
3	$y = x + 2, \quad 0 \leq x \leq 2$	18	$y = 2x + 1, \quad 1 \leq x \leq 3$
4	$y = 3 - x, \quad 0 \leq x \leq 2$	19	$y = 5 - 2x, \quad 1 \leq x \leq 2$
5	$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3$	20	$y = x^2, \quad 1 \leq x \leq 2$
6	$y = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$	21	$y = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$
7	$y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	22	$y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 3$
8	$y = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$	23	$y = 2x^2 + 3, \quad 0 \leq x \leq 1$
9	$y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$	24	$y = 2x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$
10	$y = \frac{x^3}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$	25	$y = \frac{x^3}{6}, \quad 0 \leq x \leq 2$
11	$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2$	26	$y = \frac{4}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$
12	$y = \frac{1}{2}x^2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1$	27	$y = x^2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1$
13	$y = \frac{1}{3}x^3 + x, \quad 0 \leq x \leq 1$	28	$y = \frac{1}{6}x^3 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$
14	$y = \sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4$	29	$y = 2\sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4$
15	$y = \sqrt{2x}, \quad 1 \leq x \leq 4$	30	$y = \sqrt{3x}, \quad 1 \leq x \leq 3$

Задача 15. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги параметрично заданої кривої навколо вказаної осі.

Вар.	Крива	Вісь	Вар.	Крива	Вісь
1	$x = t, y = t$ $0 \leq t \leq 1$	Ox	16	$x = t, y = 3t$ $0 \leq t \leq 1$	Oy
2	$x = t, y = 2t$ $0 \leq t \leq 1$	Oy	17	$x = 3t, y = t$ $0 \leq t \leq 2$	Ox
3	$x = 2t, y = t$ $0 \leq t \leq 2$	Ox	18	$x = t + 2, y = t$ $0 \leq t \leq 2$	Oy
4	$x = t + 1, y = t$ $0 \leq t \leq 2$	Oy	19	$x = t, y = t + 2$ $0 \leq t \leq 2$	Ox
5	$x = t, y = t + 1$ $0 \leq t \leq 2$	Ox	20	$x = 3t, y = t^2$ $0 \leq t \leq 1$	Oy
6	$x = 2t, y = t^2$ $0 \leq t \leq 1$	Oy	21	$x = t^2, y = 3t$ $0 \leq t \leq 1$	Ox
7	$x = t^2, y = 2t$ $0 \leq t \leq 1$	Ox	22	$x = 3t + 1, y = t^2$ $0 \leq t \leq 1$	Oy
8	$x = 2t + 1, y = t^2$ $0 \leq t \leq 1$	Oy	23	$x = t^2, y = 3t + 1$ $0 \leq t \leq 1$	Ox
9	$x = t^2, y = 2t + 1$ $0 \leq t \leq 1$	Ox	24	$x = \cos t, y = \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$	Ox
10	$x = \cos t, y = \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	Oy	25	$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$	Oy
11	$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	Ox	26	$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$	Ox
12	$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$	Oy	27	$x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	Ox
13	$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	Ox	28	$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$	Oy
14	$x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	Oy	29	$x = e^t, y = 2e^t$ $0 \leq t \leq 1$	Ox
15	$x = e^t, y = e^t$ $0 \leq t \leq 1$	Ox	30	$x = e^{-t}, y = e^{-t}$ $0 \leq t \leq 1$	Oy

Задача 16. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої, заданої в полярних координатах, навколо вказаної осі.

Вар.	Крива	Вісь	Вар.	Крива	Вісь
1	$r = 2 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox	16	$r = 3 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy
2	$r = 2 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy	17	$r = 4 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox
3	$r = 3 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	Ox	18	$r = 4 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	Oy
4	$r = 3 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	Oy	19	$r = 2 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	Ox
5	$r = 4 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	Ox	20	$r = 2 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	Oy
6	$r = 4 \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$	Oy	21	$r = 1 + \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox
7	$r = 2 + \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox	22	$r = 1 + \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy
8	$r = 2 + \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy	23	$r = 2(1 + \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox
9	$r = 1 + \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Ox	24	$r = 2(1 + \sin \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy
10	$r = 1 + \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Oy	25	$r = 2(1 - \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Ox
11	$r = 1 - \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Ox	26	$r = 2(1 - \sin \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy
12	$r = 1 - \sin \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy	27	$r = 3(1 + \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox
13	$r = 2(1 + \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Ox	28	$r = 3(1 + \sin \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy
14	$r = 2(1 + \sin \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Oy	29	$r = 3(1 - \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	Ox
15	$r = 3 \cos \varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Ox	30	$r = 3(1 - \sin \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	Oy

1.19 Застосування визначеного інтеграла до розв'язування фізичних задач

Визначений інтеграл широко використовується для розв'язування фізичних задач. За його допомогою можна обчислювати роботу змінної сили, масу неоднорідного тіла, координати центра мас, силу тиску рідини та інші фізичні величини.

Основна ідея застосування визначеного інтеграла полягає в тому, що досліджувану величину спочатку обчислюють для достатньо малого елемента, а потім отримані елементарні величини підсумовують за допомогою інтегрування.

Робота змінної сили

Якщо стала сила F переміщує матеріальну точку в напрямку своєї дії на відстань s , то виконана робота дорівнює

$$A = Fs.$$

Якщо сила змінюється залежно від положення точки, тобто

$$F = F(x),$$

то робота при переміщенні точки від $x = a$ до $x = b$ обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Приклад 53. Матеріальна точка рухається вздовж осі Ox під дією сили

$$F(x) = 3x^2 + 2.$$

Обчислити роботу цієї сили при переміщенні точки від $x = 0$ до $x = 2$.

Розв'язання. За формулою роботи змінної сили маємо

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (3x^2 + 2) dx = (x^3 + 2x) \Big|_0^2 = \\ &= 8 + 4 = 12. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 54. Сила, що діє на матеріальну точку, змінюється за законом

$$F(x) = \frac{10}{(x+1)^2}.$$

Обчислити роботу цієї сили при переміщенні точки від $x = 0$ до $x = 4$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \frac{10}{(x+1)^2} dx = 10 \left(-\frac{1}{x+1} \right) \Big|_0^4 = \\ &= 10 \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 8. \quad \square \end{aligned}$$

Робота при деформації пружини

Згідно із законом Гука сила, необхідна для розтягування або стискання пружини, пропорційна величині її деформації:

$$F(x) = kx,$$

де $k > 0$ – коефіцієнт жорсткості пружини, а x – величина деформації.

Тому робота, необхідна для деформації пружини від $x = a$ до $x = b$, дорівнює

$$A = \int_a^b kx dx.$$

розтягнута

недеформована

звідки

$$k = 1000 \text{ Н/м.}$$

Тепер обчислимо необхідну роботу:

$$\begin{aligned} A &= \int_{0,04}^{0,06} 1000x \, dx = 500 x^2 \Big|_{0,04}^{0,06} = \\ &= 500(0,0036 - 0,0016) = 1 \text{ . } \square \end{aligned}$$

Маса неоднорідного стержня

Якщо стержень є однорідним, то його маса пропорційна довжині. Для неоднорідного стержня вводять поняття лінійної густини.

Лінійною густиною стержня називають фізичну величину, яка характеризує масу, що припадає на одиницю його довжини.

Для однорідного стержня лінійна густина є сталою і дорівнює

$$\rho = \frac{m}{l},$$

де m – маса стержня, а l – його довжина. Одиницею вимірювання лінійної густини в системі СІ є кг/м.

Для неоднорідного стержня лінійна густина може змінюватися від точки до точки. Нехай стержень розташований вздовж осі Ox від точки $x = a$ до точки $x = b$, а його лінійна густина задається функцією

$$\rho = \rho(x).$$

Маса малої ділянки стержня довжини dx наближено дорівнює

$$dm = \rho(x) \, dx.$$

Тому маса всього стержня обчислюється за формулою

$$m = \int_a^b \rho(x) \, dx.$$

Приклад 57. Стержень розташований на відрізку $[0; 2]$, а його лінійна густина змінюється за законом

$$\rho(x) = x^2 + 1.$$

Обчислити масу стержня.

Розв'язання. Маса стержня дорівнює

$$\begin{aligned} m &= \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 58. Стержень довжиною 3 м має лінійну гуштину

$$\rho(x) = 2 + x.$$

Обчислити масу стержня.

Розв'язання. Вважатимемо, що стержень розташований на відрізку $[0; 3]$. Тоді

$$\begin{aligned} m &= \int_0^3 (2 + x) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\ &= 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Статичний момент та центр мас стержня

Нехай неоднорідний стержень розташований на відрізку $[a; b]$, а його лінійна густина дорівнює $\rho(x)$.

Розглянемо малу ділянку стержня довжини dx , розташовану на відстані x від початку координат. Її маса дорівнює

$$dm = \rho(x) dx.$$

Добуток маси матеріальної точки на її координату називають її статичним моментом відносно початку координат. Тому статичний момент елементарної ділянки стержня дорівнює

$$dM = x dm = x\rho(x) dx.$$

Статичний момент усього стержня отримуємо підсумовуванням статичних моментів усіх його елементарних ділянок:

$$M = \int_a^b x \rho(x) dx.$$

Рис. Центр мас стержня

Приклад 59. Знайти координату центра мас стержня, розташованого на відрізку $[0; 2]$, якщо його лінійна густина змінюється за законом

$$\rho(x) = x + 1.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо масу стержня:

$$m = \int_0^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = 4.$$

Статичний момент відносно початку координат дорівнює

$$\begin{aligned} M &= \int_0^2 x(x + 1) dx = \int_0^2 (x^2 + x) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{6}. \quad \square$$

Зауваження 1.8. Якщо стержень однорідний, тобто $\rho(x) = \text{const}$, то його центр мас знаходиться посередині стержня.

Маса та центр мас плоскої фігури

Розглянемо плоску фігуру, обмежену графіками функцій

$$y = f(x), \quad y = g(x),$$

та прямими $x = a$, $x = b$, причому

$$f(x) \geq g(x).$$

Якщо поверхнева густина пластинки є сталою і дорівнює ρ , то її маса дорівнює

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

При $\rho = 1$ маса чисельно дорівнює площі фігури.

Координати центра мас однорідної пластинки обчислюються за формулами

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx},$$
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}.$$

Сила гідростатичного тиску

Тиск рідини залежить від глибини. Якщо ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, а h – глибина, то гідростатичний тиск визначається за формулою

$$p = \rho g h.$$

Для обчислення сили тиску на вертикальну пластинку її розбивають на вузькі горизонтальні смужки.

Нехай на глибині y ширина пластинки дорівнює $l(y)$. Тоді елементарна сила тиску на смужку товщини dy дорівнює

$$dF = \rho g y l(y) dy.$$

Отже, повна сила гідростатичного тиску обчислюється за формулою

$$F = \rho g \int_a^b y l(y) dy.$$

поверхня рідини

пластинка

поверхня води

$$dF = \rho g y \cdot 2 dy$$

2 м

поверхня води

$l(y)$

Позначимо

$$V(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} L &= (V(1) - V(0)) - (V(3) - V(1)) + (V(4) - V(3)) = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4. \end{aligned}$$

Отже, переміщення точки дорівнює

$$s = \frac{4}{3},$$

а пройдений шлях

$$L = 4. \quad \square$$

1.20 Завдання для самоконтролю

1. Запишіть формулу для обчислення роботи змінної сили $F = F(x)$ при переміщенні матеріальної точки від $x = a$ до $x = b$.

2. Сформулюйте закон Гука.

3. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислюється робота при розтягуванні або стисканні пружини?

4. Що називають лінійною густиною стержня?

5. Запишіть формулу для обчислення маси неоднорідного стержня.

6. Запишіть формулу для обчислення статичного моменту неоднорідного стержня відносно початку координат.

7. Як обчислюється координата центра мас неоднорідного стержня?

8. Запишіть формули для обчислення координат центра мас однорідної плоскої пластинки, обмеженої графіками двох функцій.

9. Від чого залежить гідростатичний тиск рідини?

10. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислюється сила гідростатичного тиску на вертикальну пластинку?

11. Як обчислюється переміщення матеріальної точки, якщо відома її швидкість $v = v(t)$?

12. У чому полягає відмінність між переміщенням та пройденим шляхом?

13. Сила змінюється за законом

$$F(x) = 4x + 1.$$

Обчисліть роботу сили при переміщенні матеріальної точки від $x = 1$ до $x = 3$.

14. Лінійна густина стержня довжиною 2 м задається функцією

$$\rho(x) = 3 + x^2.$$

Обчисліть його масу.

15. Знайдіть координату центра мас стержня, розташованого на відрізьку $[0; 1]$, якщо

$$\rho(x) = 2x + 1.$$

16. Матеріальна точка рухається зі швидкістю

$$v(t) = 2t - 4.$$

Обчисліть її переміщення та пройдений шлях за проміжок часу $0 \leq t \leq 4$.

1.21 Завдання для самостійної роботи №7

Задача 17. Обчислити роботу змінної сили.

Варіант	Умова	Варіант	Умова
1	$F(x) = 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 4$	16	$k = 120, \quad 0 \leq x \leq 0,2$
2	$k = 200, \quad 0 \leq x \leq 0,1$	17	$F(x) = 3x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 2$
3	$F(x) = x^2 + 4, \quad 0 \leq x \leq 3$	18	$k = 250, \quad 0,1 \leq x \leq 0,3$
4	$k = 300, \quad 0 \leq x \leq 0,2$	19	$F(x) = 4x + 1, \quad 1 \leq x \leq 5$
5	$F(x) = 4x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$	20	$k = 400, \quad 0 \leq x \leq 0,15$
6	$k = 150, \quad 0,1 \leq x \leq 0,3$	21	$F(x) = \frac{12}{(x+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq 3$
7	$F(x) = 6x + 2, \quad 0 \leq x \leq 3$	22	$k = 500, \quad 0,05 \leq x \leq 0,2$
8	$k = 240, \quad 0 \leq x \leq 0,25$	23	$F(x) = 2x^3 + x, \quad 0 \leq x \leq 2$
9	$F(x) = 3x^2 + x, \quad 0 \leq x \leq 2$	24	$k = 320, \quad 0 \leq x \leq 0,25$
10	$k = 180, \quad 0,1 \leq x \leq 0,4$	25	$F(x) = 5x^2 + 3, \quad 0 \leq x \leq 2$
11	$F(x) = 5x + 4, \quad 1 \leq x \leq 3$	26	$k = 600, \quad 0,1 \leq x \leq 0,2$
12	$k = 350, \quad 0 \leq x \leq 0,2$	27	$F(x) = \frac{12}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 3$
13	$F(x) = x^3 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$	28	$k = 450, \quad 0 \leq x \leq 0,3$
14	$k = 280, \quad 0,05 \leq x \leq 0,25$	29	$F(x) = 4\sqrt{x} + 2, \quad 0 \leq x \leq 4$
15	$F(x) = 2x^2 + 5, \quad 0 \leq x \leq 3$	30	$k = 220, \quad 0,1 \leq x \leq 0,3$

Задача 18. Для неоднорідного стержня із заданою лінійною густиною $\rho = \rho(x)$ обчислити вказані характеристики.

Варіант	Умова	Варіант	Умова
1	$\rho = x + 2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$	16	$\rho = 2x + 3, 0 \leq x \leq 3;$ $m, \bar{x}$
2	$\rho = 2x + 1, 0 \leq x \leq 3;$ $m, \bar{x}$	17	$\rho = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$
3	$\rho = x^2 + 4, 0 \leq x \leq 2; m, M$	18	$\rho = 3x + 1, 1 \leq x \leq 3;$ m, M
4	$\rho = 3x + 2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$	19	$\rho = x^2 + x + 1, 0 \leq x \leq 2;$ $m, \bar{x}$
5	$\rho = x^2 + 2x + 1, 0 \leq x \leq 2;$ $m, \bar{x}$	20	$\rho = 4 - x, 0 \leq x \leq 3;$ $m, M, \bar{x}$
6	$\rho = 4 - x, 0 \leq x \leq 2;$ m, M	21	$\rho = \sqrt{x} + 1, 0 \leq x \leq 4;$ m, M
7	$\rho = \sqrt{x} + 2, 0 \leq x \leq 4;$ $m, M, \bar{x}$	22	$\rho = 2\sqrt{x} + 1, 0 \leq x \leq 4;$ $m, \bar{x}$
8	$\rho = x^2 + 3, 0 \leq x \leq 2;$ $m, \bar{x}$	23	$\rho = x^3 + 1, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$
9	$\rho = x^3 + 2, 0 \leq x \leq 2;$ m, M	24	$\rho = 5 - 2x, 0 \leq x \leq 2;$ m, M
10	$\rho = 5 - x, 0 \leq x \leq 4;$ $m, M, \bar{x}$	25	$\rho = (x + 1)^2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, \bar{x}$
11	$\rho = (x + 1)^2, 0 \leq x \leq 3;$ $m, \bar{x}$	26	$\rho = 2x^2 + 1, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$
12	$\rho = 2x^2 + 3, 0 \leq x \leq 2;$ m, M	27	$\rho = 3 + \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4;$ m, M
13	$\rho = 1 + \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 4;$ $m, M, \bar{x}$	28	$\rho = 2 + \frac{x}{3}, 0 \leq x \leq 3;$ $m, \bar{x}$
14	$\rho = 6 - x^2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, \bar{x}$	29	$\rho = 5 - x^2, 0 \leq x \leq 2;$ $m, M, \bar{x}$
15	$\rho = x^2 + x + 2, 0 \leq x \leq 2;$ m, M	30	$\rho = x^3 + x + 1, 0 \leq x \leq 2;$ m, M

Задача 19. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластинки, обмеженої заданими лініями.

Варіант	Лінії	Варіант	Лінії
1	$y = 4x, \quad y = x^2$	16	$y = x^2, \quad y = x + 6$
2	$y = 2x - x^2, \quad y = 0$	17	$y = 3x - x^2, \quad y = 0$
3	$y = 4 - x^2, \quad y = 0, \quad x \geq 0$	18	$y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x \geq 0$
4	$y = x^2, \quad y = 2x$	19	$y = x^2, \quad y = 3x$
5	$y = x^2, \quad y = x + 2$	20	$y = x^2, \quad y = 2x + 3$
6	$y = 4 - x^2, \quad y = x^2$	21	$y = 8 - x^2, \quad y = x^2$
7	$y = \sqrt{x}, \quad y = x$	22	$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{x}{2}$
8	$y = 2\sqrt{x}, \quad y = x$	23	$y = 3\sqrt{x}, \quad y = x$
9	$y = x - x^2, \quad y = 0$	24	$y = 4x - x^2, \quad y = 0$
10	$y = x^2 - 2x, \quad y = 0$	25	$y = x^2 - 4x, \quad y = 0$
11	$y = 1 - x^2, \quad y = 0$	26	$y = 4 - x^2, \quad y = 0$
12	$y = x^2, \quad y = 4$	27	$y = x^2, \quad y = 9$
13	$y = x^2 - 1, \quad y = x + 1$	28	$y = x^2 - 2, \quad y = x + 2$
14	$y = x^2 - 2x, \quad y = x$	29	$y = x^2 - 3x, \quad y = x$
15	$y = 2 - x, \quad y = x^2$	30	$y = 3 - x, \quad y = x^2$

Задача 20. Обчислити силу гідростатичного тиску води на вертикальну пластинку заданої форми. Вважати $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Для прямокутної пластинки розміри наведено у форматі “ширина $\times$ висота”. Для трикутної пластинки b позначає довжину горизонтальної основи, а h — висоту. Якщо вказано глибину основи або вершини трикутника, вважати, що цей елемент розташований вище за інші точки пластинки.

Варіант	Умова	Варіант	Умова
1	прямокутник $5 \times 3 \text{ м}$, верхня сторона на поверхні	16	прямокутник $3 \times 2 \text{ м}$, верхня сторона на глибині 1 м
2	трикутник: $b = 5$, $h = 3 \text{ м}$, вершина на поверхні	17	трикутник: $b = 6$, $h = 3 \text{ м}$, основа на поверхні
3	прямокутник $4 \times 2 \text{ м}$, верхня сторона на поверхні	18	прямокутник $2 \times 4 \text{ м}$, верхня сторона на глибині 2 м
4	трикутник: $b = 3$, $h = 3 \text{ м}$, основа на поверхні	19	трикутник: $b = 4$, $h = 4 \text{ м}$, вершина на поверхні
5	квадрат зі стороною 2 м , верхня сторона на глибині 1 м	20	квадрат зі стороною 3 м , верхня сторона на поверхні
6	трикутник: $b = 6$, $h = 2 \text{ м}$, вершина на поверхні	21	трикутник: $b = 5$, $h = 2 \text{ м}$, основа на поверхні
7	прямокутник $3 \times 4 \text{ м}$, верхня сторона на глибині 1 м	22	прямокутник $5 \times 2 \text{ м}$, верхня сторона на поверхні
8	трикутник: $b = 4$, $h = 3 \text{ м}$, основа на глибині 1 м	23	трикутник: $b = 6$, $h = 4 \text{ м}$, вершина на глибині 1 м
9	квадрат зі стороною 4 м , верхня сторона на поверхні	24	квадрат зі стороною 2 м , верхня сторона на глибині 3 м
10	трикутник: $b = 8$, $h = 4 \text{ м}$, вершина на поверхні	25	трикутник: $b = 4$, $h = 2 \text{ м}$, основа на глибині 2 м
11	прямокутник $2 \times 5 \text{ м}$, верхня сторона на поверхні	26	прямокутник $4 \times 3 \text{ м}$, верхня сторона на глибині 2 м
12	трикутник: $b = 5$, $h = 3 \text{ м}$, основа на поверхні	27	трикутник: $b = 3$, $h = 2 \text{ м}$, вершина на поверхні
13	прямокутник $6 \times 2 \text{ м}$, верхня сторона на глибині 1 м	28	прямокутник $3 \times 3 \text{ м}$, верхня сторона на поверхні
14	трикутник: $b = 6$, $h = 3 \text{ м}$, вершина на глибині 2 м	29	трикутник: $b = 5$, $h = 4 \text{ м}$, основа на глибині 1 м
15	квадрат зі стороною 3 м , верхня сторона на глибині 2 м	30	квадрат зі стороною 4 м , верхня сторона на глибині 1 м

Основні формули

1. Визначений інтеграл

Формула Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

Заміна змінної:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

2. Невласні інтеграли

Невласний інтеграл першого роду:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Невласний інтеграл другого роду:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

при особливій точці $x = a$,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

при особливій точці $x = b$.

3. Площі плоских фігур

Площа під графіком:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Площа між двома кривими:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Інтегрування відносно y :

$$S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy.$$

Параметричне задання:

$$S = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)| dt$$

Полярні координати:

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

4. Довжина дуги кривої

Для $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Параметрично задана крива:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Полярні координати:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

5. Об'єми тіл

За площею поперечного перерізу:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Обертання навколо осі Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Метод шайб:

$$V = \pi \int_a^b (R^2(x) - r^2(x)) dx.$$

Обертання навколо осі Oy :

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Метод циліндричних оболонок:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Для області між двома кривими:

$$V = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx.$$

6. Площі поверхонь обертання

Обертання $y = f(x)$ навколо Ox :

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Обертання $y = f(x)$ навколо Oy :

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Параметрично задана крива, навколо Ox :

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Параметрично задана крива, навколо Oy :

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Полярні координати, навколо Ox :

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Полярні координати, навколо Oy :

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \cos \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

7. Фізичні застосування

Робота змінної сили:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Робота сили пружності:

$$A = \int_a^b kx dx = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

Маса неоднорідного стержня:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Статичний момент:

$$M = \int_a^b x\rho(x) dx.$$

Центр мас стержня:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

Для однорідної плоскої пластинки $g(x) \leq y \leq f(x)$:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{S},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx}{S}.$$

Гідростатичний тиск:

$$p = \rho g y.$$

Сила гідростатичного тиску:

$$F = \rho g \int_a^b y l(y) dy.$$

Переміщення матеріальної точки:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Шлях матеріальної точки:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- [1] Баранівська А.Ф., Герус О.Ф., Осадчий М.М., Таргонський Л.П. *Курс математичного аналізу. Функції однієї змінної*. – Житомир. – 2002. – 326 с.
- [2] Баранівська А.Ф., Осадчий М.М., Таргонський Л.П. *Курс математичного аналізу. Функції багатьох змінних*. – Житомир. – 2000. – 296 с.
- [3] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч.1*. – К.: Вища школа. – 1990. – 383 с.
- [4] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч.2*. – К.: Вища школа. – 1991. – 368 с.
- [5] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч. 3*. – К.: Вища школа. – 1992. – 360 с.
- [6] Шунда Н.М., Томусяк А.А. *Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення*. – К.: Вища школа, 1993.
- [7] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина I*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2022.
- [8] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина II*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2023.
- [9] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина III*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2024.
- [10] Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Таргонський А.Л. *Елементи теорії функцій дійсної змінної*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2018.