

Костюк Наталія Миколаївна, здобувачка вищої освіти фізико-математичного факультету

Житомирський державний університет імені Івана Франка; Україна

Науковий керівник: Фонарюк Олена Василівна, канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики

Житомирський державний університет імені Івана Франка; Україна

СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ

Навчання стереометрії в старшій школі передбачає не лише засвоєння теоретичних положень і способів розв'язування типових задач, а й установлення та аналіз геометричних залежностей. Правильне розв'язання типової задачі ще не засвідчує готовності учня самостійно висувати й перевіряти припущення. Тому особливого методичного значення набувають стереометричні задачі дослідницького характеру, що передбачають варіювання умов, висування й перевірку гіпотез, зіставлення способів розв'язання та формулювання узагальнень. О. Жерновникова та співавтори пов'язують формування дослідницької компетентності на уроках геометрії з особистісно орієнтованим підходом [1]. Аналіз задачного матеріалу профільної школи, проведений З. Сердюк і Д. Ярмоленком, підкреслює значення його обґрунтованого добору [3].

Дослідницьку компетентність розглядаємо як здатність учня виявляти проблему, виокремлювати змінні, формулювати гіпотезу, обирати спосіб її перевірки, обґрунтовувати результати та визначати межі застосовності отриманих висновків. Дослідницький характер задачі визначається насамперед можливістю висування й перевірки припущень, обґрунтованого вибору способу розв'язання та узагальнення отриманих результатів, а не складністю обчислень. Навіть стандартна задача може набути дослідницьких ознак, якщо її розв'язування передбачає варіювання умов, установлення залежностей, аналіз граничних випадків або порівняння кількох способів розв'язання. Методичні можливості варіативного розв'язування стереометричних задач для розвитку критичності мислення розкривають Л. Ізюмченко й А. Ткачевська [2].

На основі аналізу науково-методичної літератури та задачного матеріалу виокремлено п'ять критеріїв добору стереометричних задач дослідницького характеру: наявність проблемної ситуації, що передбачає висування й перевірку припущень або встановлення закономірностей; доступність дослідження шкільними математичними засобами; можливість переходу між рисунком, просторовою моделлю й аналітичним записом; необхідність обґрунтування отриманих результатів та їх узагальнення; відповідність змісту задачі рівню підготовки учнів.

За мірою самостійності дослідницької діяльності учнів розрізняємо три рівні: базовий, коли дослідження відбувається за готовим планом; пошуковий, що передбачає самостійне висування гіпотези та вибір способу її перевірки; узагальнювальний, на якому учні варіюють умову, аналізують окремі та граничні випадки, формулюють узагальнення й нові запитання. Такий поділ відображає

характер і ступінь самостійності дослідницької діяльності учнів, а не лише складність задачі.

Роботу над задачею організовуємо в п'ять етапів: постановка проблеми; моделювання й висування припущення; перевірка припущення; математичне обґрунтування; рефлексія та узагальнення. Важливо наголошувати, що підтвердження гіпотези на окремих прикладах або за допомогою комп'ютерної моделі не замінює математичного доведення для всіх допустимих значень параметра.

Розглянемо приклад стереометричної задачі дослідницького характеру для учнів 10-11 класів. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a точка M рухається вздовж ребра AA_1 . Потрібно встановити залежність площі трикутника BDM від довжини AM , знайти її найменше й найбільше значення та дослідити зміну кута між площинами BDM і $ABCD$. На початковому етапі учні висувають припущення про зміну площі трикутника BDM під час переміщення точки M від A до A_1 (рис. 1).

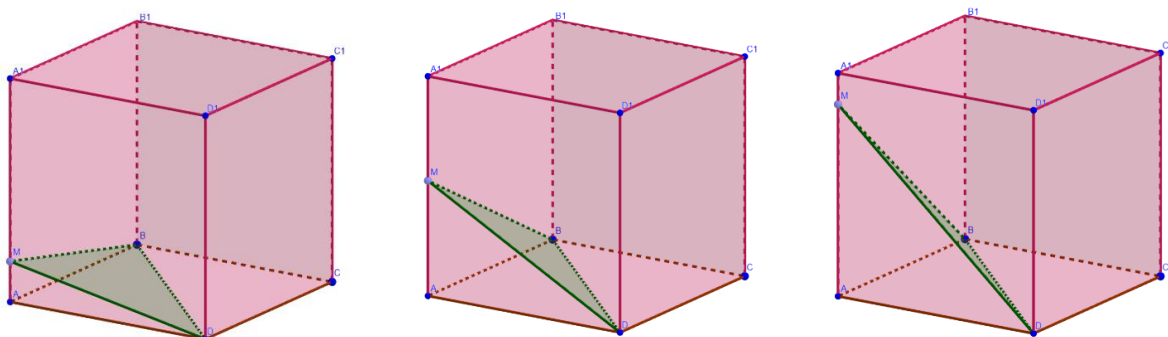


Рис. 1. Зміна площі $\triangle BDM$ при переміщенні точки M від A до A_1

Нехай $AM = t$, де $0 \leq t \leq a$, а H – основа перпендикуляра з A до діагоналі BD . Маємо $BD = a\sqrt{2}$ і $AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Оскільки AM перпендикулярна площині $ABCD$, то AM перпендикулярна AH . Із прямокутного трикутника MAH визначаємо (рис. 2):

$$MH = \sqrt{AH^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + t^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 2t^2}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 2t^2}}{\sqrt{2}}.$$

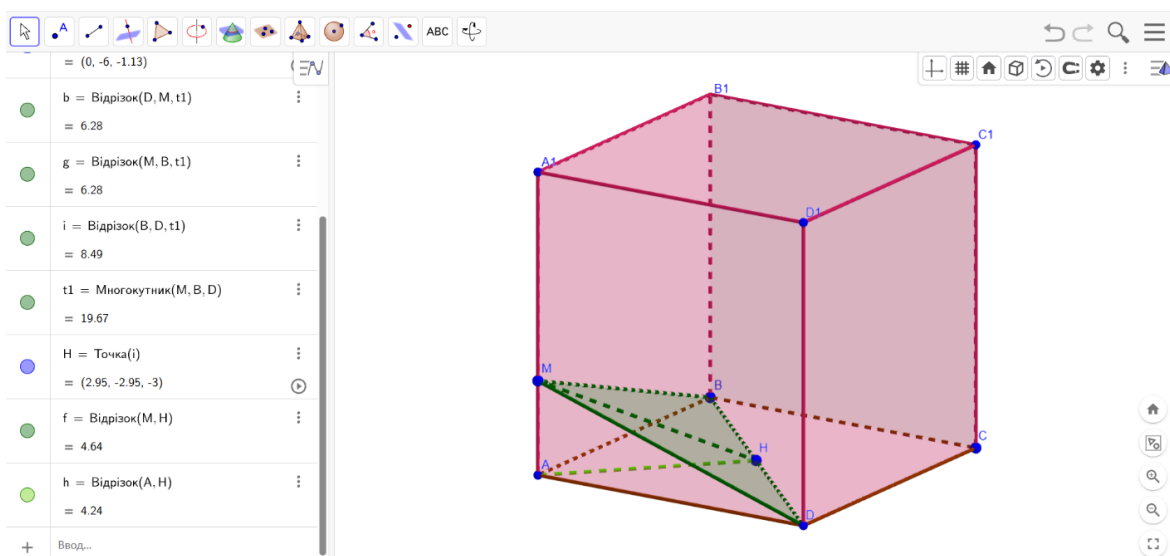


Рис. 2. $\triangle BDM$ та допоміжна побудова

Оскільки BD перпендикулярна AN і AM , то MH перпендикулярна BD (рис. 2), площа трикутника BDM задається формулою:

$$S(t) = \frac{1}{2} BD \cdot MH = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+2t^2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{a^2 + 2t^2}.$$

Порівняння квадратів площ для $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$ показує, що різниця становить:

$$S^2(t_2) - S^2(t_1) = \frac{a^2}{2} (t_2^2 - t_1^2) \text{ і є додатною. Отже, площа строго зростає:}$$

мінімум $S_{min} = \frac{a^2}{2}$ досягається при $M = A$, максимум $S_{max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ – при $M = A_1$. Таке обґрунтування монотонності не потребує використання похідної.

●	g = Відрізок(M, B, t1)	⋮
	= 6.28	
●	i = Відрізок(B, D, t1)	⋮
	= 8.49	
●	t1 = Многокутник(M, B, D)	⋮
	= 19.67	
●	H = Точка(i)	⋮
	= (2.95, -2.95, -3)	⊙
●	f = Відрізок(M, H)	⋮
	= 4.64	
●	h = Відрізок(A, H)	⋮
	= 4.24	
●	φ = Кут(A, H, M)	⋮
	= 23.75°	
+	Ввод...	

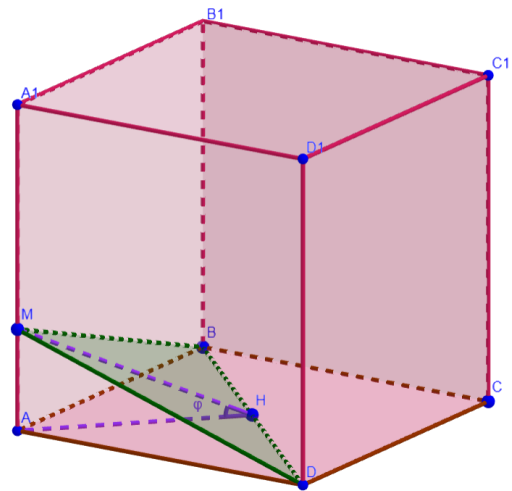


Рис. 3. Кут φ між площинами BDM і $ABCD$

Прямі AN і MH перпендикулярні BD , тому для $t > 0$ кут φ між ними є лінійним кутом двогранного кута площин BDM і $ABCD$ (рис. 3).

$tg \varphi = \frac{AM}{AH} = \frac{t}{a} = \frac{\sqrt{2}t}{a}$. Отже, він зростає разом із t . При $t=0$ площини BDM і $ABCD$ збігаються, тому $\varphi = 0$, що узгоджується з отриманою залежністю.

У GeoGebra 3D учні моделюють куб, задають параметр положення точки M , спостерігають за зміною площі й кута, формують і перевіряють припущення та зіставляють результати комп'ютерного моделювання з математичним доведенням. Н. Nuralam, А. Jupri та W. Alifulloh відзначають позитивний вплив проблемно орієнтованого навчання з використанням GeoGebra на математичне міркування учнів під час вивчення просторової геометрії [4].

Отже, стереометрична задача набуває дослідницького характеру, якщо її розв'язування передбачає не лише виконання обчислень, а й установлення залежностей, висування та перевірку гіпотез, обґрунтування отриманих результатів і формулювання узагальнень. Виокремлено п'ять критеріїв добору таких задач, три рівні самостійності учнів та п'ятиетапну організацію роботи над ними. Практична цінність запропонованого підходу полягає в поєднанні математичного моделювання, висування й перевірки припущень, доведення та узагальнення отриманих результатів.

Список використаних джерел

1. Жерновникова О., Брусенцова О., Замоздра Т., Юсупов Е. Методика формування дослідницької компетентності учнів на уроках геометрії на засадах особистісно орієнтованого підходу. Наумовські читання : матеріали XXI Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених (м. Харків, 23-24 листопада 2023 р.). Харків, 2024. С. 125-127. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/15938> (дата звернення: 10.10.2026).
2. Ізюмченко Л. В., Ткачевська А. П. Моделювання розв'язування стереометричних задач як ключовий елемент формування критичності мислення. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2025. Вип. 2 (26). С. 56-66. URL: <https://doi.org/10.24139/2519-2361/2025.02/56-66> (дата звернення: 10.10.2026).
3. Сердюк З. О., Ярмоленко Д. А. Аналіз задачного матеріалу курсу стереометрії для класів фізико-математичного профілю. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2025. Вип. 1 (25). С. 28-36. URL: https://fizmat.sspu.edu.ua/images/NAUKA/APPMO/%D0%90%D0%9F%D0%9F%D0%9C%D0%9E_2025_125/appmo_125_2025-28-36_cc7b3.pdf (дата звернення: 10.10.2026).
4. Nuralam H., Jupri A., Alifulloh W. Exploring high school students' mathematical reasoning in geometry using GeoGebra-assisted problem-based learning. JTP – Jurnal Teknologi Pendidikan. 2024. Vol. 26, No. 3. P. 1132-1147. URL: <https://journal.unj.ac.id/unj/index.php/jtp/article/view/49887> (дата звернення: 10.10.2026).