Секція: Освіта та педагогіка

Формування дослідницьких умінь старшокласників при розв'язуванні задач математичного аналізу СКА

Захаркевич Марія Вікторівна, здобувач освіти 2 курсу другого (магістерського) рівня вищої освіти, спеціальності 014 Середня освіта,
Науковий керівник:
Чемерис Ольга Анатоліївна, кандидат педагогічних наук, доцент,
Кафедра математики,
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

Початки математичного аналізу в старшій школі учні нерідко сприймають як набір алгоритмів: знайти границю, обчислити похідну, взяти інтеграл. Значну частину уроку забирають громіздкі перетворення, у яких легко помилитися, а на питання «чому це так і коли це перестає бути правильним» часу вже не вистачає. Системи комп'ютерної алгебри (СКА) — GeoGebra CAS, Maple, Wolfram Mathematica, SageMath та ін. — виконують символьні й чисельні обчислення за лічені секунди, що дає змогу змінити розподіл навчального часу: від відпрацювання техніки до дослідження. Функціональні можливості систем комп'ютерної математики, зокрема GeoGebra, для розв'язування задач порівняно в [1].

Мета дослідження — обґрунтувати методику організації навчального дослідження границь, похідної та інтеграла з використанням символьних і чисельних обчислень СКА, спрямовану на формування дослідницьких умінь старшокласників.

Теоретичною основою слугують праці з інструментального підходу до використання СКА. М. Артіг показує, що освоєння засобу («інструментальний генезис») складніше, ніж зазвичай очікують, і що технічна та концептуальна робота учня перебувають у діалектичному зв'язку [2]. К. Рутвен підкреслює, що використання засобу змінює і техніку розв'язування, і розуміння математичних об'єктів [6]. За описом П. Дрейверса, у дослідженні М. Гайд учні, які делегували обчислення технології, майже не поступалися контрольній групі у виконанні обчислень вручну й самі зазначали, що могли зосередитися на загальному процесі розв'язування [3; 4]. Водночас результат залежить від добору завдань, що використовують потенціал засобу, і від ролі вчителя, який пов'язує роботу в СКА з роботою «на папері» [3]. Д. Пойя розглядає правдоподібні міркування — спостереження, індукцію, аналогію — як необхідний етап, що передує доведенню [5]; саме такою роботою є обчислювальний експеримент у СКА.

Під дослідницькими вміннями старшокласників при розв'язуванні задач аналізу розуміємо вміння: планувати серію обчислювальних експериментів; помічати закономірності в числових і графічних даних; висувати гіпотези; перевіряти граничні випадки та шукати контрприклади; аналізувати помилки (власні, чисельні та «машинні»); формулювати й обґрунтовувати висновок із зазначенням меж його застосовності. Для їх формування пропонуємо організовувати роботу як цикл «питання — експеримент — гіпотеза — перевірка — висновок» (рис. 1), у якому рутинні обчислення виконує СКА, а ключові інтелектуальні дії залишаються за учнем.



Рис. 1. Схема навчального дослідження в СКА: розподіл діяльності між СКА та учнем

Принципова відмінність від традиційного заняття полягає в перерозподілі часу: те, що раніше було метою (отримати вираз похідної чи значення інтеграла), стає засобом, а метою стає дослідження. Розподіл діяльності та вмінь, що формуються на кожному етапі, подано в таблиці 1.

Таблиця 1. Розподіл діяльності між СКА та учнем на етапах навчального дослідження

Етап	Що виконує СКА	Що виконує учень	Вміння, що формується
1. Постановка питання	Будує графік, обчислює кілька значень	Формулює питання, обирає функцію та параметри	Бачити проблему, ставити питання
2. Експеримент	Символьні й чисельні обчислення, таблиці значень, графіки	Планує серію запитів, фіксує спостереження	Планувати експеримент, помічати закономірності
3. Гіпотеза	Швидко породжує додаткові приклади	Формулює й записує припущення	Висувати гіпотези

Етап	Що виконує СКА	Що виконує учень	Вміння, що формується
4. Перевірка	Точні й наближені значення, граничні випадки, контрприклади	Добирає критичні випадки, зіставляє результати, шукає причини розбіжностей	Перевіряти гіпотези, аналізувати помилки
5. Висновок	Контролює проміжні викладки	Обґрунтовує вручну ключові кроки, визначає межі застосовності	Узагальнювати й доводити

Границі. Учням пропонується дослідити $\lim_{x\to 0} (a^x - 1)/x$ при різних $a > 0$. СКА за секунди будує таблицю значень для $a = 2, 3, e, 10$ і $h = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}$: для $a = 2$ маємо 0,7177; 0,6934; 0,6931, для $a = e$ — 1,0517; 1,0005; 1,0000005. Учні помічають, що значення для $a = 2, 3, 10$ наближаються до 0,6931; 1,0986; 2,3026, і, порівнявши з $\ln a$, висувають гіпотезу: границя дорівнює $\ln a$. Перевірка граничних випадків ($a = 1$, $a = 0{,}5$, дуже великі a) підтверджує її. Далі аналізуємо помилку: якщо продовжити таблицю до $h = 10^{-15}$ і 10^{-16}, чисельне обчислення $(e^h - 1)/h$ у стандартній подвійній точності дає 1,11 і 0, тоді як символьний режим повертає 1. Учні з'ясовують причину — втрату значущих цифр при відніманні близьких чисел — і доходять висновку: чисельний експеримент підтверджує гіпотезу лише в певному діапазоні кроків.

Похідна. Розглянемо $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. СКА символьно знаходить $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ при $x \neq 0$ та будує графіки (рис. 2). Типова гіпотеза: «$f'(0)$ дорівнює границі $f'(x)$ при $x \to 0$». Запит границі показує, що її не існує (значення коливаються між -1 і 1), і виникає хибний висновок: «похідної в нулі немає». Перевірка за означенням скасовує його: $(f(h) - f(0))/h = h \sin(1/h)$, причому $|h \sin(1/h)| \le |h| \to 0$, тому $f'(0) = 0$ (рис. 2, а: графік затиснуто між параболами $\pm x^2$). Висновок: похідна існує в кожній точці, але f' розривна в нулі, а формула для f' при $x \neq 0$ не визначає значення в точці. Варіація «замінити x^2 на x» показує, що тоді відношення $\sin(1/h)$ не має границі й похідної в нулі немає.

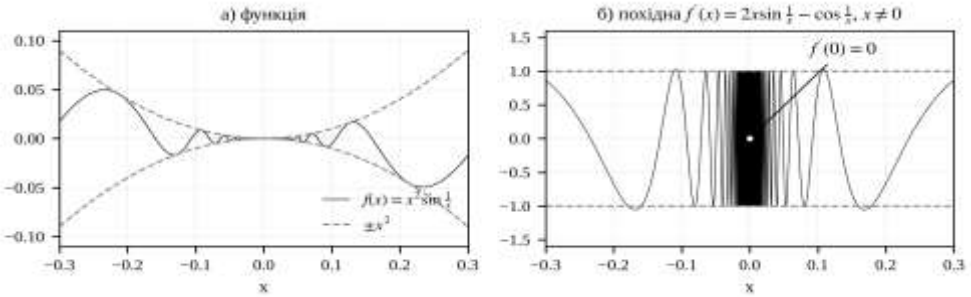

Рис. 2. Дослідження диференційовності функції $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ у точці 0

Інтеграл. Для $\int_0^1 e^x\,dx$ СКА знаходить точне значення $e - 1 \approx 1{,}7183$, і воно слугує еталоном для вивчення наближених методів. Учні просять СКА

обчислити суми за методами лівих прямокутників, середніх прямокутників, трапецій і Сімпсона для n = 2, 4, …, 256 та побудувати графік похибки в логарифмічних координатах (рис. 3). Спостереження: точки лежать майже на прямих, а оцінка нахилу за n = 2,…,64 дає −0,98; −2,00; −2,00; −3,99. Звідси гіпотеза про порядок збіжності: похибка ≈ C/n^p, де p = 1, 2, 2, 4. Її легко перевірити «руками»: при подвоєнні n від 10 до 40 похибка лівих сум становить 0,0845; 0,0426; 0,0214 (зменшується вдвічі), а середніх прямокутників — $7{,}2\cdot10^{-4}$; $1{,}8\cdot10^{-4}$; $4{,}5\cdot10^{-5}$ (зменшується вчетверо). Додаткове спостереження — похибка трапецій приблизно вдвічі більша, ніж середніх прямокутників, і має протилежний знак, — наводить на гіпотезу, що метод Сімпсона є комбінацією двох попередніх; її перевіряють рівністю $S_{2n} = (2M_n + T_n)/3$ у СКА й обґрунтовують на папері.

Граничний випадок для інтеграла — $\int_{-1}^{1} dx/x^2$. Формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца з первісною −1/x дає −2, що суперечить додатності підінтегральної функції. СКА показує, що інтеграл розбіжний, а суми середніх прямокутників при n = 10, 100, 1000 дорівнюють 47,4; 491,5; 4932,8, тобто зростають приблизно пропорційно n. Учні формулюють висновок: умова неперервності підінтегральної функції на відрізку суттєва, а розбіжність слід розпізнавати за зростанням сум.

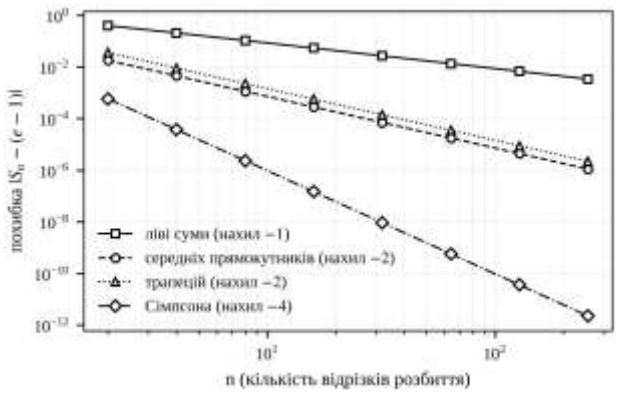

Рис. 3. Залежність похибки наближеного обчислення $\int_0^1 e^x\,dx$ від кількості відрізків розбиття

Ефективність такої методики залежить від низки умов: завдання формулюються за схемою «передбач — перевір — обґрунтуй», тобто учень записує прогноз до запуску СКА; результати фіксуються в «журналі дослідження» (запит — результат — спостереження — гіпотеза — перевірка); кожне завдання містить критичний випадок (параметр, точку розриву, межу точності обчислень); ключові кроки обґрунтування учні виконують вручну, щоб не втрачати технічну складність [2; 3]; оцінюється не лише відповідь, а й якість гіпотез, добір контрприкладів та аналіз помилок. Головний ризик — «кнопковий» режим роботи, коли результат СКА приймають без перевірки

області визначення й умов застосовності; його знімають саме вимоги до прогнозу, перевірки та письмового висновку.

Отже, СКА знімає рутинні технічні обчислення при розв'язуванні задач про границі, похідні й інтеграли та вивільняє час для висування гіпотез, перевірки граничних випадків, аналізу помилок і формулювання математичних висновків — тобто для тих дій, що становлять дослідницьку діяльність. Перспективу подальших досліджень вбачаємо в розробленні системи дослідницьких завдань із початків аналізу для профільної школи та експериментальній перевірці її впливу на рівень сформованості дослідницьких умінь учнів.

Список використаних джерел:

1. Юнчик В. Л., Федонюк А. А. Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі. 2019. № 6. С. 90–102. URL: https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/47808 (дата звернення: 12.11.2026).
2. Artigue M. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2002. Vol. 7. P. 245–274. DOI: 10.1023/A:1022103903080.
3. Drijvers P. Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education / ed. by S. J. Cho. Cham : Springer, 2015. Chap. 8. DOI: 10.1007/978-3-319-17187-6_8.
4. Heid M. K. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education. 1988. Vol. 19, No. 1. P. 3–25.
5. Pólya G. Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics. Princeton : Princeton University Press, 1954.
6. Ruthven K. Instrumenting mathematical activity: reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2002. Vol. 7. P. 275–291. DOI: 10.1023/A:1022108003988.