Візуалізація та динамічне дослідження функцій і параметрів засобами систем комп'ютерної алгебри

Захаркевич Марія Вікторівна, здобувач освіти 2 курсу другого (магістерського) рівня вищої освіти, спеціальності 014 Середня освіта
Науковий керівник:
Чемерис Ольга Анатоліївна, кандидат педагогічних наук, доцент Кафедри фізики, астрономії та робототехніки,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
м. Житомир, Україна

Задачі з параметрами, дослідження монотонності та екстремумів функцій традиційно належать до найскладніших тем шкільного курсу алгебри й початків аналізу. Труднощі зумовлені не стільки обчислювальною технікою, скільки тим, що параметр змушує мислити не одним об'єктом, а цілим сімейством об'єктів. Тому учні нерідко діють механічно: підставляють окремі значення параметра або виконують завчену послідовність кроків (знайти похідну, прирівняти її до нуля, дослідити знак), не бачачи, яка зміна графіка стоїть за кожним перетворенням. Державні стандарти загальної середньої освіти орієнтують математичну освіту на формування здатності застосовувати знання, а не лише на засвоєння процедур [2]. Системи комп'ютерної алгебри (СКА) – GeoGebra, Maple, Maxima, SageMath, Wolfram|Alpha та інші – дають змогу зробити цю зміну видимою й керованою: параметр можна «рухати» повзунком і спостерігати, як змінюються графік, кількість коренів і положення екстремумів.

Мета дослідження – обґрунтувати роль наочності та інтерактивних графічних побудов у СКА під час вивчення задач із параметрами, монотонності, екстремумів і поведінки функцій та описати методичні прийоми, які допомагають учням перейти від механічного підставляння значень до розуміння геометричного змісту аналітичних перетворень.

Теоретичним підґрунтям є уявлення про те, що розуміння математичного поняття потребує узгодження кількох способів його подання. Р. Дюваль наголошує, що розуміння в математиці пов'язане зі здатністю не лише діяти в межах одного семіотичного регістру, а й свідомо переходити від одного регістру до іншого, наприклад від алгебраїчного запису до графіка [5]. Д. Толл і С. Віннер показали, що образ поняття в уяві учня може розходитися з його означенням [8]. Для функції це означає, що формальне правило «якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає» співіснує з неповним або хибним графічним образом. Інтерактивна побудова в СКА дозволяє вибудувати цей образ безпосередньо: учень бачить, як змінюється графік, і сам пов'язує його з аналітичним записом.

Методичний потенціал СКА підтверджують і українські дослідження. О. В. Семеніхіна та М. Г. Друшляк описали три способи розв'язування задач на екстремум у GeoGebra: побудову динамічної моделі зі спостереженням за зміною

шуканої величини, побудову графіка залежності за допомогою інструмента «Динамічний слід» і аналіз таблиці значень функції [4]. М. Віра та П. Самусенко пропонують поєднувати традиційні аналітичні та графічні методи розв'язування алгебраїчних задач із параметром із динамічними моделями в GeoGebra, що розвиває як математичну, так і інформаційну компетентності [1]. Н. Кугай і А. Громак для теми «Похідна та її застосування» розробили інтерактивні моделі й робочі аркуші на засадах «сліпого дослідження» та візуальної симуляції; автори повідомляють про підтвердження ефективності методики на практиці [3].

Водночас наочність не замінює аналітичного обґрунтування. Ю. Горошко зі співавторами порівняли вільні системи (GeoGebra, Wolfram|Alpha, Maxima, SageMath, GRAN1) на задачах із параметрами й дійшли висновку, що графічний та аналітичний методи найефективніші разом: графік показує, як кількість розв'язків залежить від параметра, але не дає точних меж, які слід знайти аналітично; водночас у прикладах авторів СКА подекуди видавали неповні або хибні відповіді, зокрема пропускали особливі випадки значень параметра [6]. Тому СКА доцільно розглядати як засіб висування й перевірки гіпотез, а не як «автоматичний розв'язувач». Типові помилки, яких припускаються користувачі під час роботи з математичними пакетами, проаналізовано в [7]; на нашу думку, це підтверджує потребу цілеспрямованого навчання роботі з СКА.

На нашу думку, ключовою є послідовність «гіпотеза – візуалізація – аналітичне обґрунтування – узагальнення»: учень спочатку передбачає результат, потім спостерігає його в динамічній моделі, після цього доводить аналітично і, нарешті, змінює умову та перевіряє, чи зберігається закономірність. Прийоми, які реалізують цю послідовність, подано в таблиці 1.

Таблиця 1. Методичні прийоми візуалізації в СКА

Прийом	Дія в СКА	Що усвідомлює учень
Повзунок параметра	Параметр a задають повзунком; графік y = f(x; a) змінюється в реальному часі	Параметр – змінна величина; рівняння з параметром задає сімейство кривих
Рухома горизонтальна пряма	Побудова прямої y = a разом із графіком y = f(x); підрахунок точок перетину	Кількість коренів рівняння f(x) = a визначають монотонність і екстремуми функції f
Графіки f і f′ в одній системі координат	Одночасне відображення функції та її похідної	Зв'язок знака похідної, монотонності й екстремумів
Слід характерної точки	Увімкнення сліду для вершини параболи або точки екстремуму під час руху повзунка	Положення екстремуму залежить від параметра; поняття геометричного місця точок
«Прогноз – перевірка»	Передбачення результату до побудови, потім перевірка в СКА й аналітично	Контроль власних міркувань; виявлення особливих випадків

Наведемо приклад для 10–11 класів. Задача. Скільки коренів має рівняння $x^3 - 3x = a$ залежно від значення параметра a?

Етап 1 (гіпотеза). Учні будують графік функції $f(x) = x^3 - 3x$, рухають повзунком горизонтальну пряму $y = a$ і фіксують кількість точок перетину. Формулюють гіпотезу: один корінь при великих за модулем значеннях a, три – при малих, а на «межі» – два. Етап 2 (аналітичне обґрунтування). Учитель ставить запитання: «Чому саме при $a = \pm 2$?» Знаходимо $f'(x) = 3(x^2 - 1)$: функція зростає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[-1; 1]$; $f(-1) = 2$ – локальний максимум, $f(1) = -2$ – локальний мінімум. Отже, при $|a| > 2$ рівняння має один корінь, при $|a| = 2$ – два, при $|a| < 2$ – три. Етап 3 (узагальнення). Учні розглядають функцію $f(x) = x^3 + px$ і рухають повзунок p. Вони бачать, що при $p > 0$ графік монотонно зростає, при $p < 0$ на ньому з'являються два екстремуми в точках $x = \pm\sqrt{(-p/3)}$, а при $p = 0$ «горбок» зникає: рівняння $f'(x) = 0$ має корінь $x = 0$, але екстремуму немає. Саме на цьому особливому випадку динамічна модель виявляє хибність дії «прирівняти похідну до нуля – отже, екстремум».

Ефективність цих прийомів залежить від дотримання кількох вимог: постановки запитання до побудови, а не після неї; обов'язкового аналітичного обґрунтування побаченого, зокрема перевірки граничних і особливих значень параметра; критичного ставлення до вікна перегляду (за невдалого масштабу екстремум або корінь можуть лишитися поза екраном, тому масштаб слід змінювати); поступового переходу від готових моделей, які демонструє вчитель, до моделей, що їх учні будують самостійно, та до робочих аркушів із завданнями на спостереження й пояснення.

Отже, наочність та інтерактивні побудови в СКА виконують не декоративну, а пізнавальну функцію: вони дають учневі змогу побачити, як параметр керує поведінкою функції, і пов'язати кожне аналітичне перетворення з геометричною зміною графіка. За умови поєднання з аналітичним обґрунтуванням і перевіркою особливих випадків це допомагає перейти від механічного підставляння значень до розуміння змісту розв'язання. Перспективу подальших досліджень вбачаємо в розробленні системи динамічних моделей і робочих аркушів із теми «Функції та параметри» для профільної школи й експериментальній перевірці їхнього впливу на якість розуміння учнями понять монотонності та екстремуму.

Список використаних джерел

1. Віра М., Самусенко П. Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. Фізико-математична освіта. 2023. Вип. 1 (38). С. 7–13. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-1-001. URL: https://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/13135 (дата звернення: 22.10.2026).

2. Деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти : постанова Каб. Міністрів України від 30 верес. 2020 р. № 898. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п (дата звернення: 22.10.2026).
3. Кугай Н., Громак А. Формування дослідницьких умінь старшокласників засобами GeoGebra (на прикладі теми «Похідна та її застосування»). Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету. 2026. № 2. С. 116–127. DOI: 10.31499/2307-4906.2.2026.362778. URL: https://znp.udpu.edu.ua/article/view/362778 (дата звернення: 22.10.2026).
4. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Використання програми GeoGebra в дослідженні функціональних залежностей (на прикладі розв'язування задач на екстремум). Комп'ютер в школі і сім'ї. 2015. № 6. С. 17–24. URL: https://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/1022 (дата звернення: 22.10.2026).
5. Duval R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. 2006. Vol. 61. P. 103–131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z.
6. Horoshko Yu. H., Pidhorna T. V., Samusenko P. F., Tsybko H. Ya., Tverdokhlib I. A. Tasks with parameters: a digitized approach. Educational Dimension. 2024. DOI: 10.55056/ed.709. URL: https://doi.org/10.55056/ed.709 (дата звернення: 22.10.2026).
7. Semenikhina O. V., Drushlyak M. G. Computer mathematical tools: practical experience of learning to use them. European Journal of Contemporary Education. 2014. Vol. 9, № 3. P. 175–183. URL: https://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/2670 (дата звернення: 22.10.2026).
8. Tall D., Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics. 1981. Vol. 12, № 2. P. 151–169. DOI: 10.1007/BF00305619.